GINO FANO

Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche

Comment. Pont. Acad. Sci., Serie II, Vol. (1948), p. 635–720

Commentationes
Vol. XI ... N. 11

NUOVE RICERCHE SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI A CURVE-SEZIONI CANONICHE (*)

GINO FANO

SVMMARIVM. — Iuxta alia eiusdem Auctoris edita studia, determinantur systemata linearia simplicia completa superficium generis primi, quae existant in algebricis trium dimensionum varietatibus, quarum curvae-sectiones ad genera quintum, sextum, vel octavum pertineant: nam praeter hos casus, iam rationalitas vel irrationalitas varietatum cognita est.

Omnia haec systemata aequivalent sistemati sectionum yperplanarum earumdem varietatum, vel alius sectionum eiusdem generis; si vero sectiones sint generis octavi, systema aequivalet etiam systemati intersectionum formae cubicae generalis spatii quattuor dimensionum cum quadricis.

Ex quo constat omnes huiusmodi varietates esse irrationales, illa forma cubica non excepta, de qua questio iam quinquaginta abhinc annis nota est geometriae algebricae studiosis.

INTRODUZIONE

Nella presente Memoria continuo le mie ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche di genere $p(M_3^{2p-2}$ dello spazio $S_{p+1})$, in particolare pei casi di tuttora dubbia razionalità, $p = 5, 6, 8$.

Fino dal 1908 ho dimostrata la irrazionalità delle due varietà generali M_3^4 di S_4 e M_3^6 di S_5 (casi $p = 3, 4$; quest'ultima, intersezione generale di una quadrica e di una forma cubica) (1). Nel 1915 ne ho

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella Tornata del 21 febbraio 1943. La « Introduzione » venne già pubblicata negli « Acta » di questa Accademia, vol. IX, pag. 163-168.

(1) *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, « Atti R. Accademia di Torino », vol. 43 (1907-1908), pag. 973.

data un'altra dimostrazione più semplice, e ho stabilito altresì che le due dette varietà sono birazionalmente distinte (1). Un contributo indiretto all'argomento ho portato con un'altra Memoria dello stesso anno (2), mostrando che è razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni contenente un sistema lineare semplice di superficie razionali di grado superiore a tre; e che per conseguenza la forma cubica generale di S_4, le cui intersezioni con quadriche formano un sistema rappresentante una M_3^{24} di S_{14} (caso $p=13$), se non è razionale, non contiene altri sistemi lineari semplici di superficie razionali che di grado 3.

Riprese queste ricerche attorno al 1925, ne ho fatta una comunicazione preliminare al Congresso Internazionale dei matematici a Bologna del 1928 (3). Poco dopo, trattando una questione di geometria della retta dello spazio a cinque dimensioni, ho riconosciuto che la varietà M_3^{14} di S_9 ($p=8$), sezione generica della Grassmanniana delle rette di S_5 (4), è birazionalmente identica alla forma cubica generale di S_4, cioè alla M_3^{24} di S_{14} già menzionata ($p=13$) (5).

Un nuovo gruppo di ricerche è contenuto in due Memorie pubblicate negli anni 1936-37 (6). Nella prima ho studiato i casi p = 5, 6, 7,

---

(1) *Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli*, « Atti R. Accademia di Torino », vol. 50 (1914-1915), pag. 1067.

(2) *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali*, « Annali di Matematica » (3), vol. 24 (1915), pag. 49. Vedi anche: « Scritti matematici offerti a ENRICO D'OVIDIO » (Torino, Bocca, 1918), pag. 342.

(3) *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, « Atti Congr. internaz. di matematica », Bologna, vol. IV (1931), pag. 115.

(4) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare*, « Annali di Matematica » (3), vol. 24, (1915), pag. 89.

(5) *Sulle sezioni spaziali della varietà Grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, « Rend. R. Accademia Lincei », (6), vol. 11 (1° sem. 1930), pag. 329. Le due varietà suindicate (M_{14}^3 di S_9, V_3^3 di S_4) sono prive di punti multipli, e contengono soltanto superficie loro intersezioni complete con forme; su ciascuna di esse vi è un'unica curva fondamentale di prima specie, di genere uno.

(6) *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve-sezioni canoniche*, Scritti Matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, Pavia, Tip. Rossetti, 1936, pag. 329. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, « Mem. R. Accademia d'Italia », vol. VIII (1937), n. 2. Queste due Memorie, ripetutamente citate in seguito, verranno indicate rispettivamente con « Berz. » e « Accad. It. »; i risultati principali della seconda erano già stati enunciati in una Nota dei

sopratutto per quanto concerne i loro caratteri proiettivi. Nella seconda ho dimostrato che le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} esistono soltanto per $p \leqslant 37$, mentre si poteva pensare che la loro serie fosse illimitata, come per le superficie a curve-sezioni canoniche (¹); e per $p > 10$ sono tutte razionali, all'infuori forse della M_3^{24} di S_{14} $(p = 13)$. Ultimamente ho ancora dimostrato che queste varietà, se contenenti solo superficie loro intersezioni complete con forme, sono pure razionali nei due casi $p = 9,10$ (²); e pertanto, la razionalità essendo già stata accertata nella stessa ipotesi per $p = 7$ in «Berz», n. 5, 6, 11, restava dubbia soltanto quella dei casi $p = 5, 6, 8$ (³).

In questa Memoria viene esaurita la ricerca pei tre casi suddetti, e stabilito che le M_3^{2p-2} di S_{p+1} per $p = 5, 6, 8$ contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme *non* sono razionali, e sono anche fra loro birazionalmente distinte. E poichè la M_3^{14} di S_9 $(p = 8)$ è birazionalmente equivalente alla forma cubica generale (cioè priva di punti doppi) di S_4 (⁴), risulta anche accertata la irrazionalità di questa forma cubica; questione che si era affacciata nella geometria algebrica circa da mezzo secolo. La ricerca è fondata essenzialmente sulla determinazione dei sistemi lineari di superficie di generi uno contenuti nelle varietà suddette; sulle proprietà di questi sistemi, se segati da forme di ordine $n > 1$, di avere una linea di multiplicità $\geqslant n + 1$ o un punto isolato di multiplicità $\geqslant 2n + 1$ (⁵); su procedimenti di riduzione successiva di tali sistemi a altri, segati sulla stessa varietà o su una birazionalmente equivalente da forme di ordine inferiore; sulla constatazione infine che questi sistemi si riducono a quelli segati sulle stesse M_3^{2p-2} o su altre del medesimo tipo dagli iperpiani, e per $p=8$ sulla V_3^3 di S_4 dalle quadriche, e sono quindi nei vari casi differenti fra loro e da quelli contenuti nello spazio S_3.

«Rend. R. Accademia Lincei» (6), vol. 23 (1° sem. 1936), pag. 813. Una comunicazione ne è stata fatta anche al 1° Congresso dell'«Unione Matematica Italiana» (Firenze, 1937; Atti relativi, pag. 245).

(¹) Enriques, «Rend. R. Accademia Bologna», vol. 13 (1908), pag. 25; Severi, «Atti R. Ist. Veneto»(7), vol. 68 (1908) pag. 256.

(²) *Su alcune varietà a tre dimensioni razionali e aventi curve-sezioni canoniche*, «Comm. Mathem. Helvetici», vol. 14 (1941-1942), pag. 203.

(³) Cfr. le ultime righe della mia Nota ultima cit.

(⁴) Cfr. il mio lavoro già cit. dei «Rend. Acc. Lincei», 1930.

(⁵) Cfr. la mia Nota cit. «*Osservazioni* . . .», pag. 1.

In massima, quando si conosca sulla M_3^{2p-2} una trasformazione birazionale che muti le sezioni iperpiane in superficie segate da forme di ordine k e aventi una linea C di multiplicità $k+1$, la trasformazione inversa (che, se la prima è involutoria, coinciderà con questa) basterà per ottenere una prima riduzione per i sistemi Σ di superficie segati da forme di un ordine qualsiasi n e aventi lungo C multiplicità $\geqslant n+1$ [1]. E più generalmente, quando si conosca comunque sulla M_3^{2p-2} un sistema lineare di superficie, anche segato da forme di ordine k e colla C di multiplicità $\geqslant k+1$, il quale rappresenti una varietà μ avente gli stessi caratteri proiettivi della M_3^{2p-2}, al sistema Σ su M_3^{2p-2} e ivi segnato da forme di ordine n carrisponderà su μ un sistema di ordine inferiore (cfr. ad es. i numeri 21, 22, 25, 26).

Per le trasformazioni birazionali incontrate sulle diverse M_3^{2p-2} non è emersa alcuna indicazione su quelle che potrebbero essere le operazioni generatrici del relativo gruppo [2]. Credo tuttavia opportuno segnalare due tipi di corrispondenze di cui ho fatto uso di frequente: 1) ogni qualvolta una varietà contiene una congruenza del primo ordine di curve razionali, sono semplici e importanti le corrispondenze involutorie che ho chiamate « specchiamenti » rispetto a una superficie Ω bisecante di tali curve, e nelle quali a ogni punto di una di queste curve viene associato il punto della stessa curva suo coniugato armonico rispetto alle due intersezioni di questa con Ω. Congruenze così fatte esistono per $p=5, 8$; mentre non ne ho incontrate (e forse non esistono nemmeno) sulla M_3^{10} di $S_7 (p=6)$; 2) le corrispondenze che si ottengono quando sia nota una congruenza del primo ordine di curve ellittiche, su ciascuna delle quali si possa individuare una corrispondenza birazionale, involutoria o no. Se per esempio su ciascuna di queste curve sono razionalmente noti due gruppi di uno stesso numero di punti non equivalenti, si può applicare un procedimento usato da ENRIQUES per le superficie contenenti

(1) I casi di superficie con punto isolato di multiplicità $\geq 2n+1$ saranno pochissimi e semplici.

(2) Gruppo che si compone in generale di più schiere continue, nessuna delle quali è però un gruppo continuo nel senso di S. LIE. Cfr. la mia Nota nei « Rend. Accad. Lincei » (6), vol. 15 (1° sem. 1932), pag. 3.

un fascio di curve ellittiche [1]. Il più delle volte si incontreranno anche, sulle singole curve, trasformazioni di prima specie, perciò involutorie, cioè serie lineari g_2^1, definite mediante un loro punto doppio, razionalmente noto. Trasformazioni più semplici ancora sono quelle che risultano dalla proiezione di una M_3^{2p-2}, per $p>3$, da un conveniente S_{p-3} in un S_3 doppio.

Contrariamente a quanto forse si poteva pensare, per una M_3^{2p-2} di S_{p+1} il fatto di contenere soltanto superficie intersezioni complete con forme tende piuttosto a facilitarne, per così dire, la razionalità. Per esempio per $p=7$ la M_3^{12} di S_8 contenente soltanto superficie intersezioni complete è razionale [2], mentre esistono altre M_3^{12} di S_8 irrazionali e contenenti superficie non del tipo indicato [3]. E mentre le M_3^{2p-2} di S_{p+1} contenenti soltanto superficie intersezioni complete sono tutte razionali per $p \geqslant 9$, ne esistono per $p=9$ e $p=13$, anche altre non razionali, sulle quali il sistema delle sezioni iperpiane è doppio del sistema lineare di superficie di ordine minimo [4].

Lausanne (Svizzera), ottobre 1942.

---

(1) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, «Rend. R. Accademia Lincei» (5), vol. 15 (2° sem. 1906), pag. 665.

(2) Cfr. «Berz.», n. 11; nonchè la mia Nota cit. dei «Comm. Mathem. Helv.», vol. 14, n. 2-4.

(3) «Berz.», n. 12-13.

(4) Questa Memoria, frutto di ricerche compiute negli ultimi tre anni, potrà essere, in alcuni punti, perfezionata e semplificata; ma ritengo possa già essere anche per altri utile guida a ulteriori e più approfondite ricerche. Così dicasi di qualche nota a piè di pagina, non avente diretta attinenza coll'argomento principale della Memoria. Altre note contengono verifiche e conferme.

ALCUNE CONSIDERAZIONI GENERALI SULLE VARIETÀ M_3^{2p-2} A CURVE-SEZIONI CANONICHE E SUI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE DI GENERI UNO IN ESSE CONTENUTI.

1. – Ci riferiamo a varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche (dunque del tipo M_3^{2p-2} dello spazio S_{p+1}, essendo p il genere delle curve-sezioni), senza punti multipli, e contenenti solamente superficie loro intersezioni complete con forme (o ipersuperficie) dello spazio S_{p+1}, salvo per quelle varietà (come apparirà chiaro volta per volta) che otterremo come proiezioni di altre dello stesso tipo corrispondenti ad un valore superiore di p. Tali proiezioni portano appunto all'introduzione di punti doppi e di ulteriori superficie, immagini delle linee o dei punti da cui si è fatta la proiezione. Queste M^{2p-2} hanno tutti i generi nulli, e le loro sezioni iperpiane sono superficie regolari di generi uno. Più particolarmente, ci proponiamo di determinare in queste varietà tutti gli eventuali sistemi lineari di superficie di generi uno, completi (cioè non contenuti in altri consimili di dimensione superiore), segati da forme di ordine $n > 1$, i quali conducono a rappresentare la data varietà M sopra un'altra μ del medesimo tipo, per un valore di p sia diverso che eguale al precedente. Ci interessano in modo speciale i tre casi $p = 5, 6, 8$, nei quali è tuttora dubbia la razionalità o meno della Varietà M (1). Se una di queste fosse razionale, dovrebbero esistere su di essa sistemi lineari di superficie di generi uno rappresentativi di varietà μ del tipo indicato pei valori $p = 7, 9, 10$, pei quali la razionalità già venne riconosciuta (2). Poichè questo non si verificherà, potremo concluderne la irrazionalità della M^{2p-2} di S_{p+1} per $p = 5, 6, 8$.

Alle sezioni iperpiane f, φ delle varietà M, μ corrisponderanno in μ, rispett. M superficie Φ, F segate da forme di ordini n, m, aventi

(1) Vedi le ultime righe della mia Nota cit. nei «Comm. Math. Helvetici», vol. 14 (1941-42), pag. 203. Designando sempre con M, μ varietà a tre dimensioni' sopprimeremo l'indice 3, limitandoci, quando sia opportuno, a indicarne con un indice superiore l'ordine.

(2) Vedi «Berz». n. 5, 6; nonchè la mia Nota cit. dei «Comm. Math. Helv.», vol. 14, pag. 203.

a comune punti e linee, fondamentali per la corrispondenza, e che supporremo tutti isolati; non mai cioè due fra essi infinitamente vicini [1]. A un punto fondamentale isolato corrisponderà nell'altra varietà una superficie razionale (comunemente detta anche « fondamentale »). A ogni punto di una linea fondamentale (l, λ) i^{pla}, cioè multipla di ordine i per le F, Φ [2], corrisponderà una linea razionale di ordine $i\,(\gamma, c)$; e al variare di quel punto sulla l, λ questa linea varierà generalmente, descrivendo una superficie Λ, L (anche « fondamentale ») riferibile ad una rigata di genere eguale a quello della linea l, λ e di cui le γ, c (anche se non rette) si diranno « generatrici ». Potrà però avvenire che al variare del punto considerato sulla l, λ la linea corrispondente rimanga fissa; e ciò quando la stessa l, λ non sia incontrata dalla intersezione variabile di due superficie F, Φ in punti anche variabili. La linea fondamentale di l, λ si dirà nei due casi rispett. di *1ª specie* (o ordinaria) e di *2ª specie* (o straordinaria). Nel primo caso possiamo supporre $i \geqq 2$; se no il sistema $|F|$, risp. $|\Phi|$, avendo una linea base fondamentale di 1ª specie semplice, sarebbe ampliabile (colla soppressione di questa linea) pur rimanendo la sua superficie di generi uno, e perciò la varietà M da esso rappresentata sarebbe proiezione di altra del medesimo tipo. E il numero delle intersezioni variabili della l, λ colla linea comune a due F o Φ è l'ordine della superficie Λ, L. Due linee fondamentali di 2ª specie corrispondenti sono entrambe razionali e in corrispondenza degenere; a ogni punto dell'una corrisponde l'altra per intero. Se la prima è di ordine k e i^{pla} per le F la seconda è di ordine i e k^{pla} per le Φ; può tuttavia ridursi a una linea di ordine $\frac{i}{i'}$ (essendo i' divisore di i) e di multiplicità $i'\,k$ per

---

[1] La corrispondenza fra M e μ sarà pertanto « regolare », secondo D. MONTESANO (« Atti R. Accad. di Napoli » (2), vol. 17 (1927), Mem. n. 8), e conforme anche alla mia Nota: *Osservazioni sulla rappresentazione* . . ., « Comm. Mathem. Helv. », vol. 14 (1941-42), pag. 193. In altri termini, i sistemi $|F|$, $|\Phi|$ non avranno alcun piano o cono tangente fisso, tranne che nei punti eventualmente comuni a due linee fondamentali.

[2] Volendo mettere in evidenza che una varietà M ha un punto P o una linea l di multiplicità $k, i, \ldots$ scriveremo $M(P^k)$, $M(l^i)$, $M(P^k\, l^i) \ldots$ Indicheremo con C_p^n, γ_p^n, $\delta_p^n \ldots$ curve di ordine n e genere p; con f^n, F^n, $\varphi^n, \ldots$ superficie di ordine n; con R^n, ρ^n superficie rigate.

le Φ [1]. Queste linee fondamentali di 2ª specie sono nelle varietà M, μ in egual numero (finito). Nel caso di una corrispondenza involutoria su una M, due linee corrispondenti così fatte possono essere distinte, e allora stanno entrambe sulle superficie che corrispondono in doppio modo alle sezioni iperpiane; ma possono anche coincidere, e allora sono rette semplici, o coniche doppie, ecc.

In ciascuna delle varietà M, μ le superficie corrispondenti ai punti fondamentali isolati e alle linee fondamentali di 1ª specie dell'altra, le prime contate due volte, formano complessivamente la superficie aggiunta unica del sistema $|F|, |\Phi|$ di generi uno: superficie eventualmente riducibile, e le cui componenti irriducibili chiameremo per brevità « aggiunte parziali ». Per l'aggiunta complessiva ogni linea fondamentale i^{pla} di $|F|, |\Phi|$ è $(i-1)^{\text{pla}}$ se di 1ª specie, i^{pla} se di 2ª specie. In ciascuna delle due varietà l'intersezione di due superficie fondamentali, all'infuori di eventuali generatrici comuni o parti di queste, è luogo di punti aventi due diversi e perciò infiniti corrispondenti; dunque una linea fondamentale.

Se in M ad es. una linea fondamentale di 1ª specie l e una superficie L si appartengono, anche gli elementi omologhi Λ e λ in μ si apparterranno. Se l è per L multipla di ordine x, sicchè per ogni suo punto passano x generatrici di L, le generatrici di Λ incontreranno λ in x punti. Se l è multipla di ordini $x_1, x_2, \ldots$ per singole aggiunte parziali di $|F|$ con $\Sigma x_k = i-1$, le generatrici di Λ si appoggeranno in $x_1, x_2, \ldots$ punti alle linee che corrispondono a queste aggiunte; con che per queste curve d'ordine i (e dipendenti in M da i parametri) un solo parametro rimane appunto disponibile. Se qualcuna fra le dette aggiunte parziali corrisponde ad un punto fondamentale isolato P, la relativa x va computata doppiamente nella somma anzidetta. Se

---

[1] Per corrispondenze birazionali fra due spazi S_3, Vedi L. CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio*; « Ann. di Matem. » (2) vol. 5 (1871), pag. 131; « Opere Matem. », vol. III (Milano 1917), pag. 218; n. 7, 9; D. MONTESANO, « Rend. R. Accad. Lincei (5), vol. 27_1 (1° sem. 1918), pag. 396, 438; vol. 30_2 (2° semestre 1921), pag. 447. Montesano rilevò per primo la possibilità di $i' > 1$. La corrispondenza tra due linee fondamentali di 2ª specie è una corrispondenza biunivoca fra gli elementi piani (piani tangenti) appartenenti ad esse, rispett. nelle varietà M, μ. Agli ∞^1 elementi appartenenti a un punto fisso dell'una corrispondono elementi passanti pei singoli punti dell'altra; a superficie aventi a co-

una linea fondamentale di 2ª specie ω è x^{pla} per una L, la linea corrispondente ω' si appoggerà a λ in x punti. Una aggiunta parziale può non contenere una linea ω, e la ω' non si appoggerà alla corrispondente λ o non passerà pel punto P. Ma un'aggiunta parziale non può incontrare una ω fuori degli elementi base del sistema $|F|$, perchè a questa intersezione dovrebbe corrispondere l'intera ω, e non un punto unico, isolato o di una linea fondamentale.

2. - Sulla varietà M ad es. il sistema lineare $|F|$ corrispondente alle sezioni iperpiane φ di μ, essendo costituito da superficie di generi uno, mancherà di tutti i successivi aggiunti, tranne il primo. Supposto ch'esso venga segato da forme di ordine n (>1), dovrà quindi avere o un punto isolato P di multiplicità $\geqslant 2n+1$, oppure una linea base (fondamentale) l di multiplicità $\geqslant n+1$; poichè in caso contrario per il sistema n^{simo} aggiunto, di ordine zero, mancherebbe ogni condizione [1]. Il primo caso, del punto di multiplicità $\geqslant 2n+1$, potrà presentarsi tuttavia solo quando il genere delle superficie segate sulla M^{2p-2} da una forma generica di ordine n, e che si calcola facilmente essere $=\frac{1}{6}\{n(n-1)(2n-1)p-(n-3)(n+2)(2n-1\}$ [2], sia superiore alla riduzione portata da un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ ordinario, cioè $\binom{2n+1}{3}$; il che non può avvenire mai per $p=5$ (non dunque per la M^8 di S_6), e per $p=6$ (M^{10} di S_7) solo se $n\geqslant 7$. Il sistema $|F|$ conterrà di conseguenza

mune x punti coll'una, superficie aventi l'altra come linea x^{pla}, e tangenti fra loro lungo una o più falde quando la prima superficie varia restando fissi uno o più dei detti x punti; a curve incontranti l'una (cioè aventi a comune con essa uno degli ∞^2 elementi piani), curve incontranti l'altra. Un esempio molto semplice di linee fondamentali di 2ª specie è dato, nella proiezione doppia di una forma cubica V^3 di S_4 da un suo punto P, dalle rette r di V^3 passanti per questo punto. In ognuna di queste rette si corrispondono i due elementi piani comuni a r e a una stessa conica contenuta in un piano passante per questa retta; e agli ∞^1 elementi passanti per r in un suo punto fisso R, gli elementi ulteriori, appartenenti a r ma in generale non al punto R, delle ∞^1 coniche passanti per R e contenute in piani per r; coniche tutte contenute nella superficie cubica con R doppio, intersezione di V^3 collo spazio S_3 ad essa tangente in R.

(1) Vedi la mia Nota cit. *Osservazioni sopra alcune varietà* . . . « Atti R. Accadem. Torino », vol. 50 (1914-15), pag. 1067.

(2) In forma un po' diversa, vedi anche L. Roth, « London M. S. Proceed. » (2), vol. 44, (1938), pag. 37.

nel caso di un punto P almeno $(2n+1)^{\text{plo}}$ tutte le coniche di M - e ve ne saranno certamente - passanti per P; e nel caso di una linea l almeno $(n+1)^{\text{pla}}$ tutte le rette di M appoggiate a questa; e tali coniche e rette saranno linee fondamentali di 2ª specie. Ciò appare dal fatto che, proiettando M dallo spazio S_3 ad essa tangente in P, o dallo spazio della linea l (il che risulterà generalmente possibile), quelle coniche o rette hanno per immagini punti doppi della varietà proiezione; e le superficie proiezioni delle F passano bensì per questi punti, ma nou vi passano le linee loro intersezioni variabili (¹). Più generalmente, se le F hanno in P la multiplicità $2n+i$, esse avranno le coniche passanti per P come linee i^{ple}, e le eventuali linee di ordine pari $2k$ con P multiplo di ordine k come linee $(i\cdot k)^{\text{ple}}$. Analogamente, se le F hanno una linea l come multipla di ordine $n+i$, avranno le rette appoggiate a l come i^{ple} e le eventuali coniche bisecanti, cubiche trisecanti l, ecc; come linee $(2i)^{\text{ple}}$, $(3i)^{\text{ple}}$ ecc. (²).

Quanto alle linee **C** che possono avere per le F multiplicità $>n$, valgono le osservazioni seguenti:

1). Sulla varietà M^{2p-2} di S_{p+1} questa linea **C** deve appartenere in ogni caso a uno spazio di dimensione $\leqq p-2$. Invero, supposto che appartenga a un S_{p-1}, per questo spazio passeranno ∞^1 iperpiani, i quali segheranno M secondo un fascio di f^{2p-2}. Su ciascuna di queste superficie la linea residua di **C** rispetto alle sezioni iperpiane sarà una curva fissa **D**, e la residua di **C** contata n volte rispetto alle intersezioni con forme di ordine n sarà questa stessa **D** contata pure n volte. Non è dunque possibile che una $F^{(2p-2)n}$ abbia la **C**, che è di ordine $\geqq p-1$,

---

(¹) Così p. es. la M^8 di S_6 si proietta da una sua retta (cfr. «Berz.» n. 3) in una M^4 di S_4 contenente una congruenza del 1º ordine di coniche, e una rete di superficie φ^5 (a sezioni di genere 2) appartenente a tale congruenza. Queste φ^5 (superficie razionali, ma ciò è qui inessenziale) sono proiezioni di $f^{2\cdot 8}$ (r^3) di M^8, contenenti le 17 rette di M^8 appoggiate a r; contengono i 17 punti doppi di M^4 immagini di queste rette, e s'incontrano a due a due secondo coniche della detta congruenza, che non passano in generale per quei punti. E analogamente per le proiezioni di tutte le f^{8n} (r^{n+i}) $(i>0)$.

