Gino Fano

Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 8, Vol. **6** (1949), p. 151–156

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1949_1>

Geometria algebrica. — *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* Nota [*] del Socio GINO FANO.

1. Ho incontrato recentemente una varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche, che naturalmente appartiene alla serie delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} (qui $p = 12$), oggetto di mie ricerche in quest'ultimo periodo [1], ma non ha finora richiamata particolare attenzione. Ne darò qui un breve cenno.

Consideriamo nello spazio S_5 una rigata razionale normale R^4 (non cono), che per semplicità supponiamo del tipo più generale, cioè con ∞^1 coniche direttrici irriducibili; e con essa la varietà ∞^4 delle sue corde. Quale ne è l'immagine M_4 nella Grassmanniana M_8^{14} di S_{14} [2] delle rette di S_5 [3]?

Determiniamo anzitutto l'ordine di questa M_4, ad esempio l'ordine della superficie sua intersezione con un S_{12}, vale a dire della ∞^2 di rette comune alla ∞^4 suddetta e a due complessi lineari. Valendoci di due complessi costituiti risp. dalle rette incidenti a due S_3, questi ultimi contenuti in un $S_4 \equiv \sigma$ e aventi perciò a comune un piano π, la ∞^2 di rette in parola si spezzerà nei due sistemi delle corde di R^4 contenute in σ e di quelle incidenti al piano π. Le prime sono le ∞^2 corde di una C^4 razionale normale, e nella Grassmanniana delle rette di σ hanno per immagine una superficie φ^9 di S_9 di Del Pezzo [4]. Della seconda ∞^2 prendiamo l'intersezione con un ulteriore complesso lineare, anche con un $S_3 \equiv \tau$ direttore incontrante π in una retta. Si ha una rigata composta di una parte luogo delle corde di R^4 contenute nello spazio $S_4 \equiv \tau\pi$ e incidenti a π, la cui imma-

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Più specialmente nella Memoria: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* « Mem. Acc. d'Italia », classe sc. fis., vol. VIII (1937), n. 2.

(2) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati*... « Ann. di Matem. » (3) vol. 24 p. 89 (1915).

(3) Questione analoga per le rigate razionali normali di ordine inferiore: le corde di una quadrica di S_3 costituiscono la totalità delle rette di questo spazio, cioè una M_4^2 di S_5. Il sistema delle corde di una R^3 di S_4 è una M_4^9 di S_9 a curve-sezioni di genere 3, la cui superficie-sezione generica è rappresentata sul piano da un sistema lineare di quartiche con 7 punti base.

(4) Questa ∞^2 contiene infatti una rete omaloidica di rigate cubiche, generate dalle involuzioni di 2° ordine sulla C^4, e tutte irriducibili.

gine è sezione iperpiana di altra φ^9 di Del Pezzo; e di una seconda parte luogo delle corde incidenti alla retta $\tau\pi$. Quest'ultima rigata è di 4° ordine, avendo la retta $\tau\pi$ come direttrice semplice, e 3 generatrici in ogni S_4 per essa (poichè la proiezione della rigata dalla retta $\tau\pi$ ha una cubica doppia). Complessivamente la superficie immagine delle corde di R^4 appoggiate a un piano è dunque di ordine $9 + 4 = 13$ (5); e la M_4 immagine del sistema di tutte le corde di R^4 è di ordine $9 + 13 = 22$ (6). Le due superficie φ^9 e F^{13}, costituenti insieme una sezione superficiale della M_4^{22}, hanno a comune una curva sezione iperpiana della φ^9 (collo spazio σ), perciò ellittica, di ordine 9; la M_4^{22} ha quindi superficie–sezioni di genere uno, e curve–sezioni canoniche di genere 12 (appunto $= 1 + 3 + 9 - 1$). Le sezioni iperpiane della M_4^{22} sono pertanto M_3^{22} di S_{13}, corrispondenti al tipo generale M_3^{2p-2} di S_{p+3} per $p = 12$, e razionali (come risulterà pure dai sistemi lineari di superficie che vi sono contenuti). Indicheremo d'ora in poi questa varietà con μ_3^{22}, o semplicemente μ; essa è l'immagine del sistema ∞^3 di rette Σ intersezione della ∞^4 delle corde di R^4 con un complesso lineare $\mathbf{K}$ (che si supporrà per ora del tipo più generale, e in posizione generica rispetto a R^4).

