Gino Fano

Irrazionalità della forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni

Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, Vol. **9** (1950), p. 21–45

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1950_3>

Gino Fano

IRRAZIONALITÀ DELLA FORMA CUBICA GENERALE DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

(Conferenze tenute il 27 febbraio e il 3 marzo 1950).

1. La questione della razionalità o meno dela forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni (M_3^3 di S_4), cioè della varietà algebrica a 3 dimensioni del 3° ordine di questo spazio priva di punti doppi (1), si è presentata in geometria da forse 60 anni, suscitando viva curiosità. Mentre per le curve algebriche condizione necessaria e sufficiente per la razionalità è l'annullarsi del genere, e per le superficie l'annullarsi del genere numerico e del bigenere, e per conseguenza di tutti gli altri generi (2), per le varietà algebriche a tre dimensioni le condizioni di razionalità sono tuttora sconosciute. D'altra parte la curva piana generale di 3° ordine, essendo di genere 1, non è razionale, mentre invece è razionale ogni superficie cubica dello spazio ordinario, all'infuori del cono ellittico (3); per le forme cubiche generali degli spazi di dimensione $\geqq 4$ la questione rimaneva ancora dubbia, con presunzione piuttosto negativa. Per gli spazi di dimensione dispari è noto tuttavia da tempo che esistono forme cubiche razionali anche prive di punti doppi; sono però tutte (per quanto è noto finora) forme particolari. Ad es., nello spazio a 5 dimensioni, le forme cubiche contenenti una super-

---

(1) Le forme cubiche di uno spazio qualunque S_r con uno o più punti doppi (non tripli!) sono ovviamente razionali, perchè in corrispondenza birazionale colla stella ∞^{r-1} di rette avente uno qualunque di questi punti doppi per centro.

(2) Castelnuovo, « Mem. Società Ital. delle Scienze » (detta dei XL), ser. 3ª, vol. X, 1894-96. Questa memoria è riprodotta nel volume « Memorie scelte » del Castelnuovo, pubblicato in occasione del suo giubileo scientifico (Bologna, Zanichelli, 1937); a seguito di essa, a pag. 333-34, sono esposte alcune considerazioni, tuttora interessanti, sulle varietà algebriche a 3 dimensioni a generi tutti nulli.

(3) Una superficie generale del 3° ordine dello spazio S_3 contiene 27 rette, fra cui varie coppie di rette sghembe, ed è perciò in corrispondenza birazionale colla congruenza lineare di rette avente una di tali coppi per direttrici.

ficie appartenente pure a questo spazio e il cui sistema delle ∞^4 corde è del 1° ordine (coppia di piani indipendenti, rigata razionale normale del 4° ordine); e così, in ogni spazio di dimensione r dispari, ogni forma cubica contenente due spazi di dimensione $\frac{r-1}{2}$ indipendenti.

Fino dal 1904 avevo dimostrato che le superficie algebriche contenute in una forma cubica generale dello spazio S_4 sono tutte intersezioni complete di questa forma con altra, di ordine qualsiasi n (4). Ciò in base alla considerazione che la detta forma cubica contiene ∞^2 rette costituenti un sistema unico irriducibile; che perciò una superficie algebrica contenuta nella detta forma deve incontrarne tutte le rette in uno stesso numero di punti; e che sopra una superficie generale del 3° ordine ogni curva che ne incontri tutte le rette in n punti è di ordine $3n$ e intersezione completa della superficie con altra di ordine n.

Qualche anno dopo, nel 1907-08, mi sono proposto di esaminare se l'ipotesi dell'esistenza sulla forma cubica generale di S_4 di un sistema omaloidico di superficie — quale sarebbe stata necessaria nel caso della sua razionalità — conducesse a qualche contraddizione. Per la forma cubica non mi riuscì di giungere ad alcuna conclusione; analoghe considerazioni mi condussero però ad accertare la irrazionalità della forma generale del 4° ordine dello spazio S_4, come pure della varietà M_3^6 di S_5 intersezione generale di una quadrica e di una forma cubica di questo spazio (5). Furono questi i primi esempi di *varietà algebriche a tre dimensioni regolari e aventi tutti i generi e plurigeneri nulli, e tuttavia non razionali;* l'annullarsi dei detti caratteri, condizione ovviamente necessaria per la loro razionalità, non è dunque condizione sufficiente. Identificando la quadrica passante per la M_3^6 colla totalità delle rette dello spazio S_3 (6), risultava anche stabilita la *irrazionalità del complesso cubico generale di rette.*