(²) In due superficie in corrispondenza birazionale, se Γ_1 e Γ_2 sono i sistemi delle loro sezioni iperpiane e Γ'_1 e Γ'_2 gli aggiunti di questi, i sistemi differenze $\Gamma_1-\Gamma'_1$, $\Gamma_2-\Gamma'_2$, effettivi o virtuali, si corrispondono a meno di linee fondamentali; e si corrispondono esattamente se a ciascuno di essi si impongono come punti basi quei punti che corrispondono a linee fondamentali dell'altra superficie. Sulla superficie a sezioni di genere uno questi sistemi lineari differenze sono le come multipla di ordine $> n$, se non quando la **D**, di ordine $\leq p-1$, coincida colla **C** stessa; vale a dire l'S_{p-1} considerato sia tangente a M^{2p-2} lungo una curva di ordine $p-1$; il che non può verificarsi per una M^{2p-2} generale. Se poi la **C** appartenesse a uno spazio superiore, si potrebbe farla spezzare per continuità in due linee, una delle quali appartenente a S_{p-1}; giungendo alla stessa conclusione.

2). Sulle M^{2p-2} di S_{p+1} per $p \leq 8$ (i soli casi che qui ci interessano) le curve parzialmente contenute nel sistema delle curve-sezioni canoniche C_p^{2p-2} di S_{p-1}, quali appunto le **C** di cui ora trattasi, se prive di punti multipli, sono tutte curve normali, non speciali (C_π^{n} di $S_{\mathrm{n}+\pi}$). L'eccezione indicata al n. 3 della mia Memoria « Acc. It. » (curve le cui residue sono composte di un numero > 1 di curve ellittiche di un fascio) non si presenta per questi valori più piccoli di p.

3) Se la curva **C** appartiene a uno spazio S_{p-2}, è dunque una $C_\pi^{p-2+\pi}$ normale non speciale, per essa passano, in S_{p+1}, ∞^2 spazi S_{p-1}, che incontrano ulteriormente M secondo $C_1^{p-\pi}$ aventi colla prima $p-\pi$ punti comuni (numero eguale all'ordine di quest'ultima curva; d'altronde il primitivo S_{p-2} è, entro ciascuno di questi S_{p-1}, un iperpiano). In tal caso, se la **C** è priva di punti di multiplicità superiore a 2 e costituisce la completa intersezione della M^{2p-2} col suo spazio S_{p-2}, una $F^{n(2p-2)}$ contenuta in M^{2p-2} e avente la **C** come linea $(n+1)^{\mathrm{pla}}$ avrebbe già sopra questa colle $C_1^{p-\pi}$ anzidette almeno $(n+1)(p-\pi)$ intersezioni, e conterrebbe perciò per intero queste ultime curve. L'ipotesi fatta è pertanto inammissibile.

Quest'ultima conclusione soffre tuttavia eccezione:

a) quando la curva $C^{p-2+\pi}$ multipla di ordine $> n$ per le F non è l'intersezione completa del suo spazio S_{p-2} colla M^{2p-2}, e perciò le curve residue suindicate sono riducibili e comprendono una parte fissa contenuta nel detto S_{p-2}. L'esempio più semplice è dato da un S_{p-2}

---

stesse sezioni iperpiane. Così in due varietà M, μ a superficie sezioni di generi uno in corrispondenza birazionale si corrispondono gli analoghi sistemi di superficie $\Gamma_1 - \Gamma'_1$, $\Gamma_2 - \Gamma'_2$, effettivi o virtuali, passanti doppiamente per i punti fondamentali isolati e semplicemente per le linee fondamentali di 1ª specie (escluse quelle di 2ª specie, le quali hanno per le F risp. Φ e loro aggiunte la stessa multiplicità). Un esempio relativo alla M_3^{14} di S_9 e alla forma cubica generale di S_4 è dato nella nota [4] del mio lavoro: *Osservazioni sulla rappresentazione* . . ., « Comm. Mathem. Helv. », vol. 14 (1941-42) p. 193.

incontrante la M^{2p-2} secondo una C_1^{p-1} composta di una C^{p-2} razionale normale e di una corda di questa; nel qual caso le $F^{n(2p-2)}$ aventi la C^{p-2} come multipla di un ordine $> n$ passano di conseguenza anche per detta corda, ma con multiplicità minore; e cade perciò la conclusione indicata (1)

b) Quando la curva C abbia un punto multiplo di ordine $\geqq 3$ (2), tale cioè che, oltre a ridurne il genere effettivo, esso influisca sul numero delle sue intersezioni colle curve residue $C_1^{p-\pi}$. Per $p=5$ questo caso non può presentarsi. L'esempio più semplice si ha per $p=6$, cioè sulla M^{10} di S_7. Questa varietà dagli spazi S_5 passanti per l'S_4 di una sua C_2^6 è incontrata ulteriormente in curve C_1^4 aventi 4 punti comuni colla C_2^6. Ma la C_2^6 può avere un punto triplo (diventando allora di genere effettivo zero), quando la rigata cubica che la contiene, determinata in generale dalle coppie di punti della sua serie g_2^1, è un cono, e la curva passa pel vertice di questo cono (cfr. n. 19,20). Allora le C_1^4 residue passano tutte semplicemente per il punto triplo della C_2^6, e incontrano questa soltanto in 2 altri punti; sicchè la conclusione suindicata non è più possibile.

A queste due eccezioni *a*) e *b*) si applicano le considerazioni del n. 3.

4). Consideriamo ora sulla M^{2p-2} una linea appartenente a uno spazio S_{p-3}, dunque una $C_\pi^{p-3+\pi} \equiv \gamma$. Gli spazi S_{p-1} passanti per l'S_{p-3} incontrano ulteriormente la M^{2p-2} secondo curve $C_2^{p+1-\pi}$, aventi a comune colla prima $p-1-\pi$ punti; e gli spazi S_{p-2} per lo stesso S_{p-3} vi segano coppie di punti di un'involuzione I_2, le quali sono altresì coppie delle g_2^1 sulle singole $C_2^{p+1-\pi}$ anzidette. Da quello spazio S_{p-3} la M^{2p-2} è proiettata in uno spazio S_3 doppio con superficie di diramazione del 6° ordine; e l'involuzione I_2 e le $C_2^{p+1-\pi}$ nei punti e nelle

(1) Un altro esempio interessante si ha sulla M^8 di S_6 $(p=5)$. Uno spazio S_3 può incontrare la M^8 in una coppia di rette sghembe, e non altrimenti, dunque una C_{-1}^2; gli spazi S_4 passanti per questo S_3 segano ulteriormente la M^8 secondo sestiche di genere uno, trisecanti entrambe quelle rette; e queste rette non possono pertanto avere entrambe per un sistema $|F^{8n}|$ multiplicità $> n$. Ma la conclusione cade (cfr. n. 16) se il detto S_3 ha a comune colla M^8 anche una terza retta incidente alle due prime; le sestiche suddette si spezzano allora in quest'ultima retta come parte fissa, e in quintiche che hanno a comune un punto con questa stessa ultima retta, e soltanto due punti con ciascuna delle due prime.

(2) Un punto semplicemente doppio non avrebbe alcuna influenza.

rette doppie di questo S_3. Nella $\mathbf{I}_2$, alle superficie f^{2p-2} sezioni iperpiane di M^{2p-2} corrispondono superficie segate da forme di ordine $p-\pi$, aventi la curva γ come multipla di ordine $p-\pi+1$; e la γ ha per immagine la superficie aggiunta delle precedenti, luogo delle curve di ordine $p-\pi+1$ immagini dei singoli punti di γ (1).

La corrispondenza birazionale determinata dalla $\mathbf{I}_2$ è pertanto rappresentata, nel senso di cui a una mia Nota già cit. (2), dalle equazioni:

$$f' = (p-\pi)\, f - (p-\pi+1)\, \gamma$$
$$\gamma' = (p-\pi-1)\, f - (p-\pi)\, \gamma$$

(invertibili col semplice scambio delle f, γ con apice e senza). E una superficie segata da una forma di ordine n avente γ come multipla di ordine k, che può dunque indicarsi con $nf - k\gamma$, si muta in

$$\{(n-k)(p-\pi-1)+n\}\, f - \{(n-k)(p-\pi)+n\}\, \gamma;$$

con che, poichè $p > \pi + 1$, ogni qualvolta sia $k > n$ le superficie corrispondenti alle sezioni iperpiane verranno segate da forme di ordine inferiore a n, e avranno lungo γ multiplicità inferiore a quest'ordine.

Per le superficie $F^{n(2p-2)}$ possiamo dunque supporre che la curva **C** di multiplicità $> n$ appartenga a uno spazio di dimensione $< p-3$; salvo le eccezioni *a*) e *b*) all'ipotesi 3), ancora da esaminare.

3. - La varietà M, dagli spazi S_{p-1} passanti per l'S_{p-2} di una sua curva $C_\pi^{p-2+\pi}$, anche riducibile, è incontrata ulteriormente secondo curve $C_1^{p-\pi}$ di una congruenza del 1° ordine, che hanno colla precedente $p-\pi$ punti comuni, costituenti sezioni iperpiane delle stesse $C_1^{p-\pi}$. Nei casi *a*) e *b*) del n. prec. questo gruppo di punti su ogni singola $C_1^{p-\pi}$ risulta composto di due o più gruppi minori, in generale non equivalenti e privi di multipli equivalenti, che consentono pertanto di

(1) Le f^{2p-2} sono proiettate dallo spazio S_{p-3} della curva γ secondo un S_{p-3}-cono (luogo di ∞^2 spazi S_{p-2}, e quindi varietà di dimensione p) di ordine $(2p-2)-(p-3+\pi) = p+1-\pi$; e questo sega a sua volta la M^{2p-2}, fuori della f^{2p-2} iniziale, in una superficie sua intersezione completa con una forma di ordine $p-\pi$.

(2) « Comm. Math. Helv. », vol. 14 (1941-42), pag. 193.

definire una trasformazione birazionale sulla $C_1^{p-\pi}$, e per conseguenza sull'intera varietà M (1); eventualmente anche, le prime e quest'ultima, involutorie. Più particolarmente, se la $C_\pi^{p-2+\pi}$ si spezza in una curva di ordine $p-3+\pi$ e genere $\pi-1$ e una sua corda, oppure di ordine $p-4+\pi$ e genere $\pi-2$ e una conica trisecante (2), ovvero ha (come indicato per la C_2^6 al n. prec.) un punto triplo, sulle singole $C_1^{p-\pi}$ è razionalmente noto il punto K comune ad esse e alla corda o conica anzidetta, o che cade nel punto triplo della **C**. Allora, e più generalmente ogni qualvolta su ogni $C_1^{p-\pi}$ sia razionalmente noto un punto K, risulta individuata su quest'ultima curva la g_2^1 avente K come punto doppio; e definita sulla varietà M, per conseguenza, una trasformazione birazionale involutoria **I**, priva di punti fondamentali isolati, e avente come sola linea fondamentale di 1ª specie la **C** o la sua residua, che indicheremo ancora con **C**, rispetto alla componente che contiene K (3). La **I** muterà le sezioni iperpiane f^{2p-2} di M in superficie F segate da forme di un ordine x, e aventi la **C** multipla di un ordine $x+i\ (i>0)$; mentre alla **C** stessa corrisponderà una superficie, unica aggiunta delle precedenti, perciò segata da una forma di ordine $x-1$, e colla **C** multipla di ordine $x+i-1$ (la quale d'altronde, sommata alle f^{2p-2} per **C**, deve dare superficie del sistema $|F|$). D'altra parte

(1) Analogamente a quanto ha mostrato Enriques per le superficie contenenti un fascio di curve ellittiche: «Rend. R. Accademia Lincei» (5) vol. 15_2 (2°sem. 1906), pag. 665.

(2) È escluso che la corda sia una trisecante, non potendo la varietà M nelle attuati ipotesi avere trisecanti; e così pure che la conica trisecante sia una quadrisecante; perchè la $C_1^{p-\pi}$ non incontrerebbe questa conica, e avrebbe $p-\pi$ intersezioni colla **C** residua, rientrando così nel caso generale del n. 2, 3).

(3) La retta o conica di cui sopra è per la **I** linea fondamentale di 2ª specie. Lo spazio S_{p-2} della $C^{p-2+\pi}$ complessiva, insieme eollo spazio S_3 tangente a M in un punto P della sua componente retta o conica determina un S_p che sega M in una f^{2p-2} con P doppio, contenente le ∞^1 $C_1^{p-\pi}$ della congruenza passanti per P. Questa f^{2p-2} contiene pure la retta o conica suaccennata; e la $C_1^{p-\pi}$ della congrnenza passante per un punto qualunque di tale linea distinto da P contiene la linea stessa come parte. La componente residua è luogo di coppie della **I**; mentre la retta o conica è linea fondamentale di 2ª specie, corrispondente per intero a ogni singolo suo punto. Se dalla $C^{p-2+\pi}$ si distaccassero due o più corde o coniche trisecanti, ciascuna incontrata dalla $C_1^{p-\pi}$ in un punto, risulterebbe individuata egualmente su ogni $C_1^{p-\pi}$ la g_2^1 che ha come punto doppio l'intersezione con una determinata di queste linee, e la parte residua della $C^{p-2+\pi}$, anche se riducibile, potrebbe considerarsi per l'attuale questione come una linea unica.

la **I** è involutoria, e applicata pertanto alle $F = f^{(2p-2)x}(\mathbf{C}^{(x+i)})$ suddette deve riprodurre le f^{2p-2}; si ha quindi fra gli ordini di queste superficie la relazione:

$$x \cdot (2p - 2)\, x - (x + i)\,(x - 1)\,(2p - 2) = 2p - 2\,;$$

e liberandola dal fattore non nullo $2p - 2$:

$$x^2 - (x + i)\,(x - 1) = 1\,, \quad \text{ossia: } (x - 1)\,(i - 1) = 0\,;$$

e quindi (essendo $x > 1$) $i = 1$; sicchè le f^{2p-2} si muteranno in $f^{(2p-2)x}\ (\mathbf{C}^{x+1})$. E un sistema lineare di superficie segate su M da forme di ordine n, e che abbiano la **C** come multipla di ordine $n + i\ (i > 0)$:

$$f^{(2p-2)n}\ (\mathbf{C}^{n+i}) = n\, f^{2p-2} - (n + i)\ \mathbf{C}$$

verrà mutato dalla **I** in un sistema di superficie:

$$n f^{(2p-2)x}\ (\mathbf{C}^{x+1}) - (n + i)\, f^{(2p-2)\,(x-1)}\ (\mathbf{C}^{x})$$

cioè superficie segate da forme di ordine $n - i\,(x - i)$ e aventi la **C** multipla di ordine $n - ix$; cioè segate da forme di ordine $< n$, colla **C** di multiplicità inferiore a quest'ultimo ordine.

A questo nuovo sistema saranno daccapo applicabili le considerazioni del n. 2; cioè, se le nuove superficie sono ancora segate da forme di ordine > 1, vi sarà una linea o un punto isolato di multiplicità superiore a quest'ordine, o risp. al doppio di quest'ordine. Risulterà d'altra parte dall'esame dei singoli casi $p = 5, 6, 8$ che l'ipotesi del n. prec. non trova altra applicazione che quella testè indicata. Pertanto, come linee **C** che possono avere per le $F^{n(2p-2)}$ multiplicità $> n$, basterà tener conto delle seguenti:

sulla M^8 di S_6, rette;

sulla M^{10} di S_7, rette e coniche;

sulla M^{14} di S_9, linee appartenenti a spazi di dimensioni ≤ 4, cioè rette, coniche, cubiche sghembe, C^4_0 e C^5_1 (escluse le C^4_1 e C^6_2, non esistendo sulla M^{14} linee così fatte, nè, più generalmente, gruppi di 4 punti complanari non appartenenti a una conica della M^{14}) (1).

(1) Nelle mie due Note cit. degli Atti della R. Accad. di Torino, vol. 43, (1907-08) pag. 973 e vol. 50, (1914-15) pag. 1067, determinando i sistemi lineari di superficie di generi uno contenuti in una M^6 di S_5 (M^{2p-2} di S_{p+1}, per $p = 4$),

4. – In una delle varietà M, μ di cui al n. 1, per es. nella μ, consideriamo una linea λ fondamentale di 1ª specie, i^{pla}, ai cui punti corrisponderanno in M ∞^1 linee razionali C^i, assoggettate a $i-1$ condizioni (incidenze, anche multiple, con linee fondamentali l, e passaggi per punti fondamentali P isolati, ognuno di questi ultimi essendo computato per due condizioni fra le $i-1$). Tali curve C^i non possono essere incontrate dalle superficie F, segate da forme di ordine n, in punti variabili; ma soltanto sulle l e nei punti P. E ogni F conterrà per intero un certo numero di C^i, corrispondenti alle intersezioni di λ colle singole φ, sezioni iperpiane di μ. Dovendo pertanto le $i \cdot n$ intersezioni di una C^i e di una F generiche distribuirsi fra soli $i-1$ punti (computati doppiamente gli eventuali punti P), dovrà qualcuno di essi assorbirne più di n (o di $2n$ se si tratta di un punto P); ossia le C^i dovranno appoggiarsi a una curva fondamentale $\mathbf{C}$ avente per le F multiplicità $> n$, e che chiameremo curva fondamentale «principale», o passare per un punto di multiplicità $> 2n$.

Se dunque (e sarà così nella maggior parte dei casi) il sistema $|F|$ ha una sola linea fondamentale di multiplicità $> n$, oppure un solo

---

sono incorso in un errore, fortunatamente senza conseguenze, di cui mi sono accorto durante la presente ricerca, e che devo ora rettificare. Non è esatto (loc. cit.; n. 8, risp. n. 1) che superficie di generi uno segate sulla M da forme di ordine n non possano avere una conica $(n+1)^{pla}$, perchè le ∞^2 quartiche ellittiche intersezioni ulteriori della M^6 cogli spazi S_3 passanti pel piano di tale conica avrebbero con questa 4 punti comuni, e perciò colle dette superficie (o colle forme che le segano) $4(n+1)$ intersezioni, con che dovrebbero esservi contenute per intero. In relazione a quanto è detto qui ai n$^{\text{i}}$ 2 e 3, fa eccezione il caso in cui il piano della conica c sia contenuto nella quadrica passante per la M^6; esso incontra allora ulteriormente la M^6 secondo una retta r, e le quartiche suindicate si spezzano tutte in questa retta, parte fissa, più una cubica γ, in piano incidente al precedente secondo una retta; cubica che incontra c in due punti e r in uno. Questo caso può essere trattato come è detto al n. 3. Fissando su ogni cubica γ la g_2^1 avente come punto doppio la sua intersezione colla retta r, viene definita su M^6 un'involuzione, nella quale alle f^6 sezioni iperpiane corrispondono superficie $f^{13.6}$ (c^{14}), con unica aggiunta $f^{12.6}$ (c^{13}), luogo delle curve (di ordine 14) corrispondenti ai singoli punti della conica c. Quest'involuzione muta una qualsiasi superficie f^{6n} (c^{n+i}) $(i > 0)$ in una $f^{6(n-12i)}$ (c^{n-13i}), perciò di ordine minore. E una trasformazione birazionale su M^6 anzichè essere prodotto di sole proiezioni doppie da rette, è un prodotto di queste proiezioni doppie e di trasformazioni del tipo qui indicato. Gli altri risultati dalle mie note cit. non ne vengono modificati.

punto di multiplicità $> 2n$, ad essa si appoggeranno, o rispett. per esso passeranno tutte le C^i; e per tale curva o punto passeranno tutte le superficie fondamentali (anche quelle corrispondenti a punti isolati).

Analogo ragionamento può applicarsi alle linee fondamentali di 2ª specie, concludendo che queste pure devono appoggiarsi a una linea fondamentale principale C, oppure passare per un punto fondamentale di multiplicità $> 2n$.

Supposto ad es. che in ciascuna delle varietà M, μ vi sia un'unica linea fondamentale principale, e nessun punto di multiplicità $> 2n$, o rispett. $> 2m$ per le F, Φ, per questa linea passeranno, in M o rispett. in μ, tutte le superficie fondamentali. E, sia in M che in μ, la superficie corrispondente alla linea fondamentale principale dell'altra varietà conterrà tutti gli elementi (punti e linee) fondamentali della varietà stessa.

Osserviamo ancora che ogni linea fondamentale principale C ad es. su M deve avere, per qualsiasi aggiunta parziale segata da una forma di ordine k, la multiplicità $> k$; poichè in caso contrario le rette della M o μ appoggiate a C, fondamentali di 2ª specie, sarebbero segate da queste aggiunte fuori di C stessa, cioè fuori degli elementi fondamentali. D'altra parte questa stessa aggiunta parziale delle F, essendo superficie di genere geometrico zero, deve pur essa avere una linea di multiplicità $> k$, o un punto di multiplicità $> 2k$; e questo elemento non può essere che quello, o uno di quelli che godono di analoga proprietà per le F. Riassumendo pertanto:

Ogni linea fondamentale principale C appartiene a tutte le aggiunte parziali delle F; ha per queste, se segate da forme di ordine k, multiplicità $\geq k$, e per una almeno di esse multiplicità $\geq k+1$. Viceversa, ciascuna di queste aggiunte parziali ha almeno una linea di multiplicità $k+1$, e quest'una è linea fondamentale principale. Se vi è un'unica linea fondamentale principale, questa è in pari tempo almeno $(k+1)^{\text{pla}}$ per ogni aggiunta parziale segata da una forma di ordine k. In tutti questi enunciati la linea C può essere sostituita da un punto di multiplicità $> 2n$ per le F e $> 2k$ per le aggiunte parziali.

5. – Qualche altra considerazione ci condurrà pure a ritrovare qualcuno dei risultati precedenti.

Su una superficie generica $f^{k(2p-2)}$ della M^{2p-2} il grado di una eventuale retta (isolata) in essa contenuta è dato dalla differenza fra i numeri 1 e $k+2$ delle intersezioni della retta stessa con una sezione iperpiana generica, e colle curve residue di tale retta rispetto al sistema delle sezioni iperpiane: esso vale quindi $-(k+1)$. Se la $f^{k(2p-2)}$ è una rigata, il grado suddetto deve ridursi a zero, e le $k+2$ intersezioni di cui sopra devono ridursi a una, astrazione fatta dai punti doppi della rigata appartenenti alla generatrice considerata. In altri termini, la rigata deve avere una linea doppia incontrante ogni generatrice in $k+1$ punti, o linee di multiplicità anche superiore, complessivamente equivalenti a questa; in altri termini, ogni generatrice deve incontrarne $k+1$ altre (Cfr. «Berz.», n. 1).

Pure su una $f^{k(2p-2)}$ il grado di una eventuale C^x razionale, anche essa generalmente isolata, si può calcolare in modo analogo; oppure facendola spezzare in x rette, ciascuna delle quali, in un dato ordine, incidente soltanto alla successiva; il che dà la somma di x rette, ciascuna di grado $-(k+1)$, con complessive $x-1$ intersezioni. Il grado richiesto sarà dunque $-x(k+1)+2(x-1)=-\{(k-1)x+2\}$. Pertanto, se la $f^{k(2p-2)}$, come avviene per le superficie fondamentali L, Λ, è luogo di un fascio, razionale o no, di C^x, ogni C^x dovrà essere incidente a $(k-1)x+2$ altre; ossia la $f^{k(2p-2)}$ dovrà avere una linea doppia incontrante ogni C^x in $(k-1)x+2$ punti, ovvero una o più linee multiple complessivamente equivalenti a questa, nel senso che ogni C^x ne incontri altre nel numero anzidetto [1].

D'altra parte, se la $f^{k(2p-2)}$ è una delle superficie fondamentali L di M^{2p-2}, questi $(k-1)x+2$ punti di ogni C^x devono distribuirsi fra gli $x-1$ suoi punti di incidenza colle linee fondamentali di 1ª specie, inclusi e computati due volte gli eventuali punti fondamentali isolati appartenenti alla C^x. Pertanto qualcuno di essi dovrà assorbire almeno k unità; cioè le C^x passanti per tale punto saranno almeno $k+1$. Ritroviamo

---

(1) Questo risultato può servire per controlli relativi a superficie fondamentali L, Λ. Per es. nella rapresentazione della M^{14} di S_9 sulla forma cubica generale di S_4, di cui alla mia Nota cit. nei Rend. R. Accad Lincei (5), vol. 11, (1° sem. 1930), pag. 329, alla γ_1^5 fondamentale della forma cubica corrisponde in M^{14} una superficie $L^{5.14}$ con una δ_1^5 multipla di ordine 7, luogo di ∞^1 C^4 appoggiate alla δ in 3 punti. È pertanto $(k-1)x+2=4\cdot4+2=18$; e ogni C^4 ne incontra infatti altre 6 in ciascuno dei 3 suoi punti di incidenza colla δ.

così che ogni superficie irriducibile corrispondente a una linea fondamentale di 1ª specie e segata da una forma di ordine k deve avere una linea di multiplicità $\geqq k+1$.