2. Poichè per le ricerche della mia Memoria citata è importante la considerazione delle rigate contenute nella M_3^{2p-2}, vediamo quali rigate siano contenute in μ.

La varietà delle corde di R^4 contiene gli interi piani rigati delle sue ∞^1 coniche direttrici; e il complesso $\mathbf{K}$ sega questi secondo ∞^1 fasci di rette, aventi per immagini su μ le generatrici di una rigata. La M_3^3 di S_5 luogo di quegli ∞^1 piani ha come rigate direttrici minime ∞^2 quadriche; perciò sulla Grassmanniana delle rette di S_5 l'immagine di quegli ∞^1 piani rigati è anche una ∞^1 di piani, con ∞^2 coniche direttrici irriducibili, perciò una varietà del 6° ordine di S_8; e la ∞^1 di fasci suindicata – sistema ∞^2 di rette, che indicheremo con $\mathbf{R}$ – avrà per immagine una rigata razionale normale ρ^6 di S_7, con ∞^1 cubiche direttrici. Il sistema $\mathbf{R}$ deve avere a comune 6 rette con una coppia di complessi lineari, per esempio con due complessi aventi di nuovo spazi S_3 direttori contenuti in un $S_4 \equiv \sigma$ e intersecantisi in un piano π. Questo piano incontra la M_3^3 contenente R^4 in 3 punti, e perciò ad esso si appoggiano 3 rette di $\mathbf{R}$; le altre 3 staranno nello spazio σ, vale a dire la linea luogo dei centri degli ∞^1 fasci di rette contenuti in $\mathbf{R}$ sarà una cubica γ^3, direttrice della M_3^3.

(5) È una F^{13} di S_{11} a sezioni di genere 3, rappresentata sul piano da un sistema di quartiche con 3 punti base.

(6) A conferma di questo risultato, osserviamo che come una C^4 razionale normale può spezzarsi con continuità in 4 rette, di cui ciascuna, in ordine determinato, incidente alla consecutiva (F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, traduz. LÖFFLER, Teubner 1921; p. 366), così la R^4 può farsi spezzare in 4 piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, dei quali ciascuno dei primi 3 incontri il successivo in una retta. Il sistema delle corde di R^4 si spezza allora nei 6 sistemi delle rette incidenti a due di questi piani; dei quali sistemi tre ($\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4$) sono di ordine 2; due ($\alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_4$) di ordine 5; e $\alpha_1\alpha_4$ di ordine 6 (è una M_4^6 di C. SEGRE, rappresentante le coppie di punti di due piani). E $2.3 + 5.2 + 6 = 22$.

Altri fasci di rette contenuti nel sistema Σ, e per conseguenza rette e superficie rigate contenute in μ, possono provenire soltanto dalla proiezione dei punti di una generatrice di R^4 da un punto ulteriore di questa rigata (di che il fascio delle tangenti di R^4 in un suo punto è caso limite). Osserviamo inoltre che due generatrici qualunque di R^4 stanno in uno spazio S_3, e sono ivi direttrici di una congruenza lineare di corde, incontrata dal complesso $\mathbf{K}$ in una rigata quadrica, eventualmente spezzata in due fasci del tipo testè indicato. Per generatrici infinitamente vicine si ha una congruenza lineare speciale, luogo delle tangenti di R^4 nei punti di questa generatrice. Queste ∞^2 rigate quadriche contenute in Σ hanno per immagini su μ coniche di una congruenza di 1° ordine Γ; e tali coniche bisecano la rigata ρ^6, poichè ciascuna di quelle quadriche ha due generatrici nei piani della M_3^3 contenente R^4, generatrici appartenenti perciò al sistema $\mathbf{R}$. Di quelle quadriche, ∞^1 si spezzano in coppie di fasci, e indicheremo con $\mathbf{S}$ l'insieme di questi ∞^1 fasci; e ∞^1 coniche della congruenza Γ si spezzano in due rette. L'insieme di queste rette sarà l'unica rigata, in generale irriducibile, contenuta in μ, all'infuori di ρ^6.

