Gino Fano

Chiarimenti sopra particolari superficie aventi tutti i generi eguali all'unità

Atti Acc. Sci. Torino, Vol. **84** (1950), p. 94–96

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1950_1>

Chiarimenti su particolari superficie aventi tutti i generi uguali all'unità.

Nota del Socio nazionale residente GINO FANO
presentata nell'adunanza del 5 Aprile 1950

Riassunto. — *Si espongono alcune proprietà di una superficie già considerata dal Sig. P. du Val, e si aggiungono osservazioni su altre superficie di generi uno.*

1. P. du Val ha osservato (1) che una superficie F^{10} di S_6 avente tutti i generi eguali all'unità, perciò come sezioni curve canoniche di genere 6, può acquistare un punto doppio in due modi diversi (sicchè la condizione di avere un punto doppio è per essa riducibile); e che nei due casi essa si proietta dal punto doppio rispettivamente in una F^8 di S_5 intersezione di tre quadriche e contenente una conica, e in una F^4 di Veronese doppia. Come vi sia questa doppia possibilità, rimane un po' oscuro.

In questo secondo caso la superficie F^{10} è intersezione di un cono proiettante una superficie F^4 di Veronese con una ipersuperficie cubica contenente uno dei coni quadrici che dallo stesso vertice proiettano le ∞^2 coniche della F^4. L'intorno del punto doppio della F^{10} si proietta in una conica semplice, tra le ∞^2 della F^4 doppia, conica che (come osserva du Val) deve essere tritangente alla curva di diramazione della F^4 doppia; mentre la conica pure semplice sovrapposta a quella è proiezione di una C^5 razionale avente nel punto doppio di F^{10} un punto triplo. Le altre coniche di F^4 sono proiezioni doppie di curve C^5 di genere 2 passanti semplicemente per il punto doppio

(1) « Rend. Accad. dei Lincei » (6), vol. 15, 1° sem. 1932, pag. 276, 345.

di F^{10}. *La* F^{10} *contiene perciò una rete di* C_2^5 *autoresidua rispetto alle sezioni iperpiane.*

Viceversa, imponiamo a una F^{10} di S_6 di generi uno la condizione (semplice) di contenere una C_2^5, e quindi tutta una rete di tali curve. Le curve residue di queste rispetto alle sezioni iperpiane devono anche essere C_2^5 di una rete, incontranti le prime in 3 punti. Queste terne di punti formeranno sulle singole C_2^5 serie lineari, che su curve di genere 2 possono avere soltanto la dimensione 1. La rete $|C_2^5|$ è pertanto autoresidua; e la serie g_3 sulle sue curve è allora la g_2^1 caratteristica, coll'aggiunta di un terzo punto fisso. Le C_2^5 stanno perciò su coni quadrici col vertice comune, che è appunto questo terzo punto fisso da aggiungere alle g_2^1, ed è punto doppio della F^{10}.

Inoltre le curve C_6^{10} canoniche sezioni iperpiane della F^{10}, proiettandosi in curve di eguale ordine e genere contenute in una F^4 di Veronese, non sono curve a moduli generali; bensì riferibili a una C^5 piana generale, contenenti perciò una serie speciale g_5^2, che sulle C_6^{10} è segata dalle C_2^5 dianzi considerate. Viceversa, se sopra una F^{10} di S_6 a curve sezioni canoniche anche *una sola* di queste sezioni è riferibile a una C^5 piana, questa particolare sezione C_6^{10} starà su una F^4 di Veronese, comune a tutte le quadriche di S_5 passanti per essa; e la F^{10}, non essendo neppur essa base esclusiva del sistema lineare delle quadriche di S_6 che la contengono, sarà appunto quella considerata al caso *b*) di p. 279 delle note citate di du Val, e avrà un punto doppio.

Sono pertanto proprietà essenziali, caratteristiche di questa F^{10} *quelle, tra loro equivalenti, di avere sezioni iperpiane* C_6^{10} *riferibili a quintiche piane, e di contenere una rete di* C_2^5. Esse portano di conseguenza l'esistenza sulla F^{10} di un punto doppio, non viceversa.

2. Le curve canoniche di genere p nello spazio S_{p-1} dipendono da $(p-1)(p+4)$ parametri [2]. Le superficie F^{2p-2}

(2) V. p. es. F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, traduz. LÖFFLER (Leipzig, Teubner, 1921), p. 373.

di S_p di generi uno aventi tali curve come sezioni dipendono a loro volta da 19 moduli, e perciò complessivamente da $19 + p(p + 2)$ parametri: invero due di esse birazionalmente identiche sono omografiche, dovendosi corrispondere le rispettive sezioni iperpiane (3). La differenza fra il secondo numero e il primo è $23 - p$, perciò negativa se $p > 23$. Ne segue che se $p > 23$ le curve sezioni iperpiane delle F^{2p-2} anzidette *sono curve canoniche di genere p a moduli particolari*; queste superficie esistono per ogni valore di p, come F. Enriques e F. Severi da tempo hanno dimostrato (4), ma hanno come sezioni curve a moduli particolari. In altri termini, *se $p > 23$, le superficie F^{2p-2} di S_p a curve sezioni canoniche di moduli generali sono tutte coni.*

D'altronde anche per valori più piccoli di $p = 23$, superficie F^{2p-2} di S_p dipendenti da 19 moduli possono avere come sezioni curve a moduli particolari. P. es. l'intersezione di una F^4 generale di S_3 con una quadrica è una curva di genere 9 contenente due serie lineari g^1_4, perciò a moduli particolari; mentre la superficie F^{16} di S_9 rappresentante il sistema lineare completo di una F^4 cui appartiene la curva anzidetta dipende da 19 moduli.

---

(3) Le C_6^{10} canoniche generali di S_5 sono ∞^{50}, le F^{10} di S_6 pure generali sono ∞^{67}; ognuna di quelle curve sta su ∞^{17} di queste superficie. Invece le C_6^{10} di un S_5 riferibili a quintiche piane sono soltanto ∞^{47} e le F^{10} di S_6 con punto doppio, qui considerate al n. 1, sono ∞^{66}; ciascuna di queste ultime C_6^{10} sta perciò su ∞^{19} superficie F^{10}, come è confermato dal computo dei coni di Veronese passanti per una di queste C_6^{10} e delle F^{10} passanti per questa curva entro ciascuno di quei coni.

(4) « Rend. Accad. Bologna », vol. 13 (1908), p. 25; « Atti Ist. Veneto » (7), vol. 68 (1908), p. 256.