Se questa superficie ha un'unica linea multipla, incontrata dalle C^x in $x-1$ punti, sarà $\frac{(k-1)x+2}{x-1}=(k-1)+\frac{k+1}{x-1}=\rho$ numero intero: e e $\rho+1$ sarà la multiplicità della linea stessa per la detta superficie [1].

VARIETÀ M^8 DI S_6 $(p=5)$

6. - La varietà M^8 di S_6, qui oggetto di studio, è l'intersezione generale di tre quadriche di S_6, e base della rete di quadriche determinata da queste. Nella rete sono contenuti ∞^1 S_0 - coni, ciascuno dei quali contiene ∞^4 spazi S_3, distribuiti in due distinti sistemi (analogamente ai piani di una quadrica generale di S_5). Ciascuno di questi S_3, complessivamente in numero di ∞^4, incontra la M^8 secondo una curva γ_1^4 eventualmente spezzata in una cubica sghemba e una sua corda, oppure in due coniche bisecantisi; e viceversa lo spazio S_3 di una qualsiasi γ_1^4 contenuta in M^8 appartiene a uno dei coni suddetti. Per ciascuno di questi S_3 passano ∞^2 spazi S_4 incontranti ulteriormente M^8 pure in curve γ_1^4, formanti una congruenza del 1° ordine; e ∞^2 spazi S_5, che incontrano M^8 secondo particolari superficie f^8 contenenti due fasci di γ_1^4, e contenute in S_1 - coni quadrici di S_5.

Ogni fascio di quadriche contenuto nella rete di cui M^8 è base contiene a sua volta 7 coni. Le quadriche passanti per M^8 e per il piano di una sua conica formano appunto un fascio; e ciascuno dei 7 coni di questo fascio contiene uno spazio S_3 passante per il detto piano, e incontrante perciò la M^8 in una seconda conica, bisecante la prima. Le coniche di M^8 bisecanti una data sono dunque in numero di 7.

Un sistema lineare $|F|$ di superficie di generi uno segato su M^8 da forme di ordine $n>1$ non può avere punti di multiplicità $>2n$ (n. 2), ma ha certo almeno una linea di multiplicità $>n$. E possiamo limitarci a considerare il caso in cui questa linea è una retta. Se fosse una

(1) Nell'esempio dato nella nota precedente è $\rho=6$, $\rho+1=7$.

conica, la proiezione doppia di M^8 dal piano di questa conica permetterebbe di trasformare il sistema $|F|$ in un altro ordine inferiore (¹). Se appartenesse a uno spazio S_3, potrebbe essere soltanto una cubica sghemba, una cui corda appartenga pure a M^8; caso già esaurito dalle considerazioni del n. 3.

7. – Per studiare su M^8 i sistemi lineari di superficie segati da forme di ordine $n > 1$ e aventi una retta r multipla di ordine $n+i$ con $i > 0$, conviene richiamare alcune proprietà della M^4 di S_4 proiezione di M^8 da r (« Berz. », n. 3).

Questa M^4 contiene una rigata normale R^3 immagine di r, e 17 punti doppi, semplici per R^3, immagini delle rette di M^8 incidenti a r. Le ∞^2 quadriche (tutte coni) passanti per R^3 segano su M^4 una rete di superficie φ^5 a sezioni di genere 2, che incontrano R^3 in curve canoniche C^8_5 trisecanti le generatrici e passanti pei 17 punti doppi di M^4. Le φ^5 si tagliano a due a due secondo coniche δ di una congruenza del 1° ordine, contenute nei piani delle coniche di R^3 e 4-secanti R^3 stessa. Le coniche δ sono proiezioni di curve C^6 di M^8, 4-secanti la r, e i cui spazi S_4 incontrano ulteriormente M^8 secondo la r contata due volte (²). Le superficie φ^5 sono proiezioni di $f^{2 \cdot 8}(r^3)$ di M^8 (³).

(¹) La proiezione doppia di M^8 dal piano di una sua conica (c, γ) può rappresentarsi colle equazioni:

$$\varphi^8 = 5f^8 - 6c$$
$$\gamma = 4f^8 - 5c$$

Se la conica è spezzata in due rette r, s, rispett. ρ, σ, le equazioni sono:

$$\varphi^8 = 5f^8 - 6r - 6s$$
$$\rho = 2f^8 - 3r - 2s$$
$$\sigma = 2f^8 - 2r - 3s$$

Una $f^{8n}(r^{n+i}, s^{n+k})$ viene mutata in una superficie segata da una forma di ordine $n - 2(i+k)$, e perciò di ordine inferiore, ogni qualvolta $i + k > 0$, anche se uno dei due interi, i, k è negativo. Cfr. la nota (¹) a pag. 677.

(²) I piani delle coniche δ incontrano R^3 secondo le sue coniche dlrettrici; gli S_4 che li proiettano da r incontrano perciò in piani tutti gli S_3 tangenti a M^8 nei punti di r.

(³) Per ciascuno dei 17 punti doppi di M^4 passano ∞^1 coniche δ, luogo delle quali è una particolare φ^5 avente questo punto come triplo. Tutte le φ^5 sono proie-

Una superficie $f^{8n}(r^{n+i}) = nf^8 - (n+i)\,r = nf^8(r) - ir$ contenuta in M^8 si proietta da r in una $n\,f^4 - iR^3 = (n-2i)\,f^4 + i\,\varphi^5$ di M^4, di ordine $4n - 3i$ (1).

Le rigate contenute nella M^4 devono avere ordini di somma 320; devono costituire insieme la completa intersezione di M^4 con una forma di ordine 80, e saranno perciò proiezioni di superficie di M^8 costituenti insieme una $f^{8\cdot 80}(r^{80})$. Inoltre ogni generatrice di ciascuna di esse deve incontrarne complessivamente altre 81 (della stessa rigata o di altre) (2).

Vi è anzitutto la R^3 immagine di r.

La M^8 di S_6 contiene una rigata di ordine 128 (« Berz. », n. 3), sua completa intersezione con una forma di ordine 16; tale rigata è una superficie $f^{16\cdot 8}(r)$, e la sua proiezione su M^4 è una rigata R^{109} (v. sopra, per $n = 16, i = -15$).

Fra le coniche δ, ∞^1 si spezzano in due rette incidenti, corde di R^3, e proiezioni di cubiche bisecanti r. Ogni φ^5 contiene 7 di queste coppie di rette; e luogo di queste coppie è una superficie appartenente alla congruenza delle δ, equivalente a $7\varphi^5$; perciò una rigata R^{35} proiezione di una $f^{14\cdot 8}(r^{21})$, luogo delle suddette cubiche bisecanti r. Sulla R^{35} le coppie di rette costituenti coniche δ riducibili formano una involuzione priva di elementi doppi, e riferibile a una curva piana generale del 7° ordine $\mathbf{K}^7$, perciò di genere 15; mentre la R^{35}, in base alla nota formula di ZEUTHEN, è di genere 29. La curva doppia della R^{35} è di ordine 21 (3), e incontra R^3 in $2.21 - 7 = 35$ punti; la curva

---

zioni di $f^{2.8}(r^3)$ contenenti le 17 rette di M^8 incidenti a r; sopra ciascuna di quelle 17 particolari $f^{2\cdot 8}(r^3)$ le ∞^1 curve C^6 sono spezzate in una delle 17 rette come parte fissa, più una C^5 variabile incidente a questa retta e trisecante la r. Un'altra particolare φ^5 è luogo delle coniche δ contenute nei piani che congiungono la direttrice rettilinea di R^3 alle singole generatrici; queste δ sono proiezioni di C^6 aventi un punto doppio su r.

(1) Relazioni valide anche per valori negativi di i.

(2) MARLETTA, *Sulla varietà delle rette* ..., « Atti Accad. Gioenia di Catania » (4), vol. 16, (1902).

(3) Rappresentando la congruenza delle δ sopra un piano α, in modo che alle φ^5 corrispondano le rette di questo piano, le δ riducibili saranno rappresentate dai punti della curva piana $\mathbf{K}^7$; e le f^4 sezioni iperpiane di M^4 risulteranno rappresentate sul piano α doppio con sestiche di diramazioni ovunque tangenti alla $\mathbf{K}^7$, dunque tangenti ad essa in 21 punti. Questo è dunque il numero dei punti comuni alle f^4 e alla curva doppia di R^{35}, cioè appunto l'ordine di questa curva.

doppia della $f^{14\cdot 8}(r^{21})$, di cui la precedente è proiezione, è di ordine $21+35=56$, appoggiata a r in 35 punti [1].

Infine, un'ulteriore rigata contenuta in M^4 non potrà essere proiezione che della ∞^1 di coniche di M^8 incidenti a r (non esistendo su M^8 curve di ordine $x>3$ e $(x-1)$ - secanti la r); luogo di queste coniche sarà pertanto una $f^{50\cdot 8}(r^{59})$, e la sua proiezione una R^{173} [2].

Vediamo così che il sistema ∞^2 delle coniche contenute in M^8 è di ordine 76; per un punto di r ne passano 59 in generale irriducibili, e 17 spezzate in r e in una seconda retta incidente a questa [3].

8. - Abbiamo già indicato al n. 2 il genere della superficie intersezione generale di una M^{2p-2} di S_{p+1} con una forma di ordine n. Per $p=5$, cioè per la f^{8n} generica sulla M^8 di S_6, questo genere è:

[1] $$\frac{1}{6}(8n^3-12n^2+16n-6).$$

Il genere di una $f^{8n}(r^k)$, ove $k\leq n$, si può calcolare considerando questa superficie come somma di k superficie $f^8(r)$ e di $n-k$ superficie f^8 generali, ed equivalente sulla M^4 proiezione di M^8 a

---

(1) La R^{35} incontra R^3 secondo una curva equivalente sopra R^3 all'insieme di 7 fra le curve canoniche C_5^8 ivi segate dalle φ^5; dunque una curva di ordine 56, avente i 17 punti doppi di M^4 come 7^{pli}, e i 35 punti comuni a R^3 e alla C^{21} doppia di R^{35} anche come doppi; curva perciò di genere 78.

(2) Applicando i risultati del n. 5 alle superficie $f^{14.8}(r^{21})$ e $f^{50.8}(r^{59})$ luoghi rispett. di un fascio di cubiche e di coniche, si trova per la prima $k=14$, $x=3$, $13.3+2=(21-1)\cdot 2+1$; e sta bene che ogni cubica della $f^{14.8}$ ne incontra fuori di r una sola; per la seconda, $k=50$, $x=2$, $49.2+2=(59-1)\cdot 1+42$; perciò ogni conica di $f^{50.8}$ deve incontrarne fuori di r altre 42. Considerate le 4 rigate di M^4 nell'ordine R^3, R^{109}, R^{173}, R^{35}, ogni loro generatrice ne incontra altre, di queste stesse quattro e nel medesimo ordine, nel numero indicato qui appresso: R^3 (0,1, 59, , 21); R^{109} (0, 17, 50, 14); R^{173} (1, 31, 42, 7); R^{35} (2, 46, 32, 1). La somma degli ordini delle 4 rigate è appunto 320; e la somma dei 4 numeri entro ciascuna parentesi è 81.

(3) Una conferma è data dalla particolare M^8 contenente un piano («Berz.», n. 4), razionale e rappresentata su S_3 dal sistema delle F^4 passanti per una C_9^9; al piano della M^8 corrisponde l'unica superficie cubica passante per la C_9^9. Le coniche di M^8, all'infuori di quelle contenute nel detto piano, possono avere per immagini soltanto le corde di C_9^9 (formanti una congruenza di ordine 19) e le sue coniche 6-secanti (congruenza di ordine 57); poichè le curve di ordine di $n>2$ e $(4n-2)$ — secanti la C_9^9 stanno tutte sulla detta superficie cubica. E $19+57=76$.

$kf^4 + (n - k)(f^4 + R^3)$. Si trova così:

[2] $$\frac{1}{6}\left\{8n^3 - 12n^2 - (3k^2 - 3k - 16)n - (k^3 - 3k^2 + 2k + 6)\right\},$$

La diminuzione portata da r^k è pertanto $n\binom{k}{2} + \binom{k}{3}$.

Infine il genere di una $f^{8n}(r^{n+i})$, con $i > 0$, equivalente a una $(n - 2i)f^4 + i\varphi^5$ su M^4, si può calcolare analogamente mediante i generi di $(n - 2i)f^4$, di $i\varphi^5$, e della curva loro intersezione, che è l'intersezione generale di $i\varphi^5$ con una forma di ordine $n - 2i$. Si trova così:

[3] $$\frac{1}{6}\left\{4n^3 - (9i + 6)n^2 - (6i^2 - 9i - 14)n + (16i^3 + 3i^2 - 19i - 6)\right\}$$

Il genere di una $f^{8n}(r^n)$ è dato in pari tempo dalla [2] per $k = n$ e dalla [3] per $i = 0$. La [2] vale anche per $k = n + 1$ (ma non per valori superiori), e la [3] per $i = -1$ (cioè per una $f^{8n}(r^{n-1})$).

Qualora, su una M^8, due rette sghembe r, s costituiscano la sua completa intersezione col loro spazio S_3 (e le diremo in tal caso « indipendenti »), si può ritenere che le diminuzioni portate al genere di una superficie contenuta in M^8 dall'avere lungo queste rette multiplicità assegnate siano anche indipendenti, e la diminuzione complessiva eguale perciò alla somma delle due che risultano dalle espressioni precedenti. Se le due rette hanno per una f^{8n} le multiplicità $n + i$, $n - i$, il genere di questa f^{8n} risulta:

$$\frac{1}{6}\left\{17i^3 + (6 - 12n)i^2 - 17i - (6 - 12n)\right\} = \frac{1}{6}(i^2 - 1)(17i + 6 - 12n)$$

che per $i = 0$ (due rette n^{ple}) vale $2n - 1$; per $i = 1$ vale zero; e per $i > 1$ è certo negativo (¹). D'altronde la M^8 è segata ulteriormente dagli S_4 passanti per lo spazio S_3 (r, s) secondo ∞^2 C_1^6 trisecanti entrambe le rette r, s; e la f^{8n} in parola è certo luogo di una ∞^1, generalmente irrazionale, di queste C_1^6.

Pertanto, una $f^{8n}(r^{n+i})$ con $i > 1$ e di generi uno non può avere una seconda retta multipla di ordine $\geqq n - i$ e indipendente dalla

(¹) Per una $f^{8n}(r^{r+i}, s^{n-i})$ è certo $i < \frac{n}{2}$, la superficie non potendo essere luogo di ∞^1 fra le C_0^6 4-secanti la r; quindi $n > 2i$, $12n > 24i > 17i + 6$.

prima; e perciò nemmeno un'ulteriore linea di eguale multiplicità dalla quale possa staccarsi per continuità una retta indipendente dalla r. Il risultato non vale però (come si vedrà al n. 16) quando lo spazio $S_3(r, s,)$ abbia a comune colla M^8 anche una terza retta incidente alle due prime.

9. – Consideriamo adesso su M^8 un sistema lineare di superficie $f^{8n}(r^{n+i})$ con $i > 0$, le quali perciò incontreranno le C_0^6 aventi r come 4 - secante, e che d'ora in poi indicheremo con $C^6(r)$, in $6n - 4(n+i) = 2n - 4i$ punti variabili (1). Sulla M^4 proiezione di M^8 dalla retta r questo sistema si comporrà di superficie $(n - 2i)f^4 + i\varphi^5$, $(2n - 4i)$ - secanti le coniche δ. E supponiamo che queste superficie siano di generi uno, e il loro sistema rappresenti una μ^{2p-2} di S_{p+1}, eventualmente anche per $p \neq 5$, del tipo che stiamo studiando; alla congruenza delle $C^6(r)$, o delle δ, corrisponderà su μ una congruenza di curve γ d'ordine $2n - 4i$. Dal seguito risulterà che per questa varietà μ è anche sempre $p = 5$; e pertanto sulla M^8 non esistono altri sistemi completi di superficie del tipo cercato se non di grado 8, a intersezioni variabili di genere 5.

Dico anzitutto che, se la varietà μ deve soddisfare come la M^8 alle condizioni del n. 1, la corrispondenza birazionale fra le due congruenze delle $C^6(r)$ su M^8 e delle γ su μ è priva di elementi fondamentali, quindi biunivoca senza eccezioni. Invero, la congruenza delle $C^6(r)$ può riferirsi birazionalmente senza eccezioni a un piano, facendo corrispondere alle rette del piano le superficie $f^{2\cdot 8}(r^3)$ appartenenti alla detta congruenza. Perciò, se la corrispondenza fra le due congruenze delle $C^6(r)$ e delle γ ha qualche elemento fondamentale, ve ne sarà certo almeno uno nella congruenza $C^6(r)$, per la quale, come per il piano, l'invariante relativo ω di Castelnuovo-Enriques (2) ha il valore massimo 10; e a questa particolare C_0^6 corrisponderà in tal caso una

(1) Quando una $C^6(r)$ si spezza in una retta s incidente alla r (e i^{pla} per le $f^{8n}(r^{n+i})$) e una C^5, incidente a s e trisecante la r (Nota (3) a p. 21), la C^5 è egualmente incontrata dalle $f^{8n}(r^{n+i})$ in $5n - i - 3(n+i) = 2n - 4i$ punti variabili.

(2) *Sopra alcune questioni fondamentali*..., « Ann. di Matem. », (3), vol. 6, (1901), pag. 165.

superficie Γ luogo di ∞^1 linee γ. Poichè la varietà μ deve contenere soltanto superficie intersezioni complete con forme, la Γ non può essere entro μ una superficie isolata. Quando, entro μ, una superficie Γ^* dello stesso suo ordine tende a Γ, la superficie corrispondente S entro M^8 tenderà a passare per C_0^6; e al limite non potrà essere una plurisecante delle $C^6(r)$, alla quale dovrebbe corrispondere una plurisecante delle γ; ma sarà una superficie luogo di ∞^1 $C^6(r)$, alle quali linee dovrà corrispondere un'unica particolare γ_0 su Γ (essendo pertanto degenere la corrispondenza tra la ∞^1 di $C^6(r)$ su S e la ∞^1 di γ su Γ). D'altra parte la S, luogo di ∞^1 $C^6(r)$, contiene certo delle $C^6(r)$ spezzate in due cubiche, perchè nel piano, su cui la congruenza delle $C^6(r)$ può rappresentarsi senza eccezioni, ogni linea algebrica incontra la K^7 immagine delle C^6 così spezzate. Pertanto la γ_0 dovrebbe essere una linea riducibile, composta di due parti di ordine $n-2i$, perchè corrispondenti a uno o più elementi di K^7, e corrispondere in pari tempo a C^6 irriducibili; il che non è possibile.

Pertanto una $C^6(r)$ che sia linea base del sistema $|F| = |f^{8n}(r^{n+i})|$, o una conica δ base per il sistema $|(n-2i)f^4 + i\varphi^5|$, o una loro parte, non potrà essere per la corrispondenza fra M e μ che linea fondamentale di 2^a specie, alla quale corrisponderà su μ una γ o sua parte, anche linea fondamentale di 2^a specie. D'altra parte le F, e le $(n-2i)f^4+i\varphi^5$ loro proiezioni su M^4, devono essere di generi uno, e perciò prive di tutte le aggiunte successive alla prima; e poichè su M^4 le loro $(n-2i)^{\text{sime}}$ aggiunte sono superficie $i\varphi^5$, fra le loro singolarità (oltre, per le F, la retta multipla r) vi sarà certo una linea di multiplicità $> n-2i$, unisecante le $C^6(r)$ o risp. le γ.

10. – Nel caso $i=1$ le 17 rette di M^8 appoggiate alla r appartengono alle $f^8(r^{n+i})$ come rette semplici; e nella corrispondenza fra M e μ ad esse devono anche corrispondere rette, fondamentali di 2^a specie, semplici per le superficie Φ. E questo numero di 17 rette così fatte non si ritrova in alcun modo su nessun'altra delle M^{2p-2} in esame. Pertanto per $i=1$ si avranno soltanto sistemi rappresentativi ancora di una M^8.

Esaminiamo ora l'altro caso estremo; cioè – a parte l'ipotesi di $i=\frac{n}{2}$ (se n pari), che conduce soltanto a superficie appartenenti alla congruenza delle $C^6(r)$ – il caso di superficie bisecanti le $C^6(r)$; quindi $2n - 4i = 2, n = 2i+1$, ossia superficie $f^{8(2i+1)}(r^{(3i+1)})$, equivalenti a $f^4 + i\varphi^5$ sulla M^4 proiezione di M^8 da r. Rappresentando la congruenza $C^6(r)$, o quella delle δ di M^4, su un piano α come alla nota (3) di p. 656, cioè in modo che le rette del piano α corrispondano alle superficie $f^{2 \cdot 8}(r^3)$ di M^8, o risp. alle φ^5 di M^4 appartenenti alla congruenza, le $f^{(2i+1)8}(r^{(3i+1)}) = f^4 + i\varphi^5$ bisecanti le linee della congruenza stessa, e che ne sono le bisecanti più generali, risulteranno rappresentate sul piano α doppio con curva di diramazione di ordine $2i+6$ (1), ovunque tangente alla $\mathbf{K}^7$ immagine dalle δ spezzate in due rette (2). Per $i = 0$ si hanno le ∞^4 superficie f^4 sezioni iperpiane di M^4, e nel piano α altrettante C^6 di uno determinato Σ fra i sistemi continui ∞^6 di C^6 ovunque tangenti a $\mathbf{K}^7$ (3). Alle f^4 di un fascio corrispondono C^6 di un sistema ∞^1 di indice 2, il cui inviluppo è composto di $\mathbf{K}^7$ e di una C_3^5, immagine della quartica base del fascio. Per $i > 0$, le C^{2i+6} di diramazione appartengono a quel sistema continuo di tali curve ovunque tangenti a $\mathbf{K}^7$ che contiene le curve composte delle precedenti C^6 e di i rette doppie. Esse toccano perciò $\mathbf{K}^7$ in gruppi di punti della serie lineare somma della g_{21}^6 dei gruppi di contatto colle sestiche del sistema Σ e della serie i^{pla} delle g_7^2 segatavi dalle rette del piano. Tuttavia se $i > 0$, la C^{2i+6} può spezzarsi nella $\mathbf{K}^7$ e in una C^{2i-1} non più vincolata a contatti con questa; ciò corrisponde al caso

(1) Le $f^4 + \varphi^5$ segano infatti le φ^5 secondo curve iperellittiche di genere $i+2$, la cui g_2^1 ha perciò $2i + 6$ elementi doppi.

(2) ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, Cedam 1932), pag. 348-63; MORIN, *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali.* «Rend. Semin. Matem.», Padova, anno IX (1938), pag. 123; in pert. n. 11-13.

(3) Questo sistema di C^6 non é uno di quelli ottenuti sommando le rette doppie del piano α a una delle quartiche ovunque tangenti a $\mathbf{K}^7$; i 21 punti di contatto di queste C^6 con $\mathbf{K}^7$ non stanno perciò su quintiche piane. Poichè le f^4 incontrano le superficie φ^5 e la rigata R^3 secondo curve aventi 8 punti comuni, alle cubiche sezioni di R^3 corrisponderanno in α curve razionali di 8° ordine ovunque tangenti, una per una, alle singole C^6 di diramazione delle F^4. Pertanto ciascuna di queste $\infty^4 C^6$, oltre ad essere ovunque tangente a $\mathbf{K}^7$, è pure ovunque tangente a una C^8 razionale; il che costituisce per esse una condizione ulteriore.

che per $i \geqq 2$ certo si verifica, di una superficie del sistema $|f^4 + i\varphi^5|$ contenente la curva doppia C^{21} della rigata R^{35} (1)

Se questo non avviene, i punti comuni alla C^{2i+6} e a $\mathbf{K}^7$, ovunque tangenti, perciò in numero di $\frac{(2i+6)\cdot 7}{2} = 21 + 7i$, sono le immagini delle intersezioni, in egual numero, della $f^4 + i\varphi^5$ colla detta C^{21}. E la linea di contatto l di questa $f^4 + i\varphi^5$ colla superficie $\Lambda = (2i+6)\varphi^5$, luogo delle ∞^1 coniche δ a cui la $f^4 + i\varphi^5$ è tangente, è in corrispondenza birazionale colla C^{2i+6}. Per $i = 0$ si tratta della curva di contatto, di ordine 15, di una f^4 con una $\Lambda = 6\varphi^5$; se la f^4 ha un punto doppio, questo è pure tale per la C^{15}; se la f^4 contiene una conica δ, la C^{15} si spezza in questa conica, doppia per la $6\varphi^5$, e in una C^{13} residua. In generale, la linea di contatto l suindicata è di ordine $\binom{2i+6}{2}$; e da essa possono egualmente staccarsi singole coniche δ, doppie per la superficie Λ e semplici per $f^4 + i\,\varphi^5$. Anzi la superficie $\Lambda = (2i+6)\varphi^5$ può spezzarsi in una $k\varphi^5$ e una $k'\varphi^5$, con $k + k' = 2i + 6$; e la linea l risulta allora composta di due parti, linee di contatto di $f^4 + i\varphi^5$ risp. con $k\varphi^5$ e $k'\varphi^5$, e di coniche δ comuni a queste due ultime superficie e semplici per $f^4 + i\varphi^5$ (2).