3. Gli iperpiani dello spazio S_{13} di μ passanti per ρ^6 incontrano ulteriormente μ in un sistema lineare ∞^5 di superficie F^{16}, razionali, a sezioni di genere 5 e iperellittiche, tali F^{16} essendo luoghi di ∞^1 coniche della congruenza Γ. Ad esempio lo spazio S_3 congiungente due generatrici g, g' di R^4 è direttore di un complesso lineare che contiene sempre il sistema di rette $\mathbf{R}$; perciò l'intersezione ulteriore di questo complesso con Σ avrà anche per immagine una F^{16}. D'altra parte le rette di questo sistema ∞^2, corde di R^4 e non contenute generalmente nei piani delle sue coniche direttrici, non possono incontrare lo spazio gg' che in punti o di g o di g'; perciò questa F^{16} si spezzerà in due F^8, a sezioni di genere 2, pure appartenenti alla congruenza Γ. Queste F^8, in altri termini, sono immagini dei sistemi ∞^2 di rette contenuti in Σ e costituiti dalle rigate quadriche aventi per direttrici g, oppure g', e un'altra generatrice variabile di R^4, cioè le coppie di rette di un'involuzione parabolica su R^4. E, più generalmente, tutti i sistemi di ∞^1 rigate quadriche aventi per direttrici le coppie di generatrici di una qualsiasi involuzione su R^4 avranno per immagini superficie F^8 di spazi S_7 di una rete, incontranti ρ^6 in C^4 razionali normali, della quale rete $|F^{16}|$ è il sistema doppio.

Sopra ciascuna F^8, 4 fra le coniche della congruenza Γ si spezzano in coppie di rette; e da ciò si trae facilmente che la linea luogo dei centri dei fasci di rette contenuti nel sistema $\mathbf{S}$ deve incontrare in 4 punti sia le generatrici che le coniche di R^4; è quindi una linea di ordine 12, e di genere virtuale 9, ma con 4 punti doppi nelle intersezioni di R^4 collo spazio S_3 di γ^3 e quindi con questa stessa curva [7], perciò di genere effettivo 5. Invero lo spazio S_4 polare di un punto di R^4 rispetto al complesso $\mathbf{K}$ incontra R^4 in una C^4 passante per questo punto;

(7) Le rette direttrici della M_3^3 contenente R^4 che passano pei punti di γ^3 costituiscono un'altra rigata di 4° ordine, avente a comune con R^4 quattro generatrici, che passano appunto per le intersezioni di γ^3 e R^4.

e le rette del sistema Σ uscenti da tale punto hanno per luogo il cono cubico che proietta questa C^4. Per ciascuno dei 4 punti in parola questo cono cubico comprende il fascio di rette del sistema $\mathbf{R}$ che ne esce, e perciò altri 2 fasci proiettanti generatrici di R^4, contenuti nel sistema $\mathbf{S}$.

Gli ∞^1 fasci del sistema $\mathbf{S}$ hanno per immagini su μ le generatrici di una rigata ξ incontrante le F^8 e le F^{16} rispettivamente in 4 e 8 coniche riducibili; rigata perciò di ordine 32, appartenente al sistema lineare di superficie quadruplo di $|F^8|$ e doppio di $|F^{16}|$.