Nel 1912 F. ENRIQUES dimostrò che la stessa M_3^6 di S_5 può rappresentarsi sopra un'involuzione ∞^3 dello spazio S_3; primo esempio di *involuzione irrazionale dello spazio* S_3 (7): risul-

(4) « Atti Accad. d. Sc. di Torino », vol. 39 (1903-04), p. 597.
(5) « Atti Accad. di Torino », vol. 43 (1907-08), p. 973.
(6) F. KLEIN, « Mathem. Ann. », vol. 5 (1872), p. 257; « Gött. Nachr. », 29 marzo 1872, Nota riprodotta nei « Mathem. Ann. », vol. 22 (1883), p. 234.
(7) « Rend. Accad. dei Lincei » (5), vol. 21, 1° sem. 1912, p. 81.

tato notevolissimo, poichè, mentre sono razionali le involuzioni ∞^1 sulla retta e quelle ∞^2 nel piano, nulla si sapeva circa la possibilità di estendere questo risultato a spazi di dimensione $\geqq 3$. In altri termini, *Data un'equazione algebrica* (in coordinate omogenee)

$$f(x_0\, x_1\, x_2 \dots x_r) = 0$$

con $r \geqq 4$, *e supposto che essa sia risolubile per mezzo di funzioni razionali non invertibili di r-1 parametri, non è possibile in generale ottenere una nuova risoluzione per mezzo di funzioni razionali invertibili.* La varietà $M_3{}^6$ e analoghe sono oggi dette *unirazionali.*

L'ordine dell'involuzione su cui può rappresentarsi la $M_3{}^6$, cioè il numero dei punti componenti i singoli gruppi di essa, fu determinato in seguito da G. APRILE, che lo trovò$=216$. Egli dimostrò tuttavia che, applicando lo stesso procedimento indicato da ENRIQUES e modificandone qualche dettaglio, la $M_3{}^6$ può rappresentarsi su un'involuzione dello spazio S_3 di ordine 36 (8).

Il procedimento indicato da ENRIQUES è fondato sulle considerazioni seguenti:

1) Lo spazio S_3 tangente alla $M_3{}^6$ in un punto qualsiasi (intersezione dei due spazi S_4 ivi tangenti alla quadrica e alla forma cubica di cui $M_3{}^6$ è intersezione) incontra la $M_3{}^6$ in una curva razionale C^6 avente nel punto di contatto un punto 4^{plo}, e proiettata da questo punto secondo il cono quadrico K intersezione del detto S_3 colla quadrica passante per $M_3{}^6$;

2) Gli spazi S_3 tangenti nei punti di una di queste C^6 segano una ∞^1 razionale di C^6, luogo delle quali è una superficie F anche razionale (9). Gli spazi S_3 tangenti nei punti di F segano una ∞^2 pure razionale di curve razionali, che invadono tutta la $M_3{}^6$, costituendovi una congruenza Γ di un certo ordine $k>1$;

3) Esistono in $M_3{}^6$ superficie *unisecanti* le curve di Γ; p. es. uno generico π dei piani contenuti nella quadrica passante per $M_3{}^6$ incontra lo spazio S_3 di una C^6 e quindi il relativo cono K in *un* punto, individuando così la generatrice di K passante per questo punto, e il punto di C^6 appartenente a questa generatrice.

(8) « Rassegna di Matem. e Fisica », anno I (1921), p. 133.
(9) NOETHER, « Mathem. Ann. », vol. 3 (1871), p. 161.