La superficie $\Lambda = (2i+6)\varphi^5$, supposta irriducibile, si può rappresentare su un cono (se razionale, su un piano) in modo che alle sue coniche δ corrispondano le generatrici di questo cono (le rette di un fascio), e alle sue sezioni iperpiane, curve bisecanti le dette generatrici, con un certo numero di punti basi semplici. Alle generatrici passanti per questi punti basi corrispondono le δ della superficie Λ spezzate in due rette, e nel piano α i punti comuni alla linea di diramazione C^{2i+6} e alla $\mathbf{K}^7$. Dire che queste due linee sono ovunque tangenti è

---

(1) Il sistema lineare $|f^4 + i\,\varphi^5|$ ha infatti dimensione $\frac{1}{2}(3i^2 + 13\,i + 8)$, e sega sulla C^{21}, di genere 15, una serie lineare non speciale di ordine $7i + 21$, perciò di dimensione $\leqq 7i + 6$; numero per $i \geqq 2$ inferiore al precedente.

(2) Nel caso più semplice, quando cioè k e k' sono entrambi pari e le due superficie $k\varphi^5$ e $k'\varphi^5$ hanno per immagini nel piano α linee irriducibili ovunque tanganti a $\mathbf{K}^7$, le due linee di contatto in parola sono di ordini $\binom{k}{2}$ e $\binom{k'}{2}$; la linea complessiva comprende inoltre $\frac{k\,k'}{2}$ coniche δ comuni a $k\varphi^5$ e $k'\varphi^5$, e ha un egual numero di punti doppi sulle ulteriori coniche comuni ad esse.

dire che questi punti basi semplici sono a coppie infinitamente vicini; i punti doppi di quelle δ riducibili sono allora punti doppi di Λ, e per essi deve passare la linea di contatto l delle superficie $f^4+i\varphi^5$ e Λ. Se invece la C^{2i+6} si spezza nella $\mathbf{K}^7$ e in una C^{2i-1} (generica), la l a sua volta si spezzerà nella C^{21}, curva doppia della rigata R^{35}, e in una parte residua l_0, e la Λ nella rigata R^{35} e in una Λ_0 residua. In corrispondenza ai punti comuni alla $\mathbf{K}^7$ e alla C^{2i-1}, generalmente distinti, la l_0 non passera in generale per i punti doppi delle δ riducibili; e la $f^4+i\varphi^5$ conterrà una sola delle due rette componenti ciascuna di queste δ riducibili: quell'una incontrata dalla l_0 (¹).

Se la $f^4+i\varphi^5$ ha una curva doppia ξ unisecante le δ (e che sarà anche parte doppia di l), la cui immagine nel piano α supponiamo di ordine k ($\leqq i$) e indichiamo con Γ^k, quest'ultima curva, contata due volte, farà parte della C^{2i+6} di diramazione corrispondente alla $f^4+i\varphi^5$, e come tale potrà trascurarsi (²), riducendosi l'effettiva curva di diramazione di questa a una $C^{2(i-k)+6}$ residua, ovunque tangente a $\mathbf{K}^7$ (salvo che la $\mathbf{K}^7$ ne sia parte); e in modo corrispondente si spezzerà la superficie $\Lambda=(2i+6)\varphi^5$.

In particolare, se la $f^4+i\varphi^5$ è di generi 1, dovendo essa avere un'unica aggiunta, e precisamente una $i\varphi^5$, la sua curva doppia ξ starà

(¹) Nel caso più semplice fra quelli qui contemplati, cioè per $i=2$, la superficie residua Λ_0 è di ordine $5(2i+6)-35=15$; e vi sono almeno ∞^2 superficie $f^4+2\varphi^5$ per le quali la linea di contatto colle δ, di ordine $\binom{2i+6}{2}=45$, è composta della C^{21}, doppia per R^{35}; di 21 rette comuni alla R^{35} e alla Λ_0 (una per ciascuna delle δ riducibili loro intersezioni), queste pure doppie per la complessiva $\Lambda_0=R^{35}+\Lambda_0$ e semplici per la $f^4+2\varphi^5$; e di una C^3 piana residua, linea di contatto della $f^4+2\varphi^5$ colla Λ_0, e avente per immagine in α anche una cubica. L'intersezione della $f^4+2\varphi^5$ colla $\Lambda_0=3\varphi^5$, di ordine 27, si compone della C^3 anzidetta, contata due volte, e delle 21 rette già menzionate. Dovendo la C^3 contenuta della M^4 incontrare la R^{35} in 21 punti, la retta s ulteriore intersezione del suo piano con M^4 incontrerà R^{35} in 14 punti; è perciò una generatrice della rigata R^{109}, proiezione della R^{128} di M^8 (Cfr. n. 7). Poichè la s non incontra R^3, dovrà la C^3 incontrarla in 3 punti; e sarà perciò proiezione di una sestica di M^8, avente due trisecanti contenute pure in M^8: la retta r, e quella che si proietta in s. L'insieme di questa sestica e delle due trisencanti è una C^8_5, intersezione di M^8 con uno spazio S_4.

(²) Avendo supposto da principio di considerare soltanto superficie con singolarità ordinarie, la linea doppia ξ della $f^4+i\varphi^5$ non è cuspidale, ed è perciò escluso che Γ^k sia parte della curva di diramazione effettiva (semplice) corrispondente a quest'ultima superficie.

appunto su una $i\varphi^5$ (perciò $k=i$); e la corrispondente curva di diramazione C^{2i+6} nel piano α si comporrà della Γ^i, immagine di ξ, contata due volte e perciò trascurabile, e di una C^6 ovunque tangente a $\mathbf{K}^7$, e appartenente al sistema ∞^6 Σ. Consideriamo anzi sulla M^4 un qualsiasi sistema lineare $|X|$ di superficie di generi 1, bisecanti le coniche δ (dunque del tipo $|f^4+i\varphi^5|$, con una curva doppia ξ fissa), semplice (perciò almeno ∞^4), completo (cioè non ulteriormente ampliabile, rimanendo la sua superficie generica di generi 1). Esso rappresenterà una varietà μ normale a curve-sezioni canoniche, sulla quale alle coniche δ corrisponderanno anche coniche; e alle superficie φ^5 incontrate dalle X in curve di genere 2 (1), superficie a sezione di genere 2 contenenti egualmente, nel fascio di coniche, 7 coniche riducibili; dunque egualmente φ^5 di spazi S_4. E la varietà μ apparterrà essa pure a uno spazio S_4, e sarà quindi pur essa del 4° ordine; poichè in caso diverso vi sarebbero delle sezioni iperpiane spezzate in una φ^5 e una bisecante delle coniche δ, mentre nel sistema Σ di sestiche del piano α nessuna si spezza in una retta doppia e una quartica. Infine le X avranno intersezioni variabili di genere 3; e perciò quelle di un fascio avranno nel piano α sestiche di diramazione (a parte la Γ^i doppia) il cui inviluppo è composto della $\mathbf{K}^7$ e di una quintica di genere 3. Sono dunque proprio le stesse ∞^4 sestiche che corrispondono, come curve di diramazione, alle f^4 sezioni iperpiane di M^4.

Concludiamo perciò: *Sulla varietà M^4, ogni sistema lineare semplice di superficie di generi uno bisecanti le coniche δ ha dimensione* 4, *e si compone di superficie rappresentabili sul piano doppio α colle stesse sestiche di diramazione delle sezioni iperpiane f^4:* superficie pertanto, una per una, birazionalmente identiche, in due modi diversi, a queste sezioni iperpiane. Per ogni coppia di superficie f^4 e X omologhe, una determinata di queste due corrispondenze muta precisamente il sistema caratteristico di $|f^4|$ sull'una superficie in qnello di $|X|$ sull'altra (2);

---

(1) Le intersezioni delle $X=f^4+i\varphi^5$ generiche colle φ^5 sono di generi $i+2$, ma nel caso presente hanno i punti doppi sulla linea ξ; sono perciò appunto di genere 2.

(2) Anzitutto a un fascio di f^4 corrispondono superficie X anche di un fascio, poichè sia le une che le altre segano sulla curva doppia C^{21} della rigata R^{35} (a parte, per le X, le intersezioni fisse, appartenenti alla curva ξ) gruppi di una serie lineare g^1_{21}. Le curve caratteristiche sopra una f^4 e una X omologhe sono intersezioni parziali di queste superficie con uno stesso sistema di superficie ap-

pertanto, al variare della coppia f^4, X, questa corrispondenza è contenuta in un'unica corrispondenza birazionale sulla M^4, la quale trasforma il sistema $|f^4|$ nel sistema $|X|$. Per conseguenza: *Ogni sistema lineare semplice completo di superficie di generi uno contenute nella* M^4 *e bisecanti le coniche* δ *è birazionalmente equivalente al sistema delle sezioni iperpiane* (1).

11. - Sulla nostra M^4, o sulla M^8, o piú generalmente sopra una qualsiasi varietà a tre dimensioni contenente una congruenza del 1° ordine di curve razionali δ, fissata una qualsiasi superficie Ω bisecante le δ, chiameremo *specchiamento* rispetto alla Ω la corrispondenza involutoria in cui sono punti omologhi tutte le coppie di punti di una stessa δ armoniche rispetto alle intersezioni di questa con Ω. Sulla M^4, e riferererendoci alla congruenza di coniche δ, non vi saranno in queste corrispondenze punti fondamentali isolati, poichè le δ non passano tutte per uno stesso punto; e, poichè la congruenza delle δ non ha alcuna direttrice, unica linea fondamentale di 1ª specie sarà la linea di contatto l di Ω colle δ ad essa tangenti: la superficie corrispondente ψ è luogo di queste stesse δ. Da questo specchiamento le sezioni iperpiane f^4 sono mutate in superficie anche bisecanti le δ, aventi la l come linea doppia, e la ψ come unica aggiunta; e ogni superficie appartenente alla congruenze delle δ, all'infuori della ψ, è mutata in sè stessa (2).

---

partenenti alla congruenza delle δ; e nella rappresentazione comune di f^4 e X sul sul piano α doppio, corrispondono alle quintiche di genere 3, inviluppi parziali di sestiche del sistema Σ, ciascuna delle quali quintiche è immagine anche di una seconda linea, sia di f^4 che di X.

(1) Non esistono invece sulla M^4 superficie razionali bisecanti le coniche δ. Un'eventuale $f^4 + i\varphi^5$ razionale, dovendo essere priva di aggiunte, dovrebbe avere una curva doppia giacente sopra una superficie $m\varphi^5$ con $m \geq i+1$; dovrebbe quindi rappresentarsi sul piano doppio α con curva di diramazione (semplice) di ordine non superiore a 4; mentre è 6 l'ordine minimo di queste curve di diramazione.

(2) Indicando ora con ψ una superficie generica del sistema lineare appartenente alla congruenza delle δ e che contiene la particolare ψ passante per l (ora $\psi - l$), questo specchiamento è rappresentato su M^4 dalle equazioni:

$$\begin{aligned} f' &= f + \psi - 2l \\ \psi' &= \psi \\ l' &= \psi - l \end{aligned} \qquad [1]$$

Conviene aggiungere qualche indicazione circa il modo in cui lo specchiamento opera sulle coniche δ spezzate in due rette. Teniamo presente a tal uopo che, se la superficie Ω base dello specchiamento incontra una δ generica nei due punti A, B, lo specchiamento equivale su questa δ alla proiezione doppia dal punto P polo della retta $s = AB$; punti corrispondenti sono allineati con P, e armonici rispettto a P e alla s. Se la superficie Ω incontra le due rette componenti una δ riducibile in punti A, B distinti, il polo P della retta AB cade nel

---

Sulla M^8 di S_6 le superficie più semplici bisecanti le $C^6(r)$ sono le sezioni iperpiane $f^8(r)$, che si proiettano da r nelle sezioni iperpiane della M^4 di S_4. Queste ultime, incontrando le φ^5 in C_2^5, sono tangenti a 6 coniche di ciascuna φ^5, e perciò alle ∞^1 coniche δ di una $\varphi^{6 \cdot 5}$, lungo una linea di ordine 15, che incontra la R^3 immagine di r e residua delle φ^5 rispetto a quadriche (n. 7) in $2.15 - 6 = 24$ punti. Su M^8 le $f^8(r)$ saranno perciò tangenti alle $C^6(r)$ di una superficie sestupla delle $f^{2 \cdot 8}(r^3)$, cioè di una $f^{12 \cdot 8}(r^{18} l)$, lungo una linea l di ordine $15 + 24 = 39$, incontrante r in 24 punti. Lo specchiamento rispetto a una $f^8(r)$ assegnata muterà le $f^8(r)$ generiche in superficie aventi la suddetta $f^{12 \cdot 8}(r^{18})$ come unica aggiunta, cioè in $f^{13 \cdot 8}(r^{19} l^2)$. Le f^8 sezioni generiche di M^8, che si proiettano in superficie $f^4 + R^3 = 3f^4 - \varphi^5$, si muteranno pertanto in $3f^{13 \cdot 8}(r^{19} l^2) - f^{2 \cdot 8}(r^3) = f^{37 \cdot 8}(r^{54} l^6)$: la loro aggiunta $f^{36 \cdot 8}(r^{53} l^5)$ si compone della precedente $f^{12 \cdot 8}(r^{18} l)$ corrispondente a l, e di una $f^{24 \cdot 8}(r^{35} l^4)$, 4-secante le $C^6(r)$, corrispondente a r. A titolo di controllo, constatiamo che l'intersezione complessiva di due fra le $f^{37 \cdot 8}(r^{54} l^6)$, di ordine 37.37.8 . . . . = 10.952

si compone delle parti seguenti:
la r con multiplicità 54^2 . . . . = 2.916
la l di ordine 39, che conta per 39.6.6 unità . . . . . . = 1.404
le 17 rette di M^8 incidenti a r, multiple di ordine $54 - 37 = 17$, e che contano complessivamente per 17^3 unità . . . . = 4.913
42 cubiche triple, bisecanti r e appoggiate a l, per 42.3.3.3 unità = 1.134
(il loro numero $42 = 39.14 - 24.21$ è dato dalle intersezioni di l, fuori di r, colla superficie $f^{14 \cdot 8}(r^{21})$ luogo delle cubiche di M^8 bisecanti r; la multiplicità 3 è data dalla differenza $2.54 + 6 - 3.37$).
17 curve C^{17}, semplici, corrispondenti nello specchiamento alle rette di M^8 incidenti a r e 17^{ple} per le $f^{37 \cdot 8}$; 17.17 unità . . . = 289
Infine una parte variabile in ordine 8.37 . . . . = 296

10.952

Lo specchiamento rispetto a una bisecante delle $C^6(r)$ del tipo più generale, ossia una $f^{(2k+1)8}(r^{3k+1})$, è rappresentato dalle equazioni:

$$[2] \qquad \begin{aligned} f' &= (12k + 37)f - (18k + 54)r - 6l \\ r' &= (\ 8k + 24)f - (12k + 35)r - 4l \\ l' &= (\ 4k + 12)f - (\ 6k + 18)r - \ l \end{aligned}$$

che si riducono alle precedenti [1] ponendovi $k = 0$, e introducendovi come nuove variabili $f - r$ in luogo di f, e $12f - 18r = 6(2f - 3r)$ in luogo di ψ.

punto d'incontro X delle due rette componenti la δ; e su ciascuna di queste rette separatamente rimane valida la relazione armonica suindicata ([1]). Se la superficie Φ da specchiare passa per X, altrettanto avviene per la sua trasformata. Se invece la superficie Ω passa per X, e così per conseguenza anche la retta $s = AB$, il punto P starà certo sulla polare di s rispetto alla coppia di rette δ, ma non cadrà necessariamente in X. Se $P \neq X$, si ha ancora la prospettività di centro P, in questo caso fra le due rette componenti la δ. Se invece P coincide con X ([2]), la superfice trasformata di Φ conterrà per intero, in generale, la coppia di rette in parola; ma si limiterà in generale a passare per P se Φ contiene essa questa coppia di rette. Le due rette sono in ogni caso fondamentali per la trasformazione (specchiamento). Se la superficie Ω passa per la C^{21} doppia della rigata R^{35}, e perciò si rappresenta sul piano doppio α con curva di diramazione comprendente come parte la $\mathbf{K}^7$, dalla superficie trasformata di Φ si staccherà come parte la R^{35}. In questo caso Ω è pure tangente a una ulteriore ∞^1 di coniche δ, lungo una linea del tipo della l_0 considerata al n. prec. Nello specchiamento sono allora rette fondamentali di 2ª specie le sole generatrici di R^{35} appoggiate a tale linea.

Nello specchiamento rispetto a una superficie Ω ogni superficie bisecante le δ conserva la propria linea di diramazione nel piano α; acquista solo in più come componente doppia, perciò trascurabile, la linea di diramazione di Ω, cioè l'immagine delle δ a cui Ω è tangente, salvo che essa passi per la linea di contatto oggettiva di Ω con que-

---

([1]) Analiticamente, sulla conica $x_1 x_3 - \lambda x_2^2 = 0$, supposto che la retta AB sia la $x_2 = 0$, perciò il punto P cada in $(0, 1, 0)$, si corrisponderanno i due punti generici $\left(\rho, \pm\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, 1\right)$, dove ρ è un parametro. Se facciamo tendere λ a zero, perciò la conica alla coppia di rette $x_1 x_3 = 0$, e ρ tende pure a zero in modo che $\lim \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} = a$, al limite si corrisponderanno i due punti $(0, \pm a, 1)$ della retta $x_1 = 0$, armonici rispetto alla $x_2 = 0$ e al punto $(0, 1, 0)$. È anche ovvio che per es. nel caso di un'iperbole, qualora la AB sia la retta all'infinito del piano e P il centro della curva, la corrispondenza in parole è la simmetria rispetto a questo centro; e tale rimane se l'iperbole si spezza nei due asintoti.

([2]) Così appunto avviene sulla M^4 qui considerata in corrispondenza alle intersezioni della superficie Ω colla curva doppia C^{21} della rigata R^{35}. In questo caso l'omologia armonica dianzi considerata degenera.

ste δ. Viceversa, se quest'ultima linea è linea doppia della bisecante considerata, cessa di essere tale in seguito allo specchiamento (viene «sciolta», come in altre trasformazioni birazionali). Un sistema lineare di superficie bisecanti le δ viene mutato in un sistema anche di bisecanti; in particolare il sistema $|f^4|$ delle sezioni iperpiane di M^4, specchiato ripetto a una $\Omega = f^4 + k\varphi^5$ generica, si muta in un sistema $|f^4 + (2k+6)\varphi^5|$, le cui linee di diramazione nel piano α sono composte delle C^6 di diramazione delle singole f^4 e della C^{2k+6} di diramazione della Ω, parte fissa, contata due volte. Nello stesso specchiamento, una $f^4 + i\varphi^5$ generica si muta in una $f^4 + (i + 2k + 6)\varphi^5$.

Le due corrispondenze birazionali fra superficie F_1, F_2, bisecanti le δ e aventi nel piano doppio α la stessa linea di diramazione, a parte eventuali componenti doppie (quali ad es. le superficie f^4 e X considerate alla fine del n. preced.), possono realizzarsi mediante specchiamenti rispetto a due convenienti bisecanti Ω, Ω'. Indicando con $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, le intersezioni delle superficie F_1, F_2 con una stessa δ generica, Ω e Ω' saranno luoghi rispett. delle coppie di punti delle singole δ armoniche comuni a $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ e rispett. a $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ (1). Variando F_1, F_2 in due sistemi lineari, le superficie Ω, Ω' varieranno generalmente entrambe. Il prodotto di due o più specchiamenti non equivale generalmente, sulla varietà, a un unico specchiamento (poichè in una forma di 1ª specie il prodotto di più involuzioni non è in generale un'involuzione); ma, limitatamente a una coppia assegnata di superficie omologhe, si può sempre realizzarne la trasformazione con due diversi specchiamenti.

Esaminiamo più particolarmente le relazioni che intercedono fra due superficie F_1, F_2 aventi nel piano doppio α la stessa linea di diramazione (salvo componenti doppie), e le due Ω, Ω' fondamentali per gli specchiamenti in cui si corrispondono le due prime. Le superficie F_1, F_2 sono tangenti alle stesse ∞^1 coniche δ, e ciascuna di queste è incontrata sia da Ω che da Ω' in punti generalmente distinti e armo-

(1) Le superficie Ω, Ω' incontreranno ogni δ in coppie di punti armoniche anche fra loro (cioè gli specchiamenti rispetto a Ω e Ω' saranno permutabili). E le coppie armoniche comuni a $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ avranno per luogo una superficie ulteriore, fondamentale per uno specchiamento dal quale ciascuna delle 4 superficie F_1, F_2, Ω, Ω', viene trasformata in sè stessa.

nici rispetto ai punti di contatto con F_1, F_2. Per l'intersezione $F_1 F_2$ valgono le considerazioni seguenti:

1) Può avvenire che quest'intersezione sia composta soltanto di linee unisecanti le δ. Ciascuna di queste linee appartiene allora anche a entrambe le superficie Ω, Ω', ed è altresì linea di contatto delle δ con una di queste (colla Ω', se supponiamo, per fissare le idee, che lungo di essa sia $A_1 \equiv A_2$). Viceversa, l'intersezione di una delle F_1, F_2 con una delle Ω, Ω' appartiene sempre anche alla rimanente. D'altra parte due superficie qualunque bisecanti le δ devono incontrare almeno ∞^1 fra queste in coppie armoniche; e se, per una delle F_1, F_2 e una delle Ω, Ω', ciò avviene in punti generalmente tutti distinti, le intersezioni di queste ∞^1 δ colla superficie F_1 o F_2 considerata apparterranno pure all'altra di queste, e si avrà così un'intersezione parziale $F_1 F_2$ bisecante le δ, contrariamente all'ipotesi fatta da principio. Pertanto la relazione armonica tra le intersezioni di una stessa δ con una delle F_1, F_2 e una delle Ω, Ω' non potrà in questo caso verificarsi che lungo l'intersezione $F_1 F_2$; e quest'intersezione sarà perciò composta di due parti distinte, lungo le quali Ω e Ω' saranno risp. tangenti alle δ. Nei punti comuni a queste due parti, Ω, Ω' e una delle F sono tutte tangenti alla δ.

2) Ogni punto comune a F_1, F_2 e che non appartenga in pari tempo a una, per es. Ω', delle due superficie Ω, Ω' avrà il suo coniugato rispetto a Ω' anche comune a F_1, F_2, e distinto dal primo. Qualora ciò si verifichi, si ha una linea ε intersezione parziale di F_1, F_2 e bisecante una ∞^1 di δ. Supposto che lungo la ε sia $A_1 \equiv A_2, B_1 \equiv B_2$, la superficie Ω passerà pur essa per ε, mentre la Ω' sarà soltanto vincolata a incontrare le δ appoggiate a ε in coppie di punti armoniche alle precedenti.

3) Anche in questo caso ogni linea η intersezione parziale di F_1, F_2 e unisecante le δ (certo esistente) apparterrà a entrambe le superficie Ω, Ω', e sarà la linea di contatto di una di queste, e non dell'altra, colle δ anzidette (1).

(1) La linea di contatto di una delle superficie Ω, Ω' colle δ appartiene sempre anche all'altra delle due, pur senza esserne in generale linea di contatto colle δ; e appartiene pure a entrambe le superficie F_1, F_2. Se invece una linea l unisecante le δ è linea di contatto di queste con entrambe le superficie Ω, Ω', la coppia armonica comune a queste e armonica pure a $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ ha un elemento sulla l, ma l'altro completamente indeterminato; una delle superficie F_1, F_2 non passerà in generale per l, e l'altra avrà l come linea doppia.

4) La connessione fra le due linee ε, η non può aver luogo che attraverso i punti in cui la ε, bisecante le δ, è tangente a una di queste (¹). In ciascuno di questi punti A_1, B_1, A_2, B_2 vengono tutti a coincidere; la superficie designata in 2) con Ω è anche tangente alla δ, ma non la Ω' (in generale); è pertanto Ω quella, fra le due, che è tangente alle δ lungo la linea η (²).

Date in modo generico su M^4 due superficie F_1, F_2 bisecanti le coniche δ e colla stessa linea di diramazione (semplice) nel piano α, si verifica generalmente il caso 1). Date invece in modo generico F_1 e una delle superficie Ω, Ω', per l'intersezione $F_1 F_2$ si verificherà generalmente il caso 2) e 4). Applicando a un sistema lineare $|F_1|$ un medesimo specchiamento Ω', ogni intersezione $F_1 \Omega'$ appartiene altresì alla corrispondente superficie F_2, e costituisce la linea η di questo specchiamento; varia, colla coppia $F_1 F_2$, la superficie Ω. Ma, assegnati a priori due sistemi lineari $|F_1|$ e $|F_2|$ colle stesse linee di diramazione (semplici) nel piano α, varieranno in generale colla coppia $F_1 F_2$ entrambe di superficie Ω, Ω', poichè l'intersezione $F_1 F_2$ invaderà generalmente con ogni sua parte l'intera varietà a 3 dimensioni.