Sulla C^{12}, luogo dei centri dei fasci di rette contenuti nel sistema $\mathbf{S}$, le coppie di punti centri di fasci costituenti quadriche riducibili formano un'involuzione δ_2^1; e le congiungenti di queste coppie di punti coniugati, raggi doppi di quelle coppie di fasci, formano una rigata di 8° ordine. Fra le generatrici di R^4 quest'involuzione determina una corrispondenza $(4, 4)$ simmetrica, le cui 8 generatrici doppie sono le 4 generatrici di R^4 appartenenti al complesso $\mathbf{K}$, ciascuna contata due volte. Per ciascuna di queste generatrici la congruenza lineare speciale delle tangenti a R^4 nei singoli suoi punti è incontrata dal complesso $\mathbf{K}$ in una coppia di fasci del sistema $\mathbf{S}$, i cui centri X_1, X_2 sono coniugati nella δ_2^1. Gli S_4 polari dei punti di una di queste generatrici rispetto a $\mathbf{K}$ contengono tutti questa generatrice, e segano ulteriormente R^4 in cubiche, non passanti in generale per il punto considerato; tali cubiche formano un fascio con 2 punti base, e delle 4 generatrici che nella corrispondenza $(4, 4)$ corrispondono a quella considerata, due coincidono con questa, e le altre due passano pei due punti base suddetti. Sopra ciascuna delle stesse 4 generatrici i singoli punti corrispondono proiettivamente alle intersezioni colle cubiche segate dai relativi S_4 polari; punti uniti di questa corrispondenza sono X_1, X_2.

4. Sommando la rete $|F^8|$ e la rigata ρ^6, si ha un sistema lineare $|F^{14}|$, anche ∞^5 e a sezioni di genere 5, residuo a sua volta delle sezioni iperpiane di μ $(= \rho^6 + 2\,F^8)$ rispetto alla rete $|F^8|$. Il sistema lineare caratteristico di $|F^{14}|$ è pertanto la differenza fra il sistema delle sezioni iperpiane di una F^{14} e la rete ivi segata dalle F^8, composta di C_1^6, somme su F^8 delle coniche caratteristiche e della quartica $F^8 . \rho^6$; perciò di grado $14 + 2 - 2.6 = 4$. Il sistema $|F^{14}|$ è pertanto di grado 4, dimensione 5, a intersezioni ellittiche; riferibile perciò al sistema delle sezioni iperpiane di una M_3^4, intersezione di due quadriche di S_5, e al suo sistema rappresentativo su S_3, composto delle superficie di 3° ordine passanti per una C_2^5 (8).

Sommando ora alle sezioni iperpiane di μ $(= \rho^6 + 2\,F^8)$ una seconda volta la rigata ρ^6, si ha il sistema $|2\,(\rho^6 + F^8)|$, doppio del precedente $|F^{14}|$, riferibile perciò ai sistemi lineari doppi di quelli testè indicati. Esso rappresenta una M_3^{32}, ancora della serie M_3^{2p-2} di S_{p+1}, per $p = 17$, priva di rette (9), della quale μ è proiezione dallo spazio S_4 di una sua quartica razionale ε. I punti di ε hanno

(8) ENRIQUES, «Mathem. Ann.», *46*, p. 179 (1895); SCORZA, «Ann. di Matem.» (3) vol. 15, p. 217 (1908).

(9) Varietà compresa, per $n = 4$, tra quelle considerate a p. 46 della mia Mem. cit.

per immagini le generatrici di ρ^6; per ciascuno di quei punti passano 4 coniche della M_3^{32} che si proiettano in generatrici della rigata ξ^{32} di μ. Alle 4 coniche di M_3^{32} passanti per un suo punto generico corrispondono nella rappresentazione su S_3 le 4 corde della C_2^5 per un punto. Anche per un punto di μ passano 4 coniche di questa, più quella della congruenza Γ, che è proiezione di una quartica bisecante la ε.