Le singole C^6 sono allora proiettate univocamente dallo spazio σ_3 di π e di questa generatrice; e basta riferire birazionalmente la congruenza Γ a una stella di rette O di uno spazio Σ_3 entro l'S_5, e proiettare ogni C^6 dal relativo spazio σ_3 sul raggio corrispondente della stella O. Poichè ogni punto di $M_3{}^6$ appartiene a k curve C^6, la $M_3{}^6$ risulterà rappresentato sui gruppi di k punti di un'involuzione entro Σ_3.

2. Nel 1915 ho dato altra dimostrazione più semplice della irrazionalità della forma generale di 4° ordine di S_4 e della $M_3{}^6$ di S_5 ([10]). Premetto che su queste due varietà, se del tipo più generale, ogni superficie è loro intersezione completa con una forma di ordine n; perciò di ordine $4n$, o rispett. $6n$ ([11]). E, piuttosto che cercare nelle due varietà gli eventuali sistemi omaloidici, mi parve preferibile rivolgere l'attenzione ai sistemi lineari di superficie aventi tutti i generi (geometrico, aritmetico, lineare) eguali all'unità, e alle eventuali diversità fra questi sistemi e quelli dello spazio S_3. Questi ultimi, a dir vero, non erano nè sono ora tutti noti; ma a stabilire che quelle due varietà sono irrazionali bastava ad es. la mancanza in esse di un sistema lineare di superficie di generi uno con caratteri eguali a quelli di un sistema noto dello spazio S_3, per es. di un sistema di dimensione 34 riferibile al sistema di tutte le superficie di 4° ordine di S_3. Di più, le F^{4n} e F^{6n} cercate, essendo di generi uno, dovevano mancare di tutte le superficie aggiunte di indice superiore ad 1; e perciò, se $n>1$, dovevano avere almeno un punto base isolato di multiplicità $\geqq 2n+1$, oppure una linea di multiplicità $\geqq n+1$, senza di che nessuna condizione sarebbe stata imposta alle aggiunte d'indice n (che sono di ordine zero). Risultò così che sulla $M_3{}^4$ generale di S_4 non esistono sistemi lineari ∞^4 di superficie di generi uno all'infuori delle sezioni iperpiane; e che sulla $M_3{}^6$ qualunque sistema lineare di superficie di generi uno è di dimensione 5 e grado 6, come quello delle sezioni iperpiane, ed è riducibile a questo con trasformazioni birazionali sulla $M_3{}^6$ ([12]).

Un contributo indiretto all'argomento ho portato con altra

([10]) « Atti Accad. di Torino », vol. 50 (1914-15), p. 1067.

([11]) Severi, « Rend. Accad. dei Lincei » (5), vol. 15, 2° sem. 1906, p. 691; nonchè la mia Nota negli « Atti dell'Accad. di Torino », vol. 44 (1908-09), p. 633.

Memoria dello stesso anno ([13]), mostrando che è razionale ogni varietà algebrica a 3 dimensioni a superficie-sezioni razionali e di ordine superiore a 3; o, in altri termini, contenente un sistema lineare semplice di superficie di grado >3. E ciò con un procedimento ricorrente, passando da ogni sistema lineare $|F|$ di superficie razionali al sistema $|F+F'|$ aggiunto al doppio del primo; procedimento che ha termine con un sistema di superficie anche razionali a intersezioni iperellittiche, in particolare ellittiche (in tal caso di grado >3) o razionali, oppure con un sistema appartenente a una congruenza del 1° ordine di linee, riducibile a una stella di rette di S_3. Ne segue che la forma cubica generale di S_4, se non è razionale, non contiene altri sistemi lineari semplici di superficie razionali che sistemi ∞^4 di grado 3.