Se F_1, F_2 sono rispettivamente una sezione iperpiana di M^4 e la superficie che corrisponde a questa in un altro qualsivoglia sistema lineare ∞^4 di superficie di generi uno bisecanti le δ (n. prec.), Ω e Ω' saranno tangenti alle δ lungo la linea doppia di F_2, e inoltre, al più, lungo una linea comune a F_1 e F_2 (³).

(¹) Un punto comune a ε e η è punto di contatto delle superficie F_1, F_2; e tale non può essere un punto di ε senza che lo sia pure l'altra intersezione di ε colla stessa δ. Questi due punti, se distinti, sono allora punti doppi della ε.

(²) Questi punti comuni alle linee ε e η sono altresì le intersezioni delle linee di contatto di F_1, F_2 colle superficie luoghi dello δ a cui rispett. sono tangenti. In questi punti F_1 e F_2 sono perciò tangenti fra loro, e sta bene che la loro intersezione complessiva vi abbia punti doppi, comuni alle due parti ε e η. In questo caso F_1 e Ω', F_2 e Ω' segano in coppie armoniche le ∞^1 δ appoggiate alla linea ε; per F_1 e Ω, F_2 e Ω la relazione armonica si verifica sulle δ appoggiate a η, linea di contatto di Ω colle δ e apparteneote in pari tempo a F_1 e F_2.

(³) Nell'esempio più semplice di specchiamento, cioè delle sezioni iperpiane di M^4, $|f^4| \equiv |F_1|$, rispetto a una fissa di queste stesse sezioni $f' \equiv \Omega'$, le F_2 sono superficie $f^4 + 6\varphi^5$ aventi come linea doppia comune la C^{15}_{10} di contatts di f' colle δ, e passanti rispett. per le singole quartiche ff' (linee η). L'intersezione ulteriore di ogni $f \equiv F_1$ colla corrispondente F_2 è una linea ε, di ordine 30, bisecante una ∞^1 di δ. Le Ω sono tutte tangenti alle δ lungo la C^{15}_{10} anzidetta, e inoltre rispett. lungo le quartiche $F_1 f' \equiv \eta$. Poichè queste quartiche incontrano le φ^5 in

12. – Consideriamo di nuovo su M^8, in generale, un sistema lineare di superficie $f^{8n}(r^{n+i})$ $\left(n > 1;\ 1 < i < \frac{n-1}{2}\right)$, equivalenti a $(n-2i)f^4 + i\varphi^5$ sopra M^4, incontranti le $C^6(r)$ o rispettivamente le coniche δ in $2n-4i$ punti variabili; il loro sistema rappresenterà una varietà μ contenente una congruenza del 1° ordine di curve γ^{2n-4i}, corrispondenti alle $C^6(r)$, o rispettivamente alle δ. Tali superficie, se di generi uno, devono mancare di tutte le aggiunte successive alla prima; e poichè su M^4 le loro $(n-2i)^{\text{sime}}$ aggiunte sono superficie $i\varphi^5$, e ora $n-2i > 1$, dovrà esservi su M^8 una linea l, o rispettivamente una l' su M^4 di multiplicità $> n-2i$; diciamo $n-2i+h$, con $h > 0$, unisecante le $C^6(r)$ o rispettivamente le δ. E le δ appoggiate a l' dovranno formare una superficie multipla di φ^5 secondo un intero supe-

5 punti, le δ appoggiate a ciascuna di esse hanno per luogo una superficie 5φ, di genere 3 (come ∞^1 di δ), perciò con tre δ doppie, nei piani delle 3 coniche della rigata R^3 che congiungono a due a due le 3 intersezioni di questa col piano di quella quartica. Le linee di diramazione delle Ω nel piano α si compongono perciò delle C^5 immagini di queste 5φ, più due parti fisse: la K^7, e la C^6 immagine della C_{10}^{15} e linea di diramazione di f'. Le Ω sono pertanto superficie $f^4 + 6\varphi^5$, e hanno con le singole f le stesse intersezioni, di ordine 34, che le F_2. La linea ε, di genere 37, è incontrata dalle δ che essa biseca nelle coppie di un'involuzione di genere 10 con 36 punti doppi, dei quali 15 sono intersezioni colla η, e 21 punti doppi di altrettante δ riducibili.

Il prodotto di due specchiamenti rispetto a sezioni iperpiane f', f'', applicato a una sezione iperpiana generica $f^4 \equiv F_1$, fornisce invece un esempio di superficie F_1, F_2 con intersezione del tipo 1). Le superficie F_2 sono $f^4 + 12\varphi^5$ con due linee doppie di ordini 51 e 15. Supposto di applicare per primo lo specchiamento rispetto a f', la seconda di queste due linee è la linea che, nello specchiamento rispetto a f'', corrisponde alla linea contatto di f'. Le superficie Ω, Ω' sono anche $f^4 + 12\varphi^5$, tangenti entrambe alle δ lungo le due linee doppie di F_2. Il luogo dei punti uniti del prodotto dei due specchiamenti è una $f^4 + 3\varphi^5$ tangente alle δ lungo la C^4 intersezione $f'f''$, e la cui linea di diramazione nel piano α è composta della C_3^5 immagine di tale C^4 e della K^7. L'intersezione $F_1 F_2$, di ordine 64, è composta della C_{18}^{19} intersezione di F_1 e $f^4 + 3\varphi^5$, e di una C_{82}^{45}, con 99 punti comuni. Le immagini di queste due linee nel piano α sono rispett. di ordini 11 e 18; e le linee di diramazione di Ω e Ω', entrambe di ordine 30, sono composte delle sestiche di diramazione di f' e f'' e rispett. delle due curve precedenti, la prima integrata ancora con K^7. I 66 punti comuni alla C^{11} e a ciascuna delle due sestiche appartengono pure alla C^{18}; metà di essi, 15 sulla sestica di f' e 51 sull'altra, sono immagini di coniche δ comuni a F_2, Ω, Ω'; gli altri, di punti comuni a C_{18}^{19} e C_{82}^{45}. I rimanenti 33 punti comuni a queste due linee stanno sulla linea di contatto di $f^4 \equiv F_1$ colle δ, e hanno per immagini nel piano α punti di contatto di C^{11} e C^{18}.

riore a $\frac{i}{h}$; poichè questa superficie, contata h volte, deve risultare multipla di φ^5 di ordine $> i$. Le cubiche di M^8 bisecanti r e appoggiate a l (1) (su M^4, le generatrici di R^{35} appoggiate a l') saranno linee h^{ple} per le $f^{8n}(r^{n+i})$ (rispett. per le $(n-2i)f^4 + i\varphi^5$) e fondamentali di 2ª specie per la corrispondenza con μ.

L'aggiunta unica delle $f^{8n}(r^{n+i})$ potrà essere composta di più aggiunte parziali irriducibili $f^{8n_k}(r^{n_k+i_k})$ con $\Sigma n_k = n-1$, $\Sigma i_k = i$, ogni singola i_k essendo $\geqq 0$. Ciascuna delle parti suddette avrà la l come multipla di un ordine $n_k - 2i_k + h_k$, e le cubiche menzionate come multiple di ordine h_k, ogni singola h_k essendo pure $\geqq 0$, e $\Sigma h_k = h$. Anzi le h_k saranno tutte > 0, e pertanto ciascuna delle aggiunte parziali conterrà effettivamente le cubiche bisecanti r e appoggiate a l; invero tali aggiunte sono tutte riferibili a rigate, razionali o no, e perciò prive di tutte le successive aggiunte (2).

Poichè le $f^{8n}(r^{n+i})$ segano le $C^6(r)$ in $2n-4i$ punti variabili, la loro multiplicità $n-2i+h$ lungo la linea l sarà $\leqq 2n-4i$, perciò $h \leqq n-2i$. E i due casi $h = n-2i$ e $h < n-2i$ si presentano in modo essenzialmente diverso. Nel primo caso, $h = n-2i$, le $f^{8n}(r^{n+i})$ non hanno colle $C^6(r)$ appoggiate a l nessuna intersezione variabile; e la superficie di queste $C^6(r)$ è una aggiunta parziale delle $f^{8n}(r^{n+i})$, alla quale corrisponde in μ una linea λ unisecante le ∞^1 γ omologhe alle dette $C^6(r)$. La corrispondenza fra le due congruenze delle $C^6(r)$ e delle γ, come enti ∞^2, è sempre biunivoca senza eccezioni (n. 9); ma è degenere la corrispondenza puntuale fra una qualsiasi $C^6(r)$ appoggiata a l e l'omologa γ appoggiata a λ; e punti singolari su di esse sono questi due punti d'appoggio. E viceversa, se le $C^6(r)$ appoggiate a l formano un'aggiunta parziale delle $f^{8n}(r^{n+i})$, esse non avranno con

(1) Cioè le cubiche contenute nella superficie $f^{14\cdot 8}(r^{21})$ di cui al n. 7, e che passano per i punti non appartenenti a r e comuni a questa superficie e alla linea l.

(2) Mentre una curva razionale è priva di aggiunte d'indice uno, ma può averne d'indice superiore (per es. una sestica con 10 punti doppi non impone alcuna condizione alle aggiunte d'indice due, che sono di ordine zero), una superficie razionale o riferibile a una rigata irrazionale non ha – su una varietà a tre dimensioni che la contenga – aggiunte di alcun indice: poichè, se ne avesse una d'indice i, questa, insieme alla superficie stessa contata $i-1$ volte, ne costituirebbe una superficie i-aggiunta.

queste superficie alcuna intersezione variabile; e saremo perciò nel caso sopra indicato $h = n - 2i$. Le altre aggiunte parziali saranno $(2n_k - 4i_k)$ - secanti le $C^6(r)$ generiche; e non potendo neppure esse incontrare le $C^6(r)$ appoggiate a l in punti variabili, per ciascuna di esse darà $h_k = n_k - 2i_k$, e la linea l multipla di ordine $2(n_k - 2i_k)$.

Qualora invece sia $h < n - 2i$, sarà pure per ogni aggiunta parziale $h_k < n_k - 2i_k$. Ai punti di l corrisponderanno in μ curve di ordine $n - 2i + h$; alle $C^6(r)$ appoggiate a l, linee γ di ordine $2n - 4i$ spezzate in una delle precedenti di ordine $n - 2i + h$ e in una curva residua di ordine $n - 2i - h$ in corrispondenza biunivoca colla $C^6(r)$. Quando una $C^6(r)$ non incidente a l si spezza in due cubiche, la γ corrispondente è composta di due curve di ordine $n - 2i$. Per le $C^6(r)$ appoggiate a l e in pari tempo spezzate in due cubiche, una sola di queste cubiche, generalmente, è incontrata da l; quest'una è curva fondamentale di 2ª specie h^{pla}, e ad essa corrisponde su μ una C^h. Si ha in tal caso una γ complessiva composta di 3 parti, di ordini $n - 2i, h, n - 2i - h$; accoppiando la seconda parte alla prima, ovvero alla terza, si hanno le due composizioni accennate di sopra per la γ corrispondente a una $C^6(r)$ appoggiata a l, oppure spezzata in due cubiche.

13. - Alla distinzione dei due casi $h = n - 2i$ e $h < n - 2i$ si perviene anche muovendo da altre considerazioni.

Il sistema $|f^{8n}(r^{n+i})|$, per valori assegnati di n ed i e con una linea l di multiplicità $n - 2i + h$ unisecante una ∞^1 di $C^6(r)$, potrà variare con continuità entro M^8, variando la linea l e solo restandone invariati i caratteri. Varieranno allora la superficie luogo delle $C^6(r)$ appoggiate a l, e la linea ξ immagine di questa ∞^1 di $C^6(r)$ nel piano α (n. 7, 9 e seg.). Questa linea, birazionalmente identica alla l, se non è una retta, potrà certo, variando, acquistare un punto doppio in più (perchè in ogni sistema ∞^k di linee piane algebriche di ordine > 1 ve ne sono ∞^{k-1} con un punto doppio in più); e la l unisecante di una ∞^1 di $C^6(r)$ diventa allora bisecante di una particolare fra queste. Dire che la ξ è una retta, equivale a dire che le $C^6(r)$ appoggiate a l hanno per luogo una $f^{2 \cdot 8}(r^3)$, ossia le coniche δ appoggiate a l' hanno per luogo una φ^5. In tale caso (n. prec.) è $\frac{i}{h} < 1$, ossia $h > i$; e poichè d'altra parte $h < n - 2i$, segue altresì $i < \frac{n}{3}$.

Se invece la linea ξ del piano α è di ordine > 1, la l deve essere tale da potere, variando, appoggiarsi due volte a una $C^6(r)$. Questa $C^6(r)$ ha allora colle $f^{8n}(r^{n+i})$ complessivamente $4(n+i) + 2(n - 2i + h) = 6n + 2h$ insezioni; è dunque linea base $(2h)^{\text{pla}}$ del sistema $|f^{8n}(r^{n+i})|$, e per la corrispondenza tra M^8 e μ può essere soltanto linea fondamentale di 2ª specie (n. 9). La linea corrispondente γ essendo di ordine $2n - 4i$, ciò richiede che la $C^6(r)$ considerata sia $(2n - 4i)^{\text{pla}}$ per le $f^{8n}(r^{n+i})$, e la γ omologa 6^{pla} per le Φ; quindi $h = n - 2i$, e la linea l anche $(2n - 4i)^{\text{pla}}$ per le $f^{8n}(r^{n+i})$. Da essa si sarà staccata come parte la detta $C^6(r)$.

Le aggiunte parziali del sistema $|f^{8n}(r^{n+i})| = |\mathrm{F}|$, tranne quell'una che è luogo di linee $C^6(r)$, saranno anche tutte $f^{8n_k}(r^{n_k+i_k})$ aventi la l multipla di ordine $2n_k - 4i_k$.

Il sistema $|\mathrm{F}|$, composto di superficie $(2n - 4i)$-secanti le $C^6(r)$, con linea l di multiplicità $2n - 4i$ unisecante una ∞^1 di $C^6(r)$, è ovvia generalizzazione dei sistemi di superficie bisecanti le $C^6(r)$, ossia le δ su M^4, con linea doppia, qui considerati ai n. 10, 11 (pei quali $n = 2i + 1$). Anche qui su M^4, se la superficie Λ luogo della δ appoggiata a l non contiene come parte la rigata R^{35}, la linea l passerà per i punti doppi delle δ riducibili contenute in Λ, i quali saranno altresì punti doppi della superficie Λ; e alla Λ corrisponderà nel piano α una linea ovunque tangente alla $\mathbf{K}^7$. Oppure la Λ conterrà come parte la rigata R^{35}, e la C^{21} doppia di questa rigata sarà $(n - 2i)^{\text{pla}}$ per il sistema $|F|$; la Λ comprenderà, oltre la R^{35}, una parte residua Λ_0 con una curva l_0 di multiplicità $2n - 4i$ per le Φ, del tipo della l_0 del n. 10. Nei due casi, la linea l o rispettivamente l_0 sarà linea di contatto totale o parziale delle δ con una superficie Ω bisecante tali coniche e nel secondo caso passante anche per la C^{21} doppia della rigata R^{35}; e l'ordine delle superficie F potrà ridursi con una conveniente trasformazione birazionale su M^4. Per convincerci di quest'ultimo passo valgono le considerazioni seguenti:

1) Se una $f^4 + i\varphi^5$ irriducibile bisecante le coniche ha una curva doppia l, unisecante le δ, di immagine Γ^k nel piano α, sicchè

la sua curva di diramazione effettiva (semplice) in questo piano si riduce a una $C^{2(i-k)+6}$, esiste su M^4 una $f^4 + (i - k)\varphi^5$ anche bisecante le δ, priva di linea doppia, con quest'ultima sola curva di diramazione; perciò birazionalmente equivalente alla $f^4 + i\varphi^5$ proposta. Invero nel sistema continuo delle C^{2i+6} di diramazione delle $f^4 + i\varphi^5$, quelle che contengono come parte una qualsiasi Γ^k, o anche una Γ^k doppia ($k \leqq i$), devono avere la parte residua, in questo secondo caso una $C^{2(i-k)+6}$, variabile anche in un sistema continuo. E poichè questo fatto, qualunque sia k, si verifica per le $f^4 + i\varphi^5$ composte di una $k\varphi^5$ e di una $f^4 + (i - k)\varphi^5$, questo sistema continuo di $C^{2(i-k)+6}$ non può essere che quello delle curve di diramazione delle $f^4 + (i - k)\varphi^5$ [1].

2) La trasformazione birazionale della $f^4 + i\varphi^5 \equiv F_1$ nella $f^4 + (i - k)\varphi^5 \equiv F_2$ può avvenire in due modi diversi, per mezzo dello specchiamento rispetto a due diverse superficie Ω, Ω' anche bisecanti le δ (n. 11). Variando la $f^4 + i\varphi^5$ con continuità entro un sistema lineare, altrettanto avviene dell'altra; variano pure con continuità le Ω, Ω'; e una delle due dà luogo a trasformazioni contenute in una medesima trasformazione birazionale su M^4 (n. 10).

3) Se una superficie $\lambda f^4 + \mu\varphi^5$, 2λ-secante le δ, ha la linea l considerata sulla $k\varphi^5$ come $2\lambda^{\text{pla}}$, anche questa linea multipla viene « sciolta » colla detta trasformazione su M^4, senza che altre ne sorgano.

Se la superficie Ω, sulla M^8, è una $f^{(2k+1)\cdot 8}\,(r^{3k+1})$, lo specchiamento rispetto ad essa è rappresentato dalle equazioni [2] della nota (2) a pag. 665; e pertanto le $f^{8n}\,(r^{n+i})$ aventi la l multipla di ordine $2n - 4i$ verranno trasformate in superficie segate da forme di ordine:

$$(12k + 37)n - (8k + 24)(n + i) - (4k + 12)(2n - 4i) =$$
$$= (-4k - 11)\,n + (8k + 24)i = n - (4k + 12)(n - 2i);$$

numero che, essendo $i < \frac{n}{2}$, è certo minore di n.

---

[1] Le $f^4 + i\varphi^5$ contenenti una $k\varphi^5$ come parte, e quelle aventi una curva doppia unisecante le δ di questa $k\varphi^5$, costituiscono bensì sistemi distinti, ma colle stesse curve di diramazione. Così avviene ad es. nel caso più semplice $i = k = 6$, il secondo sistema di superficie essendo costituito dalle $f^4 + 6\varphi^5$ ottenute collo specchiamento delle sezioni iperpiane di M^4 rispetto a una particolare fissa tra queste.

14. - Sulla M^4 di S_4 proiezione della M^8 da una sua retta r, le sezioni iperpiane f^4 e le φ^5 costituiscono una base del sistema delle superficie; e ogni superficie è pertanto del tipo $\lambda f^4 + \mu\varphi^5$ (λ, μ interi; il secondo anche negativo). Essa incontra le coniche δ in 2λ punti, e può quindi riferirsi in corrispondenza $(2\lambda, 1)$ al piano α sul quale già più volte abbiamo rappresentata la congruenza delle δ; essa è rappresentabile, in altri termini, sul detto piano $(2\lambda)^{\text{plo}}$, con curva di diramazione il cui ordine è dato dal numero dei punti doppi della serie lineare $g^1_{2\lambda}$ le δ di una φ^5 segano sulla curva intersezione di tale φ^5 con una $\lambda f + \mu\varphi^5$ generica.

Per calcolarlo, osserviamo anzitutto che, l'intersezione $f^4\varphi^5$ essendo una C^2_5, l'intersezione $(\lambda f^4, \varphi^5)$ è di genere:

$$2\lambda + 5\binom{\lambda}{2} - (\lambda - 1) = \frac{5}{2}\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + 1$$

Da quest'espressione si può ricavare il genere della intersezione $(\lambda f^4 + \mu\varphi^5, \varphi^5)$ poichè aggiungendo alla superficie λf^4 una o più φ^5, la sua intersezione con φ^5 viene aumentata di un egual numero di coniche 2λ-secanti la curva primitiva, con aumento del genere ciascuna volta di $2\lambda - 1$ unità. L'intersezione $(\lambda f^4 + \mu\varphi^5, \varphi^5)$ è pertanto di genere $\frac{5}{2}\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + 1 + \mu(2\lambda - 1)$; e la serie $g^1_{2\lambda}$ su di essa ha

$$5\lambda^2 + \lambda + 2\mu(2\lambda - 1)$$

punti doppi. *Questo è pertanto l'ordine della curva di diramazione del piano* $(2\lambda)^{\text{plo}}$ *su cui può rappresentarsi la superficie* $\lambda f^4 + \mu\varphi^5$ *generale* (1).

Le intersezioni della superficie $\lambda f^4 + \mu\varphi^5$ colla curva doppia, di ordine 21, della rigata R^{35} (n. 7), in numero di $21\lambda + 7\mu$ (valutandone opportunamente le eventuali multiplicità), corrispondono a contatti della curva di diramazione anzidetta colla $\mathbf{K}^7$ immagine delle ∞^1 δ spezzate in due rette.

Lo specchiamento della $\lambda f^4 + \mu\varphi^5$ rispetto a una qualsiasi bisecante delle δ, e sia una $f^4 + i\varphi^5$, ne lascia invariata la curva di diramazione, aumentandola soltanto della curva di diramazione C^{2i+6} di

(1) Risultato valido anche per valori negativi di μ. Per es. per $\lambda = 2$, $\mu = -1$, cioè per la rigata R^3 contenuta in M^4, la curva di diramazione è di ordine 16.

quest'ultima superficie, contata $2\lambda(2\lambda-1)$ volte. Le f^4 sono mutate infatti in $f^4+(2i+6)\varphi^5$, e le φ^5 in sè stesse; perciò μ in $\mu+(2i+6)\lambda$. Viceversa, lo specchiamento considerato alla fine del n. prec., cioè di una superficie $\lambda f^4+\mu\varphi^5$ con curva $(2\lambda)^{\text{pla}}$ avente l'immagine in α di ordine superiore a $\frac{\mu}{\lambda}$, farà diminuire l'ordine sopra indicato della curva di diramazione di un numero di unità superiore a $\frac{\mu}{\lambda}\cdot 2\lambda(2\lambda-1)$, cioè superiore a $2\mu(2\lambda-1)$; lo ridurrà quindi a un valore inferiore a $5\lambda^2+\lambda$, cioè in altri termini renderà negativo μ. Le superficie trasformate, considerate sulla M^8 di S_6, se segate da forme di ordine $n'>1$, avranno la retta r di multiplicità inferiore a n'; e avranno perciò un'altra linea di multiplicità $>n'$.

15. - Supponiamo ora $i<h<n-2i$, e la linea l contenuta perciò in una $f^{2.8}(r^3)$ (ossia l' in una φ^5) (1). La l dovrà incontrare le altre $f^{2.8}(r^3)$, fuori di r, in un solo punto, poichè la $f^{2.8}(r^3)$ che la contiene ha comune con queste altre una sola $C^6(r)$. Indicato pertanto con p l'ordine della l e con q il numero dei punti in cui essa si appoggia ad r, sarà $2p-3q=1$, $q=\frac{2p-1}{3}$. Il caso più semplice è $p=2$, $q=1$, cioè che l sia una conica incidente alla retta r; conica che potrebbe eventualmente spezzarsi in due rette incidenti, una delle quali in pari tempo incidente a r, mentre l'altra sarebbe la effettiva l, direttrice della ∞^1 di $C^6(r)$ costituenti la $f^{2.8}(r^3)$. Non sono invece possibili gli altri casi $p=5$, $q=3$, nè a fortiori i successivi. Invero una curva di 5° ordine trisecante di r e direttrice di una $f^{2.8}(r^3)$ può per continuità, variando convenientemente la $f^{2.8}(r^3)$ nella relativa rete, spezzarsi in una conica incidente a $r\,(p=2,\ q-1)$ e in una cubica

(1) In quest'ipotesi è compreso il caso che la superficie $f^{2.8}(r^3)$ suddetta abbia come multipla una delle 17 rette di M^8 incidenti a r; le $C^6(r)$ in essa contenute si spezzano perciò in questa retta s, parte fissa, e una C^5 variabile residua [nota (3) a pag. 655].

La s, multipla di ordine i per le $f^{8n}(r^{n+i})$, avrà allora per queste particolari f la multiplicità $i+(n-2i+h)=n-i+h>n-1$; e l'ordine n delle forme che segano le dette superficie potrà ridursi colla proiezione doppia della M^8 dal piano rs [nota (1) a pag. 655).

bisecante r e incidente a questa conica; ciò equivalendo, per la φ^5 proiezione della $f^{2.8}(r^3)$ da r, allo spezzarsi di una conica direttrice della ∞^1 di coniche δ in una direttrice rettilinea e in una seconda retta, parte di una δ; cioè, nella consueta rappresentazione piana della φ^5, al portarsi in linea retta di 3 punti fondamentali semplici. D'altra parte la linea l ha per le $f^{8n}(r^{n+i})$ la multiplicità $n-2i+h$, e le cubiche bisecanti r e appoggiate a l solamente la multiplicità h; non è pertanto possibile se $n > 2i$ render eguali le due multiplicità, in modo che la seconda linea possa staccarsi come parte della prima.