5. Il sistema ∞^3 di rette Σ e la varietà μ che ne è immagine dànno luogo a qualche caso particolare, degno di menzione.

Il complesso lineare **K** può contenere la rigata R^4. Allora per tutte le generatrici di questa si verificherà quanto è detto alla fine del n. 3 per le 4 generatrici di R^4 contenute in **K**; vale a dire dei 4 fasci di rette del sistema **S** aventi i centri su ogni generatrice, due si comporranno di tangenti a R^4 nel punto stesso considerato, e gli altri due di rette proiettanti generatrici generalmente distinte da quella. Pertanto la curva C^{12} del caso generale si spezzerà in due γ_1^6 bisecanti sia le generatrici che le coniche di R^4, e luoghi rispett. di questi due tipi di punti. I 4 punti comuni alla cubica γ^3 e alla rigata R^4, in generale doppi per la C^{12}, sono ora comuni alle due γ_1^6. Da ciascuno di essi esce, nel piano della conica direttrice di R^4, un fascio di rette del sistema **R**; e il cono cubico del sistema Σ si spezza perciò in questo fascio e altri due del sistema **S**, rispett. dei due tipi di cui sono luoghi dei centri le due γ_1^6. Il sistema di fasci **S** si spezza pertanto in due ∞^1, una delle quali si compone di fasci di tangenti di R^4; la rigata ξ^{32} si spezza in due di ordine 16; e le ulteriori 4 intersezioni delle due γ_1^6 sono centri di altrettanti fasci **S** che, contati due volte, sono le coppie comuni alle due ∞^1. Invero, gli S_4 polari dei punti di una generatrice di R^4 contenente centri di questi fasci comuni dovranno segare ulteriormente R^4 in un fascio di cubiche coi 2 punti base tutti sulla generatrice stessa; e poichè tali cubiche sono direttrici di R^4, esse non potranno essere che tangenti fra loro in un punto.

Altro caso particolare interessante è quello in cui la cubica γ^3 sta sulla rigata R^4; e ciò può avvenire sia che il complesso **K** non contenga R^4, sia che la contenga. Invero, scelta la cubica γ^3 su R^4 e fissato così il sistema di rette **R**, per questo passano ∞^6 complessi lineari **K**, e ∞^1 fra questi contengono R^4. Il cono cubico di rette di Σ uscente da un punto di γ^3 si compone allora sempre (sia che **K** contenga o non contenga R^4) di un fascio del sistema **R** e di *due* fasci del sistema **S**; perciò la curva C^{12} del caso generale comprende la γ^3 contata due volte. Se la rigata R^4 non è contenuta nel complesso **K**, i due fasci del sistema **S** uscenti da un punto generico della cubica γ^3 proietteranno generatrici non passanti per questo punto; e la parte residua della C^{12}, oltre la γ^3 doppia, sarà una γ_1^6, generalmente irriducibile, che incontrerà γ^3 nei 4 punti di essa appartenenti alle generatrici di R^4 contenute in **K**, i quali saranno pure centri di fasci doppi comuni alle due ∞^1 in cui **S** si spezza. Le coppie dell'involuzione δ_2^1 appartenenti a γ^3 sono su di essa, come curva semplice, coppie di una corrispondenza $(2, 2)$ simmetrica. La rigata ξ^{32} contenuta in μ si spezza ancora in due di ordine 16. Se invece R^4 è contenuta nel complesso **K**, lo spazio S_4 polare di un punto generico di γ^3 rispetto a **K** incontra R^4 secondo la generatrice e la conica direttrice passanti per questo punto, più un'altra generatrice; e dei due fasci di rette del sistema **S** uscenti da questo punto, uno proietta quest'ultima generatrice, e l'altro si compone delle tangenti di R^4 in quel punto. Pertanto, con riferimento alla prima parte di questo numero e allo spezzamento della C^{12} luogo dei centri dei fasci del sistema **S** in due γ_1^6, la γ^3 doppia si compone ora di due curve sovrapposte, parti rispett. dell'una e dell'altra γ_1^6; e le parti residue di queste saranno altre due cubiche direttrici di R^4.