3. Le ricerche precedenti, interrotte dalla guerra 1915-18 e da altre occupazioni, non furono riprese che nel periodo 1925-30. Si presentarono allora, e in parte negli anni successivi, le considerazioni seguenti:

1) Le varietà M_3^4 di S_4 e M_3^6 di S_5 hanno come curve-sezioni rispettivamente curve piane generali di 4° ordine e curve di 6° ordine e genere 4 (C_4^6), cioè curve canoniche di generi 3 e 4. Appartengono quindi alla successione delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} aventi come curve-sezioni curve canoniche di genere p (C_p^{2p-2} di S_{p-1}), e incontrate dagli iperpiani in superficie F^{2p-2} di S_p aventi tutti i generi eguali all'unità. Il termine successivo, $p=5$, è la M_3^8 di S_6 intersezione generale di 3 quadriche. Inoltre la forma cubica generale di S_4 è incontrata dalle ∞^{14} quadriche del suo spazio in un sistema lineare di superficie F^6 di generi uno, di grado $2^3.3=24$, rappresentato da (cioè birazionalmente equivalente al sistema delle sezioni iperpiane di) una M_3^{24} di S_{14}, appartenente pur essa, per $p=13$, alla successione suindicata. Pur

---

([12]) La M_3^6 ad es. contiene ∞^1 rette, e un piano generico passante per una di queste incontra ulteriormente la quadrica e una forma cubica passanti per la M_3^6 rispett. in una retta e una conica, perciò la M_3^6 nei due punti comuni a queste linee. Queste coppie di punti formano su M_3^6 un'involuzione, nella quale a ogni superficie F^{6n} avente quella retta come multipla di ordine $n+i$ corrisponde una $F^{6(n-i)}$ — perciò, se $i>0$, di ordine $<6n$ — colla stessa retta multipla di ordine $n-4i$ ($<n-i$). Con queste ed altre trasformazioni si riesce a ridurre l'ordine di ogni sistema $|F^{6n}|$ di superficie di generi uno, in cui $n>1$.

([13]) « Annali di Matem. » (3), vol. 24 (1915), p. 49.

tenendo presente che le M_3^{2p-2} generiche per i valori più piccoli di p contengono soltanto superficie loro intersezioni complete con forme dei rispettivi spazi, cioè solo sistemi lineari multipli delle sezioni iperpiane, mentre ciò non avviene per la M_3^{24} che contiene anche superficie metà delle sezioni iperpiane (immagini delle sezioni iperpiane della forma cubica di S_4), non appariva dubbio che lo studio ulteriore delle M_3^{2p-2} a curve-sezioni canoniche e dei sistemi lineari di superficie di generi uno in esse contenuti — superficie che, se segate da forme di ordine n, devono avere, come nei casi $p=3$ e $p=4$, un punto di multiplicità $\geqq 2n+1$ oppure una linea di multiplicità $\geqq n+1$ — dovesse condurre a una più chiara visione delle proprietà della M_3^3 di S_4.

2) Per i primi valori di p (fino a $p=10$ incluso) esistono varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} contenenti soltanto superficie di ordine $n(2p-2)$ loro intersezioni complete con forme di ordine n; ed è su queste particolarmente che conviene concentrare l'attenzione. Per $p=3$, 4, 5 queste contengono una semplice infinità di rette, generatrici di una rigata di ordine rispettivamente 320, 180, 128, intersezione con una forma di ordine 80, 30, 16 ([14]). Poichè questi ordini (sia delle rigate, sia delle forme che le segano) vanno abbastanza rapidamente decrescendo, era presumibile che già per valori non molto elevati di p le M_3^{2p-2} non contenessero più rigate consimili, o si limitassero (come appunto è risultato) a varietà non contenenti affatto rette, oppure con soli piani, o rette multiple isolate, facili a determinarsi direttamente ([15]), e loro proiezioni. Questa presunzione poteva anche apparire convalidata da una certa analogia fra le M_3^{2p-2} di S_{p+1} a superficie-sezioni di generi uno e le superficie a curve-sezioni di genere uno, le quali ultime, se razionali, sono tutte di ordine $\leqq 9$ ([16]), a differenza delle superficie a curve-sezioni di genere zero, cioè razionali, che possono avere un ordine qualsiasi.

([14]) G. MARLETTA, « Atti Accad. Gioenia di Catania » (4), vol. 16 (1903), Mem. 1ª.