16. - Si abbia pertanto sulla M^8 un sistema lineare $|f^{8n}(^{n+i})|$ con in più una linea di multiplicità $> n-i$, la quale può essere soltanto una conica appoggiata a r, o una retta avente con r su M^8 una secante comune; direttrice perciò in ambo i casi di un fascio di $C^6(r)$ su una $f^{2.8}(r^3)$. E vediamo come questo sistema con una trasformazione birazionale su M^8 possa mutarsi in altro di ordine inferiore.

Supponiamo anzitutto che questa linea almeno $(n-i)^{\text{pla}}$ sia una retta s, avente con r su M^8 la secante comune t. Per lo spazio $S_3 \equiv \Sigma$ delle tre rette r, t, s passano ∞^2 spazi S_4, che incontrano ulteriormente M^8 secondo quintiche ellittiche (γ_1^5), bisecanti r e s, e aventi un unico punto comune con t. Individuando su ciascuna di queste γ_1^5 una trasformazione birazionale, risulta definita anche sulla M^8 (come nel caso più generale del n. 3) una trasformazione, per la quale sono unite tutte queste γ_1^5 e tutte le superficie f^8, costituenti una rete Ω, segate dagli spazi S_5 passanti per Σ.

Fissiamo su ogni γ_1^5 la g_2^1 avente come punto doppio l'intersezione unica di questa curva colla t (1). Questa trasformazione involutoria, nella quale le rette r, s figurano simmetricamente, corrisponde pur essa al caso generale del n. 3, e consentirà pertanto la riduzione dell'ordine del sistema $|f^{8n}(r^{n+i})|$. Ne accenniamo qui tuttavia qualche maggiore dettaglio. Le γ_1^5 uscenti da un punto arbitrario P di una delle rette r, s hanno per luogo l'unica f^8 della rete Ω avente P come

(1) Fissando invece su ogni γ_1^5 la g_2^1 in cui sono coniugati i due punti comuni a questa linea e alle r (o alla s), si ha su M^8 l'involuzione risultante dalla proiezione doppia dal piano (ossia dalla conica riducibile) st (o rispett. rt).

punto doppio, segata dallo spazio S_5 determinato da Σ e dall'S_3 tangente in P alla M^8. Su questa f^8, a P corrisponderà una linea incontrante ciascuna γ in un punto equivalente alla differenza $2t - P$ (1); linea differente perciò, sulla f^8, da $2t - P$ solo per una o più linee γ (nessuna di queste, per P generico, essendo riducibile); dunque del tipo $k\gamma + 2t - P$. Calcolando il grado di tale curva sulla f^8, ed eguagliandolo a -2, grado di una curva razionale isolata, si trova $k = 4$ (2); si ha dunque una curva $4\gamma + 2t - P$, di ordine 22. Alle f^8 sezioni iperpiane generiche di M^8 corrispondono perciò superficie aventi le rette r, s come 22$^{\text{ple}}$. L'ordine delle forme che segano su M^8 queste superficie sarà eguale a quello della linea corrispondente a una retta generica g di M^8. Ora la g sta anch'essa su una f^8 della rete Σ, e la linea corrispondente è di nuovo del tipo $k\gamma + 2t - g$ e di grado -2; perciò ancora $k = 4$, e la linea corrispondente a g è di ordine 21. Alle f^8 generiche corrispondono dunque superficie $f^{21.8}(r^{22}\, s^{22})$.

Si verifica immediatamente che la detta curva $4\gamma + 2t - g$ incontra sia r che s in 10 punti, mentre non incontra t; e che la curva di ordine 22 corrispondente a un punto P p. es. di r ha P stesso come punto 6$^{\text{plo}}$, incontra r in altri 5 punti (totale dunque 11), e s in 10 punti (3). Alle rette r e s corrispondono perciò superficie $f^{10.8}(r^{11}\, s^{10})$ e $f^{10.8}(r^{10}\, s^{11})$, costituenti insieme l'aggiunta delle $f^{21.8}(r^{22}\, s^{22})$ che corrispondono alle sezioni iperpiane.

La retta t (fondamentale di 2$^{\text{a}}$ specie) è multipla di ordine 12 per la $f^{21.8}$, e di ordine 6 per ciascuna delle due aggiunte parziali (4) (5).

(1) Scriviamo per brevità t in luogo del punto intersezione della γ considerata colla retta t.

(2) Il grado dlla curva $k\gamma + 2t - P$ e $k^2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) + (-2) + 4k - 2k$; eguagliandolo a -2, si trova appunto $k = 4$.

(3) Fra le ∞^1 γ_1^5 passanti per P ve ne sono dunque 6 sulle quali P è punto unito, 5 per le quali P è punto coniugato all'ulteriore intersezione con r, 10 per le quali è coniugato a una delle due intersezioni con s.

(4) Delle $21.5 = 105$ intersezioni di nna γ colle suddette $f^{21.8}$, $2 \cdot 2 \cdot 22 = 88$ cadono sulle r, s; 5 sono punti generici della γ, corrispondenti alle sue intersezioni colla f^8 omologa alla $f^{21.8}$ considerata; e le rimanenti 12 sono assorbite dall'unico punto comune a γ e a t. Un computo analogo può farsi per le due aggiunte parziali.

(5) Come curve fondamentali di 2$^{\text{a}}$ specie per questa trasformazione involutoria, e tutte aventi per le $f^{21.8}(r^{22}, s^{22})$ multiplicità eguale all'ordine; tutte inoltre particolari γ (razionali) o parti di γ, rileviamo: le 16.2 rette distinte da t e inci-

La trasformazione involutoria su M^8 può rappresentarsi colle equazioni:

$$\begin{aligned} f'^8 &= 21 f^8 - 22 r - 22 s \\ r' &= 10 f^8 - 11 r - 10 s \\ s' &= 10 f^8 - 10 r - 11 s \end{aligned}$$

Una superficie $f^{8n}(r^{n+i_1}, s^{n+i_2})$ viene perciò mutata in una segata da forme di ordine $n - 10i_1 - 10i_2$ e avente lungo le rette r, s rispett. le multiplicità $n - 11i_1 - 10i_2$, $n - 10i_1 - 11i_2$. L'ordine risulta perciò diminuito ogni qualvolta sia $i_1 + i_2 > 0$; perciò certo quando la r sia multipla di ordine $n+i\,(i>0)$ e la s di ordine $> n-i$.

17. Considerazioni analoghe, in parte almeno, possono applicarsi a un sistema $|f^{8n}(r^{n+i})|$ con una conica c multipla, incidente alla retta r.

Per lo spazio $S_3 \equiv \Sigma \equiv rc$ passano ∞^2 spazi S_4, che incontrano ulteriormente M^8 secondo curve γ_1^5, aventi a comune due punti colla r e tre punti colla conica c; individuando pertanto su ciascuna γ una corrispondenza birazionale, questa risulta definita sull'intera M^8. Fissando su ciascuna γ la g_2^1 contenente la coppia delle intersezioni colla retta r, si ha la proiezione doppia della M^8 dal piano della conica c. Essendo razionalmente note su ogni γ la coppia e la terna di punti intersezioni rispett. con r e con c, delle quali due multipli qualsiansi non saranno generalmente gruppi equivalenti, resta definita sopra ogni γ

denti a r o risp. a s; le 35 coniche incidenti in pari tempo a r e s; le $7+7$ cubiche irriducibili bisecanti una delle rette r, s e appoggiate semplicemente all'altra; le 15 quartiche bisecanti sia r che s, intersezioni ulteriori di M^8 cogli spazi S_4 determinati da Σ e dalle rette di M^8 incidenti a t e distintte da r, s; un'altra quartica, bisecante t, che insieme colle rette r, s costituisce una particolare $C^6(t)$; le due quintiche razionali segate dagli spazi S_4 che Σ determina cogli spazi tangenti a M^8 nei punti rt, st (particolari γ con questi punti rispett. come doppi). Il numero delle coniche incidenti a r ed s risulra così: Le coniche di M^8 incidenti a r hanno per luogo una $f^{50\cdot 8}$ [n. 7] incontrante s in 50 punti; ma da questo numero vanno dedotte le 15 coppie di rette costituite da t e da una retta incidente a t e distinta da r, s. Oppure: la coppia di rette t, s è una conica riducibile incidente a r, e alla quale devono appoggiarsi 42 coniche pure incidenti a r; togliendo le 7 che bisecano la coppia rt, le rimanenti sono quelle cercate.

la trasformazione (non involutoria) rappresentata da $P' = P + 2c - 3r$ (¹). L'ordine delle forme che segano le superficie corrispondenti alle sezioni iperpiane sarà quello della linea corrispondente a una retta generica g di M^8 nella trasformazione inversa $P = P' + 3r - 2c$. Questa è una linea $k\gamma + g + 3r - 2c$, che deve risultare di grado -2; si trova così $k = 19$, e quindi una linea di ordine 95, incontrante r in 30 punti e la conica c in 64. In questa stessa ultima trasformazione a un punto di r corrisponde una linea di ordine 109, e a un punto della conica c una linea di ordine 84 (²); perciò nella trasformazione proposta ($P' = P + 2c - 3r$) alle sezioni iperpiane di M^8 corrispondono superficie $f^{95.8}$ ($r^{109}\, c^{84}$). E un breve calcolo ulteriore conduce a stabilire che alle due linee fondamentali r e c corrispondono rispett. due superficie $f^{30.8}$ ($r^{35}\, c^{26}$) e $f^{64.8}$ ($r^{73}\, c^{57}$), costituenti insieme l'aggiunta delle $f^{95.8}$ predette. La trasformazione è dunque rappresentata dalle equazioni:

$$[1]\begin{cases} f'^8 = 95f^8 - 109r - 84c \\ r' = 30f^8 - 35r - 26c \\ c' = 64f^8 - 73r - 57c \end{cases} \text{ da cui invertendo: } [2]\begin{cases} f^8 = 97f'^8 - 81r' - 106c' \\ r = 46f'^8 - 39r' - 50c' \\ c = 50f'^8 - 41r' - 55c' \end{cases}$$

Supposto pertanto di avere in M^8 un sistema lineare $|f^{8n}(r^{n+i_1}\, c^{n+i_2})|$, la trasformazione (2) lo muta (sopprimendo gli apici) in:

$$[3] \quad (n - 46i_1 - 50i_2)\, f^8 - (n - 39i_1 - 41i_2)\, r - (n - 50i_1 - 55i_2)c = \\ = f^{(n-46i_1-50i_2)8}\,(r^{n-39i_1-41i_2}\, c^{n-50i_1-55i_2}).$$

Se $46i_1 + 50i_2 > 0$ ossia - essendo per noi $i_1 > 0$, i_2 negativo e in valore assoluto minore di i_1 - se $i_1 > \frac{25}{23}|i_2|$, l'ordine del sistema

(¹) Questa trasformazione è pertanto di tipo diverso da quella considerata al n. 3. Nel caso presente basta che sopra una γ generica la trasformazione considerata non sia identica; che non siano cioè equivalenti il gruppo doppio e rispett. triplo delle intersezioni con c e con r.

(²) In questo calcolo, indicato con P' il punto di r (ad es.) pel quale si vuole determinare l'ordine delle curva corrispondente, bisogna tener conto separatamente di P' e dell'altra intersezione di r con le γ passanti per P. Si può rappresentare questa curva con $k\gamma + P' + 3(r + P') - 2c = k\gamma + 4P' + 3r - 2c$, intendendo che γ e r abbiamo un'unica intersezione; si trova così $k = 22$, e quindi una linea di ordine 109.

risulterà cosi diminuito. In caso contrario, cioè se $46i_1 + 50i_2 \leq 0$, sarà a fortiori $40i_1 + 50i_2 < 0$, e perciò:

$$(n - 46i_1 - 50i_2) - (n - 50i_1 - 55i_2) = 4i_1 + 5i_2 < 0.$$

Per il sistema (3) la multiplicità della conica c sarà quindi superiore all'ordine delle forme che lo segano; e quest'ultimo ordine si potrà ridurre colla proiezione doppia dal piano di c. Il nuovo sistema (n. 2) verrà segato da forme di ordine:

$$5(n - 46i_1 - 50i_2) - 4(n - 50i_1 - 55i_2) = n - 30i_1 - 30i_2;$$

ordine certo $< n$, poichè $i_1 + i_2 < 0$. In ogni caso dunque l'ordine del sistema in parola può essere ridotto; e la multiplicità della conica c per le nuove superficie è:

$$6(n - 46i_1 - 50i_2) - 5(n - 50i_1 - 55i_2) = n - 26i_1 - 25i_2$$

perciò certamente inferiore all'ordine delle forme che segano le nuove superficie, perchè

$$(n - 30i_1 - 30i_2) - (n - 26i_1 - 25i_2) = -(4i_1 + 5i_2);$$

numero, nelle attuali ipotesi, certo positivo.

Concludiamo pertanto:
Sopra una varietà M_5^8 di S_5 a curve-sezioni canoniche di genere 5 e contenente sole superficie intersezioni complete con forme, ogni sistema lineare semplice completo di superficie di generi uno è di grado 8 e dimensione 6, e birazionalmente equivalente al sistema delle sezioni iperpiane di questa varietà, o di altra dello stesso tipo.

VARIETÀ M^{10} DI S_7 $(p = 6)$

18. – La varietà M^{10} di S_7 più generale a curve-sezioni canoniche di genere 6 si può ottenere («Berz.», n. 8) come intersezione di una V_4^5 di S_7 a curve-sezioni ellittiche (¹) con una quadrica del suo spazio (²). Questa V_4^5 è la sezione generica della M_6^5 di S_9, Grassmanniana delle rette di S_4, con uno spazio S_7; ed è perciò l'immagine della varietà di rette di S_4 base di un fascio generico di complessi lineari (³). La M^{10} sarà perciò immagine dell'intersezione di questa varietà base con un complesso quadratico di S_4, cioè del sistema ∞^3 di rette di S_4 intersezione generale di due complessi lineari e di un complesso quadratico. Questo sistema ∞^3 Γ, di classe 4 (cioè tale che le sue rette appartenenti a un S_3 generico formano una rigata di 4° ordine), è

(¹) Scorza, «Annali di Matem.», (3). vol. 15 (1908); pag. 217.

(²) La V_4^5 contenente la M^{10} è unica, poichè è unica la superficie F^5 (di Del Pezzo) contenente la curva canonica C_6^{10} sezione della M^{10} con un S_5. Tale curva contiene infatti 5 serie lineari g_4^1 coi gruppi complanari, in piani formanti varietà V_3^3, ∞^1 razionali normali di piani; e la F^5 contenente la C_6^{10} è completamente definita come intersezione di queste cinque V_3^3.

(³) Questi ∞^1 complessi lineari hanno i punti singolari su una conica (Castelnuovo, «Atti R. Ist. Veneto», (7), vol. 2 (1891), pag. 855), e da questi punti escono stelle ∞^2 di rette formanti la totalità delle rette basi del fascio che si appoggiano al piano di questa conica, cioè l'intersezione della varietà base con un ulteriore complesso lineare. La V_4^5 ha pertanto una sezione iperpiana V_3^5 costituita da una ∞^1 razionale di piani con piano direttore doppio (Scorza, «Berz.», loc. cit.). La V_4^5 si proietta univocamente da una sua conica γ su S_4, e alle sue sezioni iperpiane corrispondono le forme cubiche di S_4 passanti per una rigata R^4. Questa rigata ha generalmente ∞^1 coniche direttrici; se però γ si appoggia al piano direttore della V_3^5 anzidetta, il cono cubico di rette di V_3^5 che esce da questo punto si spezza nel piano direttore e due piani generatori, generalmente distinti; e l'immagine del piano direttore è direttrice rettilinea della R^4. Come varietà base del sistema rappresentativo di V_4^5 si possono dunque avere entrambi i tipi di R^4, secondo la conica γ da cui si fa la proiezione. In ogni caso R^4 ha un punto doppio, e le forme cubiche passanti per R^4 incontrano ulteriormente il cono quadrico che proietta R^4 da questo punto secondo due piani; sono dunque tutte forme cubiche contenenti due piani, e perciò con almeno 7 punti doppi (C. Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni*... «Mem. R. Accad Torino», (2) vol. 39, (1880), in part. n. 15, 16; F. Severi, *Sulle intersezioni delle varietà algebiche*... «Mem. R. Accad. Torino», vol. 52, (1902), n. 3).

stato studiato fino dagli anni 1913-14 da G. MARLETTA, nei cui lavori (¹) si trovano già, sotto altra forma, parecchie proprietà della M^{10} da me esposte in « Berz. », n. 8. P. es.: le generatrici della rigata R^{100} contenuta in M^{10} corrispondono ai fasci di rette contenuti nel sistema Γ, i cui piani e centri ne sono i piani e punti singolari di 1° ordine; e la proprietà che ogni generatrice della R^{100} ne incontra altre 11 si rispecchia in quella che ogni piano singolare contiene 12 punti singolari di 1° ordine, compreso il centro del proprio fascio. La V_4^5 contenente M^{10} ha una sezione iperpiana costituita da una ∞^1 razionale di piani con piano direttore doppio, e la M^{10} contiene perciò una superficie sezione ψ^{10} luogo di ∞^1 coniche, delle quali 10 si spezzano in coppie di rette: queste ∞^1 coniche sono immagini degli ∞^1 coni quadrici di Γ aventi i vertici sulla conica singolare τ, dei quali appunto 10 si spezzano in coppie di piani. Gli spazi S_3 di questi ∞^1 coni passano tutti per il piano di τ, e il loro fascio è proiettivo alla punteggiata τ dei vertici. Le rette del sistema Γ contenute nei singoli S_3 di S_4 formano rigate ellittiche R^4, le cui direttrici sono le ∞^4 rette di S_4 incidenti alla conica τ; queste rigate hanno per immagini in M^{10} un sistema ∞^4 di curve γ_1^4, tali che per due punti generici di M^{10} ne passa una e una sola; e ciascuna di queste γ_1^4 sta su una quadrica di S_3 pure contenuta in V_4^5.

Gli spazi S_5 passanti per le γ_1^4 incontrano ulteriormente M^{10} in curve δ_2^6, in numero complessivo di ∞^6; queste curve stanno su rigate R^3 normali contenute in V_4^5, fra le quali ∞^4 sono coni cubici, luoghi delle rette di V_4^5 uscenti dai singoli punti di questa varietà (²).

(¹) *Sui complessi di rette dell'S_4 di ordine 2 e di 4ª specie*... « Rend. Circolo Matem. di Palermo, », vol. 38 (1914₂), pag. 43; *Sul complesso di rette dell'S_4 di 4ª specie, d'ordine 2 e di Classe 4.* « Atti Accad. Gioenia di Catania » (5), vol. 8, (1914); Mem. K. MARLETTA chiama « complessi » anche questi sistemi ∞^3 di rette, e « 5-complessi » i sistemi ∞^5 di rette. I complessi « di 4ª specie » sono quelli nei quali, come nel caso presente, una retta generica non contiene alcun punto singolare.

(²) Nel sistema di rette Γ di S_4 si ha una corrispondenza birazionale involutoria associando tutte quelle coppie di rette k, k' che escono da un medesimo punto di un S_3 generico fisso. Poichè questo S_3 contiene una rigata ellittica R^4 di Γ, e ogni complesso lineare di S_4 contenente R^4 contiene l'intera congruenza lineare di S_3 cui appartiene la R^4, se ne trae che ogni complesso lineare contenente R^4 e una retta k di Γ contiene altresì la sua corrispondente k'. La corrispondenza in esame, applicata alla M^{10}, non è dunque altro che la proiezione doppia di questa dallo spazio S_3 della curva γ_1^4 immagine della detta

19. – Le superficie f^{10} sezioni iperpiane della M^{10} contengono in generale soltanto curve loro intersezioni complete con forme. È opportuno però segnalarne alcuni casi particolari:

1) Superficie f^{10} con punto doppio (unica particolarità), segate dagli spazi S_6 tangenti a M^{10}, in numero complessivo di ∞^6 (∞^3 per ogni punto di M^{10}).

2) Superficie f^{10} segate da spazi S_6 tangenti alla V_4^5, in un punto non appartenente in generale a M^{10}; queste pure in numero di ∞^6. Queste f^{10} contengono un fascio di γ_1^4, generalmente senza punti basi, e una rete di δ_2^6 di grado 2; l'involuzione così determinata sulla f^{10} è l'unica trasformazione birazionale su di essa (¹). A queste f^{10} corrispondono in Γ i sistemi ∞^2 di rette luoghi delle rigate ellittiche R^4 contenute negli spazi S_3 di un fascio. Le due direttrici di queste rigate coincidono quando lo spazio S_3 è tangente alla conica τ.

3) Superficie f^{10} soddisfacenti in pari tempo alle condizioni 1) e 2), perciò segate da spazi tangenti a V_4^5 in un punto P di M^{10}; tangenti dunque in P anche a M^{10}. Queste f^{10}, in numero complessivo di ∞^5, hanno P come punto doppio, e contengono un fascio di γ_1^4 passanti per P; e la rete delle δ_2^6 contiene ora una $\delta^6(P^3)$ razionale, sul cono cubico di rette di V_4^5 uscente da P. Su questa $\delta^6(P^3)$ le γ_1^4 segano, all'infuori di P, le coppie di un'involuzione. Le rigate R^4 di Γ immagini delle γ_1^4 suddette contengono la retta p immagine di P e stanno, in corrispondenza a ciascuna f^{10}, in spazi S_3 passanti per un piano contenente p; alla curva $\delta^6(P^3)$ corrisponde la rigata R^6 delle rette di Γ appoggiate a p. Su M^{10} vi è una congruenza del 1° ordine di curve γ_1^4 passanti per P; ciascuna di esse sta in un S_5 passante per $\delta^6(P^3)$; tre fra esse hanno un punto doppio in P, e non incontrano ulteriormente $\delta^6(P^3)$; a esse corrispondono in Γ le R^4 contenute negli spazi di due dei tre piani focali di p.

---

rigata R^4 (n. 2). Per gli spazi S_3 passanti per la conica τ la rigata R^4 si spezza in un inviluppo quadrico fisso nel piano di τ e in un cono quadrico col vertice variabile su τ; e i piani kk' passano tutti per quest'ultimo punto.

(¹) Su queste superficie le curve γ_1^4 e δ_2^6 costituiscono una base, e anzi una base minima; ogni curva su di esse è del tipo $m\gamma + n\delta$, con m, n interi, e di grado $8mn + 2n^2 = 2n(4m+1)$. Questo grado non può risultare $=2$ se non per $n=1$, $m=0$; cioè appunto per la rete $|\delta|$. Non vi sono perciò sulla f^{10} altre trasformazioni birazionali che quella indicata di sopra.

4) Fra le ∞^2 curve γ_1^4 passanti per P e bisecanti la $\delta^6(P^3)$; generalmente fuori di P, ∞^1 passano per un punto ulteriore assegnato Q di $\delta^6(P^3)$; luogo di esse è una f^{10} ancora più particolare, con P, Q entrambi doppi. Vi sono complessivamente ∞^4 superficie f^{10} di questo tipo; la relazione fra P e Q è reciproca, e la curva $\delta^6(Q^3)$ passa a sua volta per P. A queste f^{10} corrispondono in Γ i sistemi ∞^2 luoghi delle R^4 contenute in spazi S_3 passanti per il piano di due rette incidenti p, q di Γ stesso (¹).

Al variare di Q sulla linea $\delta^6(P^3)$, mentre P rimane fisso, si hanno ∞^4 superficie di quest'ultimo tipo costituenti un sistema d'indice 2, tutte passanti per la $\delta^6(P^3)$, e colle γ_1^4 passanti per P come intersezioni variabili. Su una qualunque di queste f^{10} gli spazi S_3 di due γ_1^4 hanno a comune la retta PQ, e stanno perciò in uno spazio S_5; la rete $|\gamma_2^6|$ contiene pertanto il fascio $|\gamma_1^4|$, e la linea residua, evidentemente una conica, è una delle ∞^4 contenute nella superficie ψ^{10} già incontrata al n. prec. Ciò equivale a dire (n. prec.) che il piano di due rette incidenti p, q del sistema Γ si appoggia sempre alla conica τ.

20. – Vediamo ora quali singolarità possa avere, nella varietà M^{10}, un sistema lineare di superficie di generi uno segato da forme di ordine $n > 1$. Abbiamo visto al n. 2 che per $n > 7$ esso può avere un punto base isolato multiplo di ordine $\geq 2n+1$. Ora la M^{10} è proiettata doppiamente dallo spazio S_3 tangente ad essa in un suo punto P: invero tre sezioni iperpiane generiche condotte per questo S_3 devono incontrarsi in 10 punti, dei quali $2^3 = 8$ sono assorbiti da P; sicchè le tre superficie hanno a comune altri due punti, intersezioni ulteriori di M^{10} collo spazio S_4 comune ai loro S_6. In questa proiezione doppia alle sezioni iperpiane generiche f^{10} corrispondono superficie $f^{9.10}$ aventi in P una certa multiplicità x; le $f^{10}(P^2)$ sono proiettate in sè stesse; e al punto P deve corrispondere una $f^{4.10}(P^{\frac{x-2}{2}})$, la quale, contata due volte, costituirà l'aggiunta (unica) delle $f^{9.10}(P^x)$ anzidette. D'altra parte, la trasformazione essendo involutoria, le superficie corri-

(²) Poichè la curva $\delta^6(P^3)$ ha in P un punto triplo, vi sono tre f^{10} di quest'ultimo tipo aventi in P due punti doppi infinitamente vicini.

spondenti a queste $f^{9.10}(P^x)$, segate da forme di ordine $9.9-4x$, devono essere di nuovo le sezioni iperpiane f^{10}; perciò $81-4x=1$, ossia $x=20$. La trasformazione è dunque rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{aligned} f'^{10} &= 9f^{10}-20P \\ P' &= 4f^{10}-9P \end{aligned}$$

(invertibili col semplice scambio degli apici); e le superficie $f^{10n}(P^{2n+i})$ vengono mutate in $f^{(n-4i)10}(P^{2n-9i})$. L'ordine n delle forme che segano le prime risulta così ridotto, ogni qualvolta $i>0$; e la nuova multiplicità in P è inferiore al doppio di quest'ordine.