([15]) Le M_3^{2p-2} di S_{p+1} non contenenti rette contengono un sistema lineare di superficie sottomultiplo delle sezioni iperpiane, perciò composto di superficie razionali, a intersezioni anche razionali od ellittiche. Esse sono determinate ai n. 9 e seg. della mia Memoria: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche* (« Mem. Accad. d'Italia », classe sc. fis. mat e nat., vol. 8 (1937), n. 2). Il caso più semplice, $p=13$, è già segnalato nel presente n. 3, capoverso 1). Nella detta Memoria è anche dimostrato che le M_3^{2p-2} di S_{p+1} esistono solo per $p \leqq 37$.

([16]) DEL PEZZO, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », vol. I (1884-87), p. 241.

3) Nel 1930 l'esame di un lavoro di F. PALATINI sulla geometria della retta dello spazio a 5 dimensioni ([17]) mi ha indotto a approfondire alcune questioni sui sistemi lineari di complessi lineari di questo spazio ([18]). Nello spazio S_3 una rete generica di complessi lineari contiene ∞^1 complessi speciali, le cui direttrici, o rette singolari, costituiscono un regolo, mentre le ∞^1 rette basi della rete costituiscono l'altro regolo della stessa quadrica. Poichè la polarità rispetto a un complesso lineare (o polarità nulla) dello spazio S dipende da un determinante emisimmetrico di ordine $r+1$, diverso da zero in generale soltanto se $r+1$ è numero pari, perciò r dispari, lo spazio S_5 era il primo in cui si poteva trovare una configurazione analoga. Appunto in S_5 un generico sistema lineare ∞^4 di complessi lineari (Γ) contiene ∞^3 complessi singolari di 1ª specie, ciascuno con una retta-centro o retta singolare ([19]), e d'altra parte esso ha pure ∞^3 rette basi. Questi due sistemi ∞^3 di rette ricoprono di nuovo una stessa varietà del 4° ordine ($M_4{}^4$), per un punto generico della quale passa *una* retta di ciascuno di essi; essi possono perciò riferirsi birazionalmente a una medesima sezione iperpiana della $M_4{}^4$, e quindi fra loro. Ora, un fascio generico di complessi lineari di S_5 contiene *tre* complessi singolari di 1ª specie; perciò il sistema ∞^3 dei complessi singolari contenuti in Γ è, entro Γ come spazio a 4 dimensioni, una forma cubica, che si riconosce facilmente essere priva di punti doppi e affatto generale; a questa è perciò riferibile anche il sistema ∞^3 delle rette singolari. D'altra parte la totalità delle rette di S_5, cioè la relativa Grassmanniana, è una $M_8{}^{14}$ di S_{14}, e le ∞^3 rette basi di un generico sistema lineare ∞^4 di complessi lineari ne costituiscono l'intersezione con un generico S_9 di S_{14}; cioè una $M_3{}^{14}$ di S_9, che è appunto la $M_3{}^{2p-2}$ di S_{p+1}, a curve-sezioni canoniche per $p=8$ ([20]). La forma cubica generale di S_4 è perciò birazionalmente identica a questa $M_3{}^{14}$; e molto semplice è la corrispondenza fra esse: completamente priva di punti fondamentali isolati, con una sola curva fondamentale di 1ª specie, di 5° ordine e genere 1, in ciascuna delle due varietà ($\gamma_1{}^5$ nella $M_3{}^{14}$,

---

([17]) « Atti Ist. Veneto », vol. 40 (parte 2ª), 1900-01, p. 371.

([18]) « Rend. Accad. Lincei » (6), vol. 11 (1° sem. 1930), pag. 227, 329.

([19]) Tale che il complesso lineare contiene tutte le ∞^5 rette di S_5 incidenti a questa retta singolare (ma non ne è esaurito, essendo le sue rette in numero di ∞^7).

([20]) F. SEVERI, « Annali di Matem. » (3), vol. 24 (1915), p. 89.

δ_1^5 nella M_3^3 di S_4) e 25 coppie di rette omologhe fondamentali di 2ª specie (appoggiate semplicemente a γ, e rispettivamente corde di δ), tali cioè che a ogni punto dell'una corrisponde l'altra per intero. Alle sezioni iperpiane F^{14} di S_{14} corrispondono sulla forma cubica le superficie segnate da forme di ordine 7 aventi la curva δ_1^5 come quadrupla; superficie che possiamo indicare con $7\varphi - 4\delta$ (essendo φ la sezione iperpiana della M_3^3); e alla curva γ la superficie $5\varphi - 3\delta$, unica aggiunta delle precedenti e che contiene, al pari delle $7\varphi - 4\delta$, le 25 corde di δ, rette fondamentali di 2ª specie. La corrispondenza può rappresentarsi colle equazioni:

$$F = 7\varphi - 4\delta$$
$$\gamma = 5\varphi - 3\delta$$

dove il segno = significa «ha per corrispondente». Risolvendo queste equazioni rispetto a φ, δ, abbiamo:

$$\varphi = 3F - 4\gamma$$
$$\delta = 5F - 7\gamma$$

dove la superficie $5F - 7\gamma$ è l'unica aggiunta delle $6F - 8\gamma$, che corrispondono alle 2φ e sono di generi uno.

Pertanto *nella successione delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche già per* $p=8$ (e non soltanto, come già accennato, per $p=13$) *si ha una varietà birazionalmente identica alla forma cubica generale di S_4.*

4) Una superficie F^{2p-2} di S_p a curve-sezioni canoniche e contenente una retta è incontrata ulteriormente dagli iperpiani passanti per questa retta in curve C_{p-2}^{2p-3}, che si appoggiano a questa retta in 3 punti, e formano un sistema lineare di grado $2p-6$. Perciò ogni M_3^{2p-2} di S_{p+1} si proietta da una sua retta r in una (particolare) M_3^{2p-6} di S_{p-1}, appartenente alla stessa successione qui in esame, in corrispondenza al genere $p-2$ delle curve-sezioni. Gli spazi S_3 tangenti alla M_3^{2p-2} nei punti di r formano un S_1-cono cubico, la cui traccia su S_{p-1}, immagine di r, è una rigata cubica normale R^3 di S_4. Si tratta dunque di una M_3^{2p-2} contenente, il più delle superficie abituali intersezioni con forme, questa R^3 (la *base* del sistema delle superficie è costituita da una sezione iperpiana e dalla R^3). Viceversa, la somma del sistema delle sezioni iperpiane della M_3^{2p-6} e della rigata R^3 equivale birazio-

nalmente al sistema delle sezioni iperpiane di M_3^{2p-2}. Dal punto di vista delle trasformazioni birazionali, la M_3^{2p-2} appare pertanto come una *particolare* M_3^{2p-6} : particolare, in quanto questa contiene la R^3 in più delle superficie abituali. In altri termini, le varietà M_3^{2p-2} a curve-sezioni canoniche di genere p, al crescere di questo genere, almeno di 2 unità per volta (quindi per p pari, o rispettivamente dispari), vanno birazionalmente particolarizzandosi, e presumibilmente avvicinandosi alla razionalità.

4. Vediamo ora quali conseguenze si possano trarre dalle considerazioni del n. prec. per le M_3^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche, contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme, nei casi $5 \leqq p \leqq 10$.

1) La M_3^8 di S_6, intersezione di tre quadriche ($p=5$), non è in generale razionale (come tosto vedremo). Essa è però razionale quando contenga una rigata R^3 di S_4; il che può ottenersi prendendo in S_6, in modo generico, tre quadriche indipendenti passanti per una R^3. Invero, dagli iperpiani passanti per tale R^3 essa è incontrata ulteriormente in un fascio di superficie di 5° ordine a sezioni ellittiche ([21]); e una M_3 contenente un fascio di superficie non rigate a sezioni ellittiche non è sempre razionale, ma lo è se queste superficie sono di 5° ordine ([22]). Sono perciò razionali la M_3^{12} di S_8 ($p=7$) e la M_3^{16} di S_{10} ($p=9$) contenenti soltanto superficie intersezioni complete; la prima perchè da una sua retta si proietta in una M_3^8 di S_6 contenente una rigata R^3; la seconda perchè l'analoga proiezione è una M_3^{12} di S_8 contenente pure una R^3, incontrata ulteriormente dagli ∞^3 iperpiani passanti per questa in superficie di un sistema omaloidico ([23]).