Se poi un sistema lineare $|F|$ di superficie di generi uno, segato anche da forme di ordine $n>1$, ha una linea multipla di ordine $>n$, questa linea dovrà appartenere a uno spazio di dimensione $\leqq 4$; e pertanto:

può essere una retta, oppure una conica,

si può supporre non sia una curva appartenente a uno spazio S_3, cioè una cubica sghemba o una quartica ellittica; perchè la proiezione doppia della M^{10} da questo S_3 permetterebbe di trasformare il sistema $|F|$ in altro segato da forme di ordine inferiore;

può essere una curva appartenente a un S_4, ma soltanto nei due casi seguenti:

che essa non costituisca la completa intersezione di M^{10} collo spazio S_4 in parola: sia dunque una quartica razionale normale, il cui spazio incontri ulteriormente M^{10} secondo una o due sue corde, ovvero una conica trisecante la quartica; o anche una γ_1^5 normale, di cui una corda sia pure contenuta in M^{10};

che tale curva sia una $\delta^6(P^3)$ del tipo incontrato al n. prec.

In questi ultimi casi (curve di S_4) l'ordine delle forme che segano il sistema $|F|$ può ridursi col procedimento indicato al n. 3 (¹).

(¹) Nel caso della curva $\delta^6(P^3)$, gli spazi S_5 passanti per questa incontrano ulteriormente M^{10} in curve γ_1^4 che passano anche (semplicemente) per P. Fissando su queste la g_2^1 con P doppio, si ha su M^{10} un'involuzione che muta le sezioni f^{10} in superficie $f^{15.10}(\delta^{16})$ aventi in P un punto multiplo d'ordine 24, col cono tangente composto dei 3 piani determinati dalle coppie di tangenti a δ in questo punto, contati 8 volte.

21. - La M^{10} di S_7 da una sua retta r si proietta in una M^6 di S_5, contenente una rigata R^3 immagine di r, e una seconda rigata cubica ρ^3, intersezione residua collo spazio S_4 contenente la prima; le due rigate s'incontrano secondo una C_1^5, bisecante le generatrici di entrambe (1). Le generatrici di ρ^3 sono pertanto proiezioni di cubiche di M^{10} bisecanti la r; e luogo di queste cubiche è la superficie $f^{10}(r^2)$ intersezione di M^{10} collo spazio S_5 contenente gli S_3 tangenti ad essa nei singoli punti di r. La M^6 ha 11 punti doppi, immagini delle rette di M^{10} incidenti alla r, i quali sono altresì punti semplici di entrambe le rigate cubiche, e della C_1^5 loro intersezione.

La M^6 contiene inoltre una rigata R^{87}, proiezione della R^{100} contenuta in M^{10}, e un'altra rigata ρ^{87}, proiezione della $f^{19.10}(r^{28})$ luogo delle coniche di M^{10} appoggiate a r (2).

La congruenza delle coniche contenute in M^{10} è di ordine 39, poichè per un punto di r ne passano 28 generalmente irriducibili, e 11 spezzate in r e una seconda retta incidente a r (3)

Le f^{10} sezioni iperpiane di M^{10} si proiettano su M^6 nel sistema somma $|f^6+R^3|$, avente la R^3 come unica aggiunta. L'analogo sistema $|f^6+\rho^3|$ si compone pure di superficie di generi uno, aventi ρ^3 come unica aggiunta; proiezioni rispett. di $f^{2.10}(r^3)$ e dell'unica $f^{10}(r^2)$ su M^{10}. Il sistema $|f^{2.10}(r^3)|$ rappresenta dunque una μ^{10} pure a curve-sezioni canoniche di genere 6 contenente soltanto superficie inter-

---

(1) Le due rigate cubiche stanno anche su uno stesso cono quadrico, intersezione del loro spazio S_4 colla quadrica contenente la M^6.

(2) La somma degli ordini delle 4 rigate R^3, ρ^3, R^{87}, ρ^{87} è 180 (Marletta, loc. cit. al n. 6), e ogni generatrice loro deve incontrarne complessivamente altre 31. Più precisamente ogni generatrice di esse, nell'ordine accennato, ne incontra altre, della stressa rigata e delle rimanenti, sempre nel numero qui appresso indicato: $R^3(0, 2, 1, 28)$; $\rho^3(2, 0, 28, 1)$; $R^{87}(0, 1, 11, 19)$; $\rho^{87}(1, 0, 19, 11)$. Per la superficie $f^{19.10}(r^{28})$ ad es., luogo delle coniche di M^{10} appoggiate alla r, è verificato il risultato del n. 5, in quanto $2.18+2=1.27+11$.

(3) Una particolare M^{10}, razionale, è rappresentata su S_3 dal sistema delle F^4 passanti per una C_6^8 (perciò aventi come intersezioni variabili anche curve C_6^8). Le coniche di questa M^{10} passanti per un suo punto generico hanno per immagini esclusivamente corde, e coniche 6-secanti della C_6^8 base (poichè le C^k razionali $(4k-2)$-secanti tale C_6^8, per $k \geq 3$, stanno tutte sulla superficie cubica passante per la C_6^8 stessa). Ora le congruenze delle dette corde e coniche sono rispett. di ordini 15 e 24; e $15+24=39$.

sezioni complete, in corrispondenza colla data M^{10} secondo le equazioni:

$$\varphi^{10} = 2f^{10} - 3r$$
$$r' = f^{10} - 2r$$

E a una $f^{10n}(r^{n+i})$ su M^{10} corrisponde su μ^{10} una $\varphi^{(n-i)10}(r'^{n-2i})$, segata dunque, quando sia $i > 0$, da forme di ordine $< n$, e colla r' di multiplicità inferiore a quest'ordine. E sarà in ogni caso $i \leqq \frac{n}{2}$.

22. - Una conica c contenuta in M^{10} dà luogo a considerazioni analoghe. Da essa la M^{10} si proietta in una M^4 di S_4 contenente una R^4, immagine di c (1); e su questa 20 punti doppi, semplici per R^4, immagini delle rette di M^{10} incidenti a c, e un punto D doppio sia per M^{10} che per R^4, immagine dell'unica conica di M^{10} bisecante c. Il cono quadrico che da D proietta R^4 incontra ulteriormente M^4 in una seconda rigata ρ^4, avente pure D come doppio; i piani di ciascuno dei due sistemi di questo cono contengono le generatrici di una delle due rigate anzidette, e cubiche piane razionali dell'altra, anche con D doppio. Le rigate R^4, ρ^4 s'incontrano secondo una C^{10}, trisecante le generatrici di entrambe, e avente in D un punto quadruplo, dal quale essa si proietta in una C^6_4 di S_3. Le generatrici di ρ^4 sono proiezioni di quartiche trisecanti la c, e luogo delle qnali è una superficie $f^{2.10}(c^3)$. La M^4 contiene inoltre una R^{80} proiezione della R^{100} di M^{10}; una R^{152} proiezione della $f^{38.10}(c^{38})$ luogo delle coniche di M^{10} appoggiate a c (2); e infine un'ulteriore rigata ρ^{80}, proiezione di una $f^{30.10}(c^{40})$, luogo delle cubiche bisecanti c (3) (4).

---

(1) Cfr. anche L. ROTH, London M. S. Proceed. (2), vol. 44 (1938), pag. 46.

(2) Poichè le coniche di M^{10} appoggiate a una retta hanno per luogo una $f^{19.10}$ (n. 21), quelle appoggiate a una conica avranno per luogo una una superficie di ordine doppio, per la quale la conica c, direttrice, ha multiplicità 38.

(3) Considerate le cinque rigate di M^4 nell'ordine R^4, ρ^4, R^{80}, ρ^{80}, R^{152}, ogni loro generatrice ne incontra altre, di questa stessa e delle rimanenti e sempre nel medesimo ordine, nel numero qui appresso indicato (totale sempre 81): $R^4(0,3,0,40,38)$; $\rho^4(3, 0, 40, 0, 38)$; $R^{80}(0, 2, 11, 30, 38)$; $\rho^{80}(2, 0, 30, 11, 38)$; $R^{152}(1, 1, 20, 20, 39)$. Per le superficie di M^{10} che si proiettano in ρ^4, ρ^{80}, R^{152} la proprietà dimostrata al n. 5 fornisce le identità $4.1 + 2 = 3.2$; $3.29 + 2 = 2.39 + 11$; $2.37 + 2 = 37 + 39$.

(4) Quando la conica c da cui si proietta M^{11} è una delle ∞^1 contenute nella superficie ψ^{10}, la M^4 proiezione è una quadrica doppia. Invero, il piano di questa

Le f^{10} sezioni iperpiane di M^{10} si proiettano su M^4 nel sistema somma $|f^4+R^4|$, avente R^4 come unica aggiunta. L'analogo sistema $|f^4+\rho^4|$ si comporrà pure di superficie di generi uno colla ρ^4 come unica aggiunta; e queste sono proiezioni rispett. di $f^{3.10}(c^4)$ di M^{10} e della $f^{2.10}(c^3)$ già menzionata, aggiunta delle precedenti. Il sistema $|f^{3.10}(c^4)|$ rappresenta pertanto una μ^{10} pure a curve-sezioni canoniche di genere 6, con sole superficie intersezioni complete, in corrispondenza birazionale colla data M^{10} secondo le equazioni:

$$\begin{aligned} \varphi^{10} &= 3f^{10} - 4c \\ c' &= 2f^{10} - 3c \end{aligned}$$

E a una $f^{10n}(c^{n+i})$ su M^{10} corrisponde su μ^{10} una $\varphi^{(n-2i)10}(c^{n-3i})$, segata dunque, ogni qualvolta sia $i>0$, da forme di ordine $<n$, colla conica c' di multiplicità inferiore a quest'ordine. Inoltre $i \leqq \frac{n}{3}$ (1).

23. – Mostriamo ancora con un esempio come, alternando opportunamente le trasformazioni di cui ai n. 21, 22 e quelle generali dei numeri 2, 3, si possano sistemi di superficie di generi uno anche più complessi ridurre al sistema delle sezioni iperpiane di una nuova M^{10}.

Consideriamo su M^{10} due rette incidenti r, a, e una conica ξ incidente ad a. Queste tre linee stanno in uno spazio $S_4 = \Sigma$; e gli S_5 passanti per questo S_4 incontrano ulteriormente M^{10} secondo curve γ_1^6,

---

conica è contenuto per intero nella V_4^5 su cui sta M^{10}; il cono cubico di rette di V_4^5 uscente da un punto di questo piano si spezza in questo piano e un cono quadrico; e questi ∞^2 coni quadrici contengono altrettante γ_1^4 di M^{10}, che si proiettano in coniche doppie.

(1) Se la conica c è spezzata in due rette incidenti r, s, le equazioni della trasformazione sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \varphi^{10} &= 3f^{10} - 4r - 4s \\ r' &= f^{10} - 2r - s \\ s' &= f^{10} - r - 2s\,; \end{aligned}$$

e l'ordine di una $f^{10 \cdot n}(r^{n+i}, s^{n+k})$ viene ridotto ogni qualvolta $i+k<0$.

aventi a comune con r, a, ξ, rispett. 2, 1, 3 punti. Si può definire pertanto su M^{10} una trasformazione birazionale, individuandone una sopra ciascuna di queste $\infty^2\, \gamma_1^6$; p. es. mediante la g_2^1 che ha come punto doppio la sua intersezione colla retta a. Tale trasformazione è ovviamente involutoria.

Presa su M^{10} una retta generica g, per questa e per lo spazio Σ passa una sezione iperpiana f^{10}, unita per la trasformazione, sulla quale a g corrisponderà una linea $k\gamma + 2a - g$ che deve essere di grado -2; perciò $k = 4$, e questa linea sarà di ordine 25. Per un punto P sia di r che di ξ passano ∞^1 linee γ, contenute nella sezione iperpiana determinata dallo spazio Σ e dall'S_3 tangente a M^{10} in P; e a P corrisponde una linea $4\gamma + 2a - P$ di questa stessa superficie, di ordine 26. Alle f^{10} sezioni iperpiane di M^{10} corrispondono perciò superficie $f^{25.10}(r^{26}\, \xi^{26})$, la cui aggiunta si compone delle due superficie corrispondenti alla retta r e alla conica ξ, cioè una $f^{10.10}(r^{11}\, \xi^{10})$ e una $f^{14.10}(r^{14}\, \xi^{15})$. Le $f^{25.10}$ e questa aggiunta complessiva hanno la a come multipla di ordine 14.

Il sistema $|f^{25.10}|$ che ha in pari tempo una retta e una conica di multiplicità superiore a 25, si può trasformare in quello delle sezioni iperpiane di una nuova M^{10}, applicando successivamente le trasformazioni seguenti:

1) Trasformazione del n. 22 applicate alla conica ξ. Alla a, retta fondamentale di 2ª specie, corrisponde un'analoga retta a' appoggiata alla nuova conica ξ'. Alla r, incontrata dalle $f^{3.10}(\xi^4)$, che passano per a, in 2 punti variabili, corrisponde una conica η; e questa conica si appoggia alla ξ', poichè la $f^{2.10}(\xi^3)$, aggiunta delle $f^{3.10}(\xi^4)$, incontra ancora la r, fuori di a, in un punto. Le $f^{25.10}(r^{26}\, \xi^{26})$ si mutano in $f^{23.10}(\eta^{26}\, \xi'^{22})$; e le due aggiunte parziali rispettivamente in $f^{10.10}(\eta^{11}\, \xi'^{10})$ e $f^{12.10}(\eta^{14}\, \xi'^{11})$.

2) Di nuovo la trasformazione del n. 22, applicata alla conica η. Alla conica ξ' corrisponde ora una retta s, appoggiata alla nuova retta fondamentale di 2ª specie a'' (questa pure appoggiata alla nuova conica η'). Si hanno così superficie $f^{17.10}(\eta'^{14}\, s^{22})$, colle due aggiunte parziali $f^{8.10}(\eta'^{7}\, s^{10})$ e $f^{8.10}(\eta'^{6}\, s^{11})$.

3) Trasformazione del n. 21 applicata alla retta s. Alla conica η', incontrata dalle $f^{2.10}(s^3)$ in 3 punti variabili, corrisponde una cubica ζ, appoggiata a s' e alla nuova retta a'''. Otteniamo così superficie $f^{12.10}(\zeta^{14}\, s'^{7})$ con aggiunte parziali $f^{6.10}(\zeta^{7}\, s'^{4})$ e $f^{5.10}(\zeta^{6}\, s'^{2})$.

4) Proiezione doppia della nuova M^{10} dalla cubica ζ; le $f^{12.10}(\zeta^{14}s'^{7})$ si mutano in $f^{2.10}(s'^{3})$, coll'unica aggiunta $f^{10}(s'^{2})$; la seconda aggiunta parziale si muta nella cubica ζ (1).

5) Infine, applicando di nuovo la trasformazione del n. 21 alla retta s', si ottengono le sezioni iperpiane di M^{10}.

Concludiamo pertanto:
Sopra una varietà M^{10} di S_7 a curve-sezioni canoniche di genere 6 e contenente sole superficie intersezioni complete con forme, ogni sistema lineare semplice, completo di superficie di generi uno è di grado 10 e dimensione 7, e può ridursi birazionalmente al sistema delle sezioni-iperpiane di questa stessa varietà o di altra del medesimo tipo.

VARIETÀ M^{14} DI S_9 $(p=8)$

24. - Per la M^{14} di S_9 la riduzione dei sistemi lineari di superficie di generi uno è più complessa, e richiede l'uso promiscuo dei procedimenti già applicati per i due casi $p=5$ e $p=6$.

Sulla M^{14} un sistema lineare $|F|$ di superficie di generi uno segato da forme di ordine $n>1$ deve avere un punto di multiplicità $\geqq 2n+1$, oppure una linea di multiplicità $\geqq n+1$. Questa linea deve appartenere a uno spazio di dimensione $\leqq 6$; e pertanto:

può essere una retta, una conica, una cubica sghemba, una quartica razionale normale, una quintica normale di genere uno (2); linee tutte appartenenti a spazi di dimensione $\leqq 4$;

(1) Nella proiezione doppia della M^{10} dalla cubica ζ, a questa curva corrisponde appunto una $f^{5.10}(\zeta^{6})$, che contiene tutte le rette appoggiate a ζ, e la s. anzi come doppia, in quanto insieme con a''' costituisce una conica bisecante la ζ.

(2) Esclusa la cubica piana, perchè la M^{14} non ammette rette trisecanti. Esclusa pure la C_2^6, perchè da una tal curva, supposta esistente, la M^{14} dovrebbe proiettarsi in una M^4 contenente una rigata di 4° ordine e genere 2, necessariamente cono e sezione iperpiana; e su questa M^4 la somma delle sezioni iperpiane e di questo cono, sistema che dovrebbe rappresentare la precedente M^{14}, ha invece il cono come parte fissa.

si può supporre non appartenga a uno spazio S_5, perchè la proiezione doppia della M^{14} da questo spazio permetterebbe di trasformare il sistema $|F|$ in altro di ordine inferiore (n. 2);

può essere una curva appartenente a uno spazio S_6 ma soltanto in una delle ipotesi seguenti:

che si tratti di una curva C^8 oppure C^9, di genere virtuale 2 o rispett. 3, con punto triplo; effettivamente razionale, o risp. ellittica;

che tale curva non costituisca la completa intersezione di M^{14} collo spazio S_6 in parola, ma questo incontri ulteriormente M^{14} in una o più corde della linea stessa, oppure in una sua conica bisecante, o cubica quadrisecante.

In questi ultimi casi trovano applicazione le considerazioni del n. 3.

25. – Cominciamo coi due casi che più rapidamente si esauriscono, nei quali cioè il sistema lineare $|F|$ di superficie di generi uno, segato da forme di ordine n, ha una *conica* oppure *quartica razionale normale* multipla di ordine $\geqq n+1$.

La M^{14} da una sua conica c si proietta in una M^8 di S_6 contenente una rigata normale R^4 immagine di c, e quindi una seconda rigata ρ^4 intersezione ulteriore collo spazio S_5 della prima. Le due rigate s'incontrano secondo una C^6_1 bisecante le generatrici di entrambe; la seconda è pertanto proiezione di una $f^{14}(c^2)$, luogo di cubiche bisecanti c. La M^8 contiene inoltre una rigata R^{60}, proiezione della R^{70} contenuta in M^{14} (1); e un'ulteriore ρ^{60}, proiezione di una $f^{10 \cdot 14}(c^{15})$, luogo delle coniche di M^{14} appoggiate a c (2).

La congruenza delle coniche contenute in M^{14} è pertanto di ordine 16 (3).

---

(1) Vedi la mia Nota citata nei «Rend. R. Accad. Lincei», (6) vol. 11, 1° sem. 1930, pag. 329; in particolare pag. 333.

(2) La somma degli ordini delle 4 rigate è 128 («Berz.» n. 3); e ogni loro generatrice ne incontra complessivamente altre 17. Più particolarmente, ogni generatrice delle rigate R^4, ρ^4, R^{60}, ρ^{60} ne incontra altre, della stessa rigata e delle rimanenti, nel medesimo ordine, nel numero seguente: R^4 (0, 2, 0, 15); ρ^4 (2, 0, 15, 0); R^{60} (0,1, 6,10); ρ^{60} (1, 0,10, 6). Per le $f^{14}(c^2)$ e $f^{10 \cdot 14}(c^{15})$ indicate sopra è verificata la relazione del n. 5: $3.0+2=2$; $2.9+2=14+6$.

(3) Ciò è confermato dall'esame di particolari M^{14}, razionali; p. es. di quella rappresentata su S_3 dal sistema delle F^4 passanti per una C^6_0. Poichè questa

Le sezioni iperpiane di M^{14} si proiettano nel sistema $(f^8 + R^4)$, che ha la R^4 come unica aggiunta. L'analogo sistema $(f^8 + \rho^4)$, avente ρ^4 come aggiunta, è proiezione del sistema $|f^{2.14}(c^3)|$ avente la $f^{14}(c^2)$ come unica aggiunta, e che rappresenta pure una μ^{14} di S_9 dello stesso tipo della data M. La corrispondenza fra M^{14} e μ^{14} è rappresentata dalle equazioni:

$$\varphi^{14} = 2f^{14} - 3c$$
$$c' = f^{14} - 2c$$

Pertanto a una $f^{14.n}(c^{n+i})$ su M^{14} corrisponde su μ^{14} una $\varphi^{(n-i)14}(c'^{n-2i})$, segata da forme di ordine minore, ogni qualvolta sia $i > 0$. È inoltre $i \leqq \frac{n}{2}$.

26. – La M^{14} da una sua quartica razionale normale γ si proietta in una M^4 di S_4 contenente una rigata R^6 immagine di γ, e 26 punti doppi; dei quali 20, immagini delle rette di M^{14} incidenti a γ, sono semplici per R^6, e gli altri 6 sono punti doppi impropri di R^6 (¹), immagini di coniche bisecanti γ. Per R^6 passa una forma cubica di S_4, avente gli stessi 6 punti doppi di R^6, e luogo delle rette 4-secanti R^6 (²); questa forma cubica incontra ulteriormente M^4 in una seconda rigata ρ^6 (sulla forma cubica, di sistema opposto); e le due rigate s'incontrano secondo una curva C^{20}_{15}, 4-secante le generatrici di entrambe. La ρ^6 è perciò proiézione di una $f^{3.14}(\gamma^4)$, luogo di quintiche razionali 4-secanti la quartica γ.

La R^{70} di M^{14} si proietta in una R^{50}. Le coniche appoggiate a γ formano una $f^{20.14}(\gamma^{16})$, che si proietta in una R^{104}. La M^4 così otte-

---

curva sta su una superficie cubica, alle coniche di M^{14} possono corrispondere soltanto le corde di C^6_0 e le sue coniche 6-secanti, le quali formano congruenze di ordini rispett. 10 e 6.

(¹) Una rigata di ordine n e genere p in S_4 ha $\binom{n-2}{2} - 3p$ punti doppi. V. C. SEGRE, *Encyklop. d. mathem. Wiss.*, vol. III. 2. 2. A, art. III C 7, nota 434, a pag. 913.

(²) C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche* . . . , « Mem. R. Accad. di Torino » (2), vol. 39 (1888), in part. n. 12-14; G. CASTELNUOVO, *Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe* . . . , « Atti R. Ist. Veneto » (6), vol. 5 (1887).

nuta contiene altre due rigate, una ρ^{104} e una ρ^{50}; la prima, proiezione di una $f^{32.14}(\gamma^{36})$, luogo di cubiche bisecanti γ; la seconda, proiezione di una $f^{20.14}(\gamma^{25})$, luogo di quartiche trisecanti γ (1).

Le sezioni iperpiane di M^{14} si proiettano nel sistema $|F^4+R^6|$, che ha la R^6 per aggiunta. Il sistema $|F^4+\rho^6|$, di eguali caratteri e colla ρ^6 come aggiunta, è proiezione del sistema $f^{4.14}(\gamma^5)$, colla $f^{3.14}(\gamma^4)$ per aggiunta, il quale rappresenta una μ^{14} dello stesso tipo di M^{14}. La corrispondenza fra le due varietà è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \varphi^{14} &= 4f^{14} - 5\gamma \\ \gamma' &= 3f^{14} - 4\gamma \end{aligned}$$

E alle $f^{14n}(\gamma^{n+i})$ corrispondono $\varphi^{14(n-3i)}(\gamma^{n-4i})$, segate da forme di ordine minore, ogni qualvolta $i>0$. È inoltre $i \leqq \frac{n}{4}$.

27. Da una sua retta, o da una cubica sghemba, la M^{14} si proietta invece in varietà contenenti una congruenza del 1° ordine di coniche, come la M^4 di S_4 proiezione della M^8 generale di S_6 da una sua retta (n. 7 e seg.). Perciò lo studio e la riduzione dei sistemi lineari di superficie di generi uno segati su M^{14} da forme di ordine n e aventi una retta o cubica di multiplicità $>n$ sono analoghi a quelli delle superficie di M^8 con retta multipla.

Da una sua retta r la M^{14} si proietta in una M^{10} di S_7, contenente una rigata R^3 immagine di r, e 6 punti doppi, semplici per R^3, immagini delle rette di M^{14} incidenti a r. Questa M^{10} contiene altre

---

(1) La somma degli ordini di queste rigate è 320, e ogni loro generatrice ne incontra complessivamente altre 81. Più particolarmente ogni generatrice delle rigate R^6, R^{50}, R^{104}, ρ^{104}, ρ^{50}, ρ^6 ne incontra altre di queste, nel medesimo ordine, come è indicato qui appresso: R^6 (0,0,16, 36, 25, 4); R^{50} (0,6, 20, 32, 20, 3); R^{104} (1, 10, 25, 28, 15, 2); ρ^{104} (2, 15, 28, 25, 10, 1); ρ^{50} (3, 20, 32, 20, 6, 0); ρ^6 (4, 25, 36, 16, 0, 0). Per le superficie di M^{14} aventi come proiezioni queste ultime 4 rigate la relazione del n. 5 dà le identità: $2.19+2=15+25$; $3.31+2=2.35+25$; $4.19+2=3.24+6$; $5.2+2=4.3+0$.

due rigate: una R^{62} proiezione della R^{70} di M^{14}, e una R^{35} proiezione di una $f^{5.14}(r^{10})$, luogo delle coniche di M^{14} appoggiate a r (¹).

Per lo spazio S_4 di R^3 passano in $S_7\,\infty^2$ iperpiani, i quali incontrano ulteriormente M^{10} secondo superficie φ^7 a sezioni di genere 2; queste segano R^3 in curve C_1^5 passanti pei 6 punti doppi di M^{10}, e s'incontrano a due a due secondo coniche δ bisecanti la R^3, proiezioni di quartiche di M^{14} a loro volta bisecanti la r, e costituenti, sia le une che le altre, congruenze del 1° ordine. Tra le coniche δ, ∞^1 si spezzano in coppie di rette, generatrici della rigata R^{35} dianzi accennata.

Ogni φ^7 contiene 5 coniche così spezzate; e la R^{35}, equivalendo a $5\varphi^7$, incontra R^3 secondo una C^{25} coi 6 punti doppi di M^{10} come 5^{pli}. Le coppie di generatrici di R^{35} costituenti coniche δ riducibili formano un'involuzione generalmente priva di elementi doppi, e di genere 6, riferibile a una quintica piana. La R^{35} è di genere 11; ha una curva doppia di ordine 15 e genere 6 incontrante R^3 in 10 punti, proiezione quindi di una C^{25} appoggiata a r in 10 punti, e doppia a sua volta per la $f^{5.14}(r^{10})$ già menzionata.

La congruenza delle δ (o delle C^4 bisecanti r) può riferirsi birazionalmente senza eccezioni a un piano α, in modo che alle φ^7 (o alle $f^{14}(r^2)$, di cui le φ^7 sono proiezioni) corrispondano le rette del piano, e alle δ riducibili (alle C^4 spezzate in due coniche) i punti di una quintica $\mathbf{K}^5$. Le superficie di M^{10} (o di M^{14}) bisecanti le δ (le C^4) risultano rappresentate su questo piano doppio, con curve di diramazione ovunque tangenti a $\mathbf{K}^5$. In particolare le f^{10} sezioni iperpiane di M^{10} danno luogo nel piano α a sestiche di diramazione; la rigata R^3, a una quartica di diramazione; le sezioni f^{10} spezzate nella R^3 e in una φ^7, a sestiche spezzate nella quartica anzidetta e una retta doppia.

28. – La M^{14}, da una sua cubica sghemba γ, si proietta in una M^6 di S_5, contenente una rigata razionale R^5, immagine di γ, e 15 punti doppi, semplici per R^5, immagini delle rette di M^{14} incidenti a γ.

(¹) V. anche « Berz ». n. 9, e nota (⁴³). Ogni generatrice di ciascuna delle rigate R^3, R^{62}, R^{35} ne incontra altre di queste, nel medesimo ordine, nel numero seguente: $R^3\,(0, 1, 10)$; $R^{62}\,(0, 6, 5)$; $R^{35}\,(1, 9, 1)$. La M^{14} generale non contiene quartiche ellittiche, e perciò nemmeno cubiche bisecanti una sua retta.

La curva C_0^5 di S_4 sezione spaziale generica di R^5 ha una trisecante (1); perciò la R^5 ha ∞^2 trisecanti, contenute in tutte le quadriche passanti per essa, le quali sono almeno ∞^2. Se due generiche fra le trisecanti di R^5 sono sghembe, la varietà luogo di esse e base per il detto sistema di quadriche ha dimensione 3, ed è una V_3^3, ∞^1 razionale normale di piani, della quale le trisecanti di R^5 sono le direttrici (2). Queste ∞^2 quadriche sono allora tutte S_1–coni; sarebbe perciò di questo tipo anche l'unica quadrica passante per M^6, e la M^6 conterrebbe, negli spazi S_3 di questo S_1–cono quadrico, due fasci di superficie cubiche; fatto incompatibile coll'ipotesi che la M^{14} di cui essa è proiezione contenga soltanto superficie intersezioni complete con forme. Le trisecanti di R^5 saranno pertanto a due a due incidenti, e staranno in un piano, incontrante R^5 secondo una cubica direttrice; il punto doppio P di questa cubica sarà doppio anche per R^5 (3) e per M^6, e immagine di una conica di M^{14} bisecante la cubica γ. Per questa R^5 passano ∞^3 quadriche, che incontrano ulteriormente M^6 in ∞^2 superficie φ^7 a sezioni di genere 2, anch'esse col punto P come doppio e passanti semplicemente per gli altri punti doppi di M^6 (4). Le φ^7 segnano su R^5 curve di ordine 12, trisecanti le generatrici di R^5, e che da P si proiettano in C_5^8 canoniche (5); esse si incontrano a due a due secondo coniche δ di una congruenza del 1° ordine, 4–se-

---

(1) Una curva C_p^n di S_4 ha $\binom{n-2}{3}-(n-4)p$ trisecanti. Vedi C. Segre, n. 25 dell'articolo citato alla nota (1) a pag. 60, dove sono indicati i vari lavori sugli spazi plurisecanti di una curva. La C_0^5 sta su una rigata cubica normale R^3, generata da una proiettività fra essa e la sua trisecante, per la quale sono punti uniti i tre punti comuni a queste due linee.

(2) Le generatrici di R^5 stanno invece nei piani della V_3^3; e R^5 è intersezione residua di questa V_3^3 con una forma cubica passante per una rigata normale R^4 con ∞^1 coniche direttrici contenute in quei medesimi piani. Cfr. la mia nota: *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni*..., « Comm. Mathem. Helvetici », vol. 15 (1942-43), p. 71; n. 3, 4.

(3) Questa R^5 è pertanto proiezione di una R^5 normale di S_6 da un punto di una sua corda.

(4) Queste quadriche contengono il piano della direttrice cubica di R^5. Fra esse vi sono $\infty^2 S_1$–coni coll'asse passante per P; le superficie φ^7 di M^6 possono considerarsi segate da questi coni quadrici, e hanno P come punto doppio.

(5) La M^6, R^5 e le φ^7 si proiettano da P rispett. in una (particolare) M^4, R^3 e φ^5; la M^4 è caso particolare in pari tempo di quella di cui al n. 7 e seg. e di quella del n. 31.

canti la R^5. Tali coniche sono pertanto proiezioni di C^6 di M^{14}, 4-secanti la cubica γ.

La rigata R^{70} di M^{14} si proietta da γ in una R^{55} di M^6. Ulteriori rigate di M^6 sono una R^{85}, proiezione della $f^{15.14}(\gamma^{16})$ luogo delle coniche di M^6 appoggiate a γ, e la R^{35} luogo delle coniche δ spezzate in due rette, proiezione di una $f^{10.14}(\gamma^{15})$, luogo a sua volta di cubiche bisecanti γ (1). Ogni φ^7 contiene di nuovo 5 di queste δ riducibili.

Anche l'attuale congruenza di coniche δ può riferirsi birazionalmente a un piano α, senza eccezioni, in modo che alle superficie φ^7, luoghi di coniche δ, corrispondano le rette di questo piano; alle δ riducibili, i punti di una quintica $\mathbf{K}^5$ di genere 6; alle superficie di M^6 bisecanti le δ, piani doppi con curve di diramazione ovunque tangenti alla detta quintica. In particolare le f^6 sezioni di M^6 sono rappresentabili sul piano α doppio con sestiche di diramazione ovunque tangenti alla $\mathbf{K}^5$ (2).

29. – Le superficie $f^{14.n}(r^{n+i})$ della M^{14} di cui al n. 27 si proiettano da r su M^{10} in superficie $nf^{10} - iR^3 = (n-i)f^{10} + i\varphi^7$, $2(n-i)$-secanti le coniche δ. Analogamente le $f^{14.n}(\gamma^{n+i})$ della M^{14} di cui al n. 28 si proiettano su M^6 in superficie $nf^6 - iR^5 = (n-2i)f^6 + i\varphi^7$,

(1) Ogni generatrice di ciascuna di queste rigate ne incontra complessivamente altre 31. Separatamente per ciascuna rigata, ogni generatrice ne incontra altre, della stessa rigata o delle rimanenti, nel numero indicato qui appresso: R^5 (0, 0, 16, 15); R^{55} (0, 6, 15, 10); R^{85} (1, 10, 15, 5); R^{35} (2, 15, 13, 1). Per le superficie che si proiettano in queste ultime due rigate la relazione del n. 5 dà le identità $2.14+2=15+15$; $3.9+2=2.14+1$.

(2) Al n. 27 abbiamo riscontrata l'esistenza sulla M^{14}, per ogni retta r, di una congruenza del 1° ordine di quartiche bisecanti la r; cioè di congruenze del 1° ordine di curve razionali, con una bisecante razionale (la R^3) e perciò infinite altre. Qui riconosciamo l'esistenza di altre congruenze del 1° ordine di curve razionali (C^6, 4-secanti la cubica γ), senza bisecanti razionali. E, per altre vie, si possono ottenere su M^{14} anche ulteriori congruenze del 1° ordine di curve razionali. P. es., in base alla rappresentazione di M^{14} sulla V_3^3 generale di S_4 che verrà data al n. 31 – e d'altronde già considerata nella mia Nota dei «Rend. R. Accad. Lincei» (6), vol. 11 (1° sem. 1930), p. 329 – le congruenze corrispondenti alle coniche segate su V_3^3 dai piani per una sua retta ammettono sistemi lineari ∞^4 di bisecanti razionali; esse si compongono di curve di ordine 14, 10-secanti una γ_1^5 e bisecanti una C_0^7, a sua volta 5-secante la stessa γ_1^5.

$2(n-2i)$-secanti le δ. Se di generi uno, queste superficie devono ancora avere una linea l di multiplicità $n-i+h$, rispett. $n-2i+h$ $(h>0)$ unisecante le δ di un sistema ∞^1. Se si tratta di superficie bisecanti le δ $(n=i+1$, rispett. $n=2i+1)$, la linea l è linea doppia delle superficie in parola, giacente su una $i\varphi^7$; e a queste superficie potranno applicarsi, con ovvie modificazioni, le considerazioni del n. 10. Queste superficie potranno rappresentarsi sul piano α doppio con curve di diramazione C^{2i+6} composte di una C^i doppia, trascurabile, e di una C^6 semplice, che sarà a sua volta linea di diramazione corrispondente a una sezione iperpiana f^{10} o f^6. Si tratterà quindi di superficie, una per una, birazionalmente identiche a queste sezioni iperpiane; e anzi il cui sistema lineare è, come al n. 10, trasformabile birazionalmente in quello di queste stesse sezioni. Nel caso più semplice l'anzidetta trasformazione potrà realizzarsi mediante lo specchiamento rispetto a una superficie Ω che, se i è pari, su M^{10} o risp. M^6, è una $f+\frac{i-6}{2}\varphi$, colla detta C^i (semplice) come curva di diramazione, in questo caso anch'essa ovunque tangente a $\mathbf{K}^5$. Se invece i è dispari, la Ω è una $f+\frac{i-1}{2}\varphi$; e la sua curva di diramazione è composta della $\mathbf{K}^5$ e della detta C^i, ora non più vincolata a contatti con $\mathbf{K}^5$. Analogamente al n. 13, in ogni altro caso in cui la superficie luogo di $\infty^1\delta$ su cui sta la linea l sia multipla di φ^7 e non una φ^7 semplice, sarà $h=n-i$, rispett. $h=n-2i$; e l'ordine delle forme seganti su M^{14} le superficie considerate potrà anche ridursi con una conveniente trasformazione birazionale.

30. - Sia ora invece la linea l contenuta in una φ^7; e come ai n. 13. 15, $\frac{i}{h}<1$, $h>i$.

Nel caso del n. 27 la linea l su M^{14} sarà contenuta in una $f^{14}(r^2)$. Supponiamola di ordine p e incontrante la r in q punti; quindi, dovendo essa incontrare una φ^7 generica in un solo punto, $p-2q=1$, $q=\frac{p-1}{2}$. La soluzione più semplice è $p=3$, $q=1$, cioè una cubica avente con r un solo punto comune. Le altre soluzioni devono scartarsi, perchè corrisponderebbero a linee l da cui potrebbero staccarsi per continuità una o più coniche appoggiate a r, parti delle C^4 che si proiettano nelle δ. Rimane solo il caso della cubica incontrante r in un punto; e essendo ora $h > i$, quindi $n - i + h > n$, si tratterà di superficie con una retta e una cubica fra loro incidenti, entrambe di multiplicità $> n$; complessivamente dunque una quartica appartenente a S_4 e tutta di multiplicicità $> n$; caso che rientra in quello considerato al n. 26.

Nel caso del n. 28, supposta sempre la linea l sulla M^{14} di ordine p e incontrante ora la cubica γ in q punti, avremo invece $2p - 3q = 1, q = \frac{2p-1}{3}$. La soluzione più semplice è $p = 2, q = 1$, come al n. 16; le altre vanno scartate per ragione analoga. Abbiamo perciò, oltre alla cubica γ di multiplicità $n+i$ per le nostre superficie, una conica c semplicemente appoggiata alla cubica e di multiplicità $n - 2i + h$ con $h > i$; quindi di multiplicità $> n - i$.

Ora la cubica γ e la conica c stanno in un S_5, dal quale la M^{14} è proiettata doppiamente. Le equazioni della corrispondenza che nasce da questa proiezione, date al n. 2 per il caso in cui tale S_5 incontri M^{14} in una linea irriducibile, nel caso attuale sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \varphi &= 8f^{10} - 9\gamma - 9c \\ \gamma' &= 4f^{10} - 5\gamma - 4c \\ c' &= 3f^{10} - 3\gamma - 4c ; \end{aligned}$$

e in questa corrispondenza le superficie $f^{10.n}(\gamma^{n+i} c^{n+k})$ si mutano in altre segate da forme di ordine $n - 4i - 3k$, quindi di ordine $< n$ ogni qualvolta sia $4i + 3k > 0$. Nel caso presente è $i > 0, k > -i$; la condizione è dunque soddisfatta.

31. – Da una sua quintica normale di genere uno δ_1^5 la M^{14} si proietta in una M^4 di S_4, contenente una rigata ellittica R^5 immagine della curva δ, e 25 punti doppi, semplici per R^5, immagini delle rette di M^{14} appoggiate a δ. Le ulteriori rigate contenute nella M^4 sono (1):

(1) Queste risultano già in parte dalla mia Nota cit., «Rend. Accad. Lincei» (6) Vol. 11, 1° sem. 1930, pag. 329. La M^{14} qui oggetto di studio (dal n. 24 in

una R^{45}, proiezione della R^{70} di M^{14};

una R^{145}, proiezione della superficie $f^{25.14}(\delta^{16})$ luogo delle coniche di M^{14} appoggiate a δ;

una R^{115}, proiezione di una $f^{45.14}(\delta^{58})$ luogo di cubiche bisecanti δ;

infine una R^{10}, proiezione di una $f^{5.14}(\delta^{7})$ luogo di quartiche risecanti δ (1).

Le forme cubiche passanti per la rigata R^5 segano su M^4 un sistema ∞^4 di superficie di 7° ordine, che conduce a rappresentare M^4 sopra una forma cubica generale di S_4. Il sistema lineare corrispondente su M^{14} è il sistema $|f^{3.14}(\delta^4)|$. D'altra parte, poichè la rigata R^{10} suindicata non ha linea doppia, il sistema somma $|f^4+R^{10}|$ su M^4, avente la R^{10} come unica aggiunta, si compone di superficie di generi uno, in generale irriducibili; esso è proiezione di un sistema su M^{14} avente a sua volta la $f^{5.14}(\delta^7)$ suddetta come aggiunta; dunque del sistema $|f^{6.14}(\delta^8)|$, doppio del precedente, riferibile a quello delle intersezioni della V_3^3 di S_4 colle quadriche. Nella corrispondenza fra la M^{14} e la V_3^3, le sezioni iperpiane f^{14} di M^{14} si mutano in superficie segate da forme di 7° ordine con una γ_1^5 quadrupla, e la cui aggiunta corrisponde alla curva δ di M^{14}. Indicando con φ le sezioni iperpiane di V_3^3, la corrispondenza tra M^{14} e V_3^3 è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \varphi = 3f - 4\delta \\ \gamma = 5f - 7\delta \end{cases} \quad \text{e invertendo :} \quad \begin{cases} f = 7\varphi - 4\gamma \\ \delta = 5\varphi - 3\gamma \end{cases}$$

Alle $f^{14}(\delta)$ corrispondono le $\varphi^{2.3}(\gamma)$.

Pertanto a un sistema di superficie $f^{14n}(\delta^{n+i}) = nf^{14}(\delta) - i\delta\,(i>0)$ sulla M^{14} corrisponde su V_3^3 un sistema $n.\varphi^{2.3}(\gamma) - i(5\varphi - 3\gamma) = \varphi^{3(2n-5i)}(\gamma^{n-3i})$,

---

poi) è appunto la sezione della Grassmanniana delle rette di S_5 con un generico S_9, come risulta dall'identità delle loro rappresentazioni nella Nota citata e nel presente n°.

(1) Ogni generatrice di queste rigate ne incontra complessivamente altre 81, della stessa rigata o delle rimanenti. Più particolarmente, considerate tali rigate nell'ordine R^5, R^{45}, R^{145}, R^{115}, R^{10}, ogni loro generatrice ne incontra altre di queste, nello stesso ordine, nel numero indicato qui appresso: R^5 (0, 0, 16, 58, 7); R^{45} (0, 6, 25, 45, 5); R^{145} (1, 10, 35, 32, 3); R^{115} (2, 15, 43, 20, 1); R^{10} (3, 20, 52, 6, 0). Per le superficie di M^{14} che si proiettano in queste ultime tre rigate la relazione del n. 5 dà le identità: $2.24+2=15+35$; $3.44+2=2.57+20$; $4.4+2=3.6+0$.

segato da forme di ordine $2n-5i$; e sulla M^{24} di S_{14} rappresentante il sistema delle superficie intersezioni della V_3^3 con quadriche, un sistema segato da forme di ordine $\frac{2n-5i}{2}$, eventualmente anche non intero [perchè su M^{24} la base minima è costituita dalle superficie metà delle sezioni iperpiane (1)], ma certo minore di n; mentre la multiplicità $n-3i$ della curva C_1^{10} corrispondente a γ sulla M^{24} è a sua volta inferiore a quest'ordine.

Viceversa, a un sistema $\varphi^{3n}(\gamma^{\frac{n+i}{2}}) = \frac{n}{2}\varphi^{2.3}(\gamma) - \frac{i}{2}\gamma$ su V_3^3, dove n ed $i(i>0)$ sono entrambi pari o entrambi dispari; sistema che su M^{24} verrebbe segato da forme di ordine $\frac{n}{2}$, eventualmente fratto; corrisponde su M^{14} un sistema di $\frac{n}{2}f^{14}(\delta) - \frac{i}{2}(5f^{14} - 7\delta) = f^{\frac{n-5i}{2} \cdot 14}\left(\delta^{\frac{n-7i}{2}}\right)$, segato da forme di ordine inferiore a $\frac{n}{2}$, e avente δ di multiplicità inferiore a quest'ordine.

In ogni caso dunque, nel passaggio dalla M^{14} alla M^{24} o viceversa, ogni qualvolta un sistema di superficie del tipo qui considerato abbia la curva δ o γ di multiplicità superiore all'ordine delle forme che lo segano, quest'ordine, in seguito alla trasformazione, risulta diminuito.

32. – Un sistema di superficie di generi uno su M^{14}, segato da forme di ordine n, può anche avere un punto di multiplicità $>2n$. Dallo spazio S_3 tangente in un suo punto generico P la M^{14} si proietta in una M^6 di S_5 contenente una superficie ψ^4 di Veronese immagine di P, e su questa 16 punti doppi, semplici per ψ^4, immagini delle coniche di M^{14} passanti per P. Per ψ^4 passano ∞^5 quadriche, incontranti ulteriormente M^6 in superficie χ^8 a sezioni di genere 4, proiezioni di $f^{2.14}(P^5)$. Queste superficie segnano a loro volta su ψ^4 curve canoniche C_6^{10}, riferibili a quintiche piane, passanti pei 16 punti doppi di M^6, e perciò con 9 intersezioni variabili. Il sistema $|\chi^8|$ ha le curve

(1) L'espressione «ordine eventualmente fratto» è comoda, e qui di significato ovvio.

caratteristiche di ordine 6 e genere 1, ed è di grado 3; conduce perciò di nuovo a rappresentare M^6, e quindi la M^{14}, sopra una V_3^3 generale di S_4. Alla ψ^4 corrisponde su V_3^3 una φ^9, a curve sezioni di genere 6, perciò con curva doppia δ_0^4. La φ^9 è l'intersezione di V_3^3 colla varietà delle corde di δ_0^4, e contiene le 16 corde di questa appartenenti alla V_3^3, immagini dei 16 punti doppi di M^6, ossia delle 16 coniche di M^{14} passanti per P.

Le equazioni della corrispondenza fra M^{14} e la V_3^3 sono:

$$\begin{array}{lcl} \varphi = 2f^{14} - 5P & & f^{14} = 8\varphi - 5\delta \\ \delta = 3f^{14} - 8P \ (^1) & \text{e invertendo} & P \ = 3\varphi - 2\delta \ (^2) \end{array}$$

Alle $f^{14}(P^2)$ corrispondono le $\varphi^{2.3}(\gamma)$.

Alle superficie $f^{14n}(P^{2n+i}) = nf^{14}(P^2) - iP$ su $M^{14}(i>0)$ corrispondono su V_3^3 superficie $n\varphi^{2.3}(\delta) - i(3\varphi^3 - 2\delta) = \varphi^{3(2n-3i)}(\delta^{n-2i})$; e perciò, sulla M^{24} di S_{14}, superficie segate da forme di ordine $\frac{2n-3i}{2}$, eventualmente fratto ma $<n$, colla δ di multiplicità inferiore a quest'ordine. Viceversa, a superficie $\varphi^{3n}(\delta^{\frac{n+i}{2}}) = \frac{n}{2}\varphi^{2.3}(\delta) - \frac{i}{2}\delta$ su $V_3^3(i>0)$, che sulla M^{24} verrebbero segate da forme di ordine $\frac{n}{2}$, eventualmente fratto, corrispondono su M^{14} superficie $\frac{n}{2} f^{14}(P^2) - \frac{i}{2}(3f^{14} - 8P) =$
$= f^{\frac{n-3i}{2}.14}(P^{n-4i})$, segate da forme di ordine $<\frac{n}{2}$, e aventi in P multiplicità inferiore al doppio di quest'ordine.

---

(1) Questa superficie $f^{3.14}(P^8)$ è su M^{14} l'aggiunta delle $f^{4.14}(P^{10})$, corrispondenti alle 2φ di V_3^3. Le 16 coniche di M^{14} passanti per P sono semplici per le superficie $f^{2.14}(P^5)$ corrispondenti alle sezioni iperpiane di V_3^3; le corde di δ_0^4 contenute in V_3^3 sono doppie per le $8\varphi - 5\delta$ corrispondenti alle f^{14} di M^{14}.

(2) La M^6 qui considerata contiene tre rigate: una R^{70} proiezione della R^{70} di M^{14}; una R^{100} proiezione di una $f^{22.14}(P^{52})$ luogo delle cubiche di M^{14} passanti per P, e alla quale corrisponde su V_3^3 la rigata R^{60} delle rette appoggiate alla δ_0^4; e una R^{10} proiezione della $f^{3.14}(P^8)$, luogo delle C^5 di M^{14} con P doppio. Le generatrici di queste rigate ne incontrano altre delle stesse, sempre nel medesimo ordine, come indicato qui appresso: R^{70} (6, 22, 3); R^{100} (15, 15, 1); R^{10} (25, 6, 0).

In ogni caso dunque, quando le superficie considerate su M^{14} abbiano in P multiplicità superiore al doppio dell'ordine delle forme che le segano, oppure se su M^{24} abbiano lungo la curva corrispondente a δ multiplicità superiore a tale ordine, l'ordine stesso nella trasformazione risulta diminuito.

33. – Poichè alcuni sistemi lineari di superficie di generi uno sulla M^{14} di S_9, anzichè ridursi a sistemi di ordine inferiore sulla stessa varietà o su altra di questo tipo, sono stati soltanto ridotti a sistemi segati da forme di ordine minore sulla M^{24} di S_{14} (come ai n. 31-32), è necessario esaminare di quali riduzioni siano a loro volta suscettibili questi sistemi sulla M^{24}. Anche sulla M^{24} questi sistemi di superficie di generi 1, se segati da forme di ordine $n > 1$, dovranno avere una linea di multiplicità superiore a n, oppure un punto isolato di multiplicità superiore a $2n$. Pur parlando anche in questo caso di «forme di ordine n», occorre tener presente, qui e in seguito, che la base delle superficie contenute nella M