2) La M_3^{14} di S_9 ($p=8$) è certo razionale se contiene una rigata R^3; poichè dagli ∞^4 iperpiani passanti per questa è incon-

---

([21]) Superficie F^5 di DEL PEZZO: cfr. la nota ([16]).

([22]) F. ENRIQUES, « Mathem. Ann. », vol. 49 (1897), p. 1; cfr. in particolare p. 12, caso *d*). Nel caso presente, le $\infty^1 F^5$ incontrano la rigata R^3 in curve ellittiche di 5° ordine bisecanti le sue generatrici. E da una qualunque g di queste generatrici la M_3^8 si proietta in una M_3^4 di S_4 contenente un fascio di superficie cubiche, proiezioni delle F^5, per ciascuna delle quali è razionalmente nota la coppia di rette sghembe immagini dei due punti comuni alla C^5 e a g, e perciò la rappresentazione sulla congruenza lineare di rette che ha queste direttrici.

([23]) Di queste due varietà ho date rappresentazioni sullo spazio S_3 in una Nota dei « Comm. Mathem. Helvetici », vol. 14 (1942), p. 202.

trata ulteriormente in un sistema ∞^4 di superficie razionali di grado 2, riferibili perciò alle sezioni iperpiane di una quadrica di S_4 ([24]). E' dunque razionale la $M_3{}^{18}$ di S_{13}, di cui la precedente $M_3{}^{14}$ con R^3 è proiezione; mentre la $M_3{}^{14}$ del tipo generale (sezione generica della Grassmanniana delle rette di S_5 con un S_9) e quindi la forma cubica generale di S_4 se irrazionale, appare — per così dire — nel campo qui considerato, come la varietà **non razionale, ma più prossima alla razionalità.**

3) Rimangono così, fra le $M_3{}^{2p-2}$ di S_{p+1} a **curve-sezioni canoniche, come casi di ancora dubbia** razionalità, i soli casi $p=5$, 6, 8, contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme (o ipersuperficie). Allo studio di queste varietà e dei sistemi lineari semplici di superficie di generi uno in esse contenuti è dedicata la mia Memoria presentata all'Accademia Pontificia da S. E. SEVERI il 21 febbraio 1943, ma che per gli eventi bellici potè essere pubblicata solo nel 1948 ([25]). In essa è dimostrato che sulla $M_3{}^8$ di S_6 $(p=5)$ ogni sistema lineare semplice completo di superficie di generi uno è, come quello delle sezioni iperpiane, di grado 8 e dimensione 6, e birazionalmente equivalente al sistema delle sezioni iperpiane della stessa varietà, o di altra del medesimo tipo; che di analoga proprietà gode la $M_3{}^{10}$ di S_7 $(p=6)$, naturalmente per sistemi di grado 10 e dimensione 7; che infine sulla $M_3{}^{14}$ di S_9 $(p=8)$, e perciò anche sulla forma cubica generale di S_4, i soli sistemi lineari semplici completi di superficie di generi uno hanno grado 14 e dimensione 9, come il sistema delle sezioni iperpiane della $M_3{}^{14}$, oppure grado 24 e dimensione 14, e sono in quest'ultimo caso riferibili al sistema delle intersezioni di una forma cubica di S_4 con quadriche. Tutte queste varietà, inclusa la forma cubica generale di S_4, sono pertanto irrazionali.

La dimostrazione si appoggia, in massima, sulla possibilità di ridurre gradatamente, mediante trasformazioni birazionali sulla $M_3{}^{2p-2}$, l'ordine di un sistema qualsiasi di superficie di generi uno fino a quello delle sezioni iperpiane di una varietà del tipo voluto. Essa è piuttosto laboriosa per la $M_3{}^8$ e la $M_3{}^{10}$, che contengono congruenze del 1° ordine di curve razionali, e ammettono perciò tipi molteplici di trasformazioni birazionali;

([24]) Cfr. di nuovo la mia Nota ultima cit., n. 7.

([25]) « Commentationes » della detta Accademia, vol. XI (1947-48), p. 635-720.

meno per la M_3^{10}, che dà impressione di essere più lontana dalla razionalità (fra altro perchè, a differenza delle altre due, il fatto di contenere una rigata cubica R^3 non basta a renderla razionale).

La più generale M_3^{10} di S_7 a curve-sezioni canoniche di genere 6 è intersezione di una V_4^5 a curve-sezioni ellittiche con una quadrica; e la V_4^5 è a sua volta la sezione della M_6^5 di S_9, Grassmanniana delle rette di S_4, con un generico S_7. La M_3^{10} è perciò immagine del sistema ∞^3 di rette di S_4 intersezione generale di due complessi lineari e di un complesso quadratico; sistema studiato negli anni 1913-14 da G. MARLETTA, nei cui lavori ([26]) si trovano già, sotto altra forma, parecchie proprietà della M_3^{10}.

5. Le varietà M_3^{2p-2} qui considerate e loro casi particolari sono tutte rappresentabili, per $p \geqq 4$, sopra involuzioni, eventualmente irrazionali, dello spazio S_3. Particolarmente interessante appare il caso di un'involuzione irrazionale composta di gruppi di un numero limitato di punti, possibilmente di sole coppie di punti.

La M_3^6 di S_5, intersezione di una quadrica e di una forma cubica, può contenere qualche piano, fino a 3 piani di quella quadrica a 2 a 2 incidenti (cioè dello stesso sistema sulla quadrica), bastando perciò imporre alla forma cubica di contenere essa pure questi piani. Le altre quadriche di S_5 passanti pure per i 3 piani segano allora sulla M_3^6 un sistema ∞^4 di superficie equivalente a quello delle sezioni iperpiane di una forma cubica generale di S_4; e viceversa, su questa forma cubica le quadriche passanti per 3 sue rette mutuamente sghembe segano un sistema ∞^5 equivalente a quello delle sezioni iperpiane di una M_3^6 contenente 3 piani mutuamente incidenti. Le M_3^6 contenenti 3 piani o soltanto 2 mutuamente incidenti, o anche un piano solo, sono dunque tutte irrazionali.

Fermiamo l'attenzione sulla M_3^6 contenente *un* piano π. Gli ∞^2 iperpiani passanti per π l'incontrano ulteriormente in una rete di superficie F^5 a sezioni di genere 2, le quali segano π in una rete di cubiche piane con 7 punti basi, doppi per M_3^6, e 2 intersezioni variabili (involuzione di GEISER); e si tagliano a coppie nelle coniche γ di una congruenza del 1° ordine, le quali a

([26]) « Rend. Circolo Matem. di Palermo », vol. 38 (1914), p. 43; « Atti Accad. Gioenia di Catania » (5), vol. 8 (1914), Mem. 5ª.

loro volta incontrano π nelle coppie dell'involuzione di GEISER. Proiettando ciascuna conica γ dai 2 punti comuni ad essa e al piano π, abbiamo una ∞^2 razionale di fasci di rette (razionale, in quanto i loro centri sono i punti di π); ed è pure razionale la totalità ∞^3 di queste rette, avendo ogni fascio *un* raggio nel piano π. Poichè per ogni punto di M_3^6 passano *due* di queste ∞^3 rette, la M_3^6 risulta rappresentata sopra un'involuzione di coppie di elementi di una ∞^3 razionale.

Come M_3^6 contenente un piano possiamo prendere un complesso cubico di rette contenente una stella O. L'involuzione di GEISER è allora un'involuzione in questa stella, generata da una rete di coni cubici con 7 rette basi; e le coniche γ sono coniche-inviluppi nei piani delle coppie di questa involuzione: inviluppi che esauriscono le rette del complesso. Ciascuno di questi inviluppi contiene due rette della stella O: le rette dell'inviluppo segano su queste due le coppie di una proiettività; e in S_3 si hanno in tutto ∞^3 coppie di un'involuzione, le cui congiungenti sono (biunivocamente) le stesse rette del complesso.

Si riconosce facilmente che queste coppie si corrispondono in una trasformazione Cremoniana involutoria di ordine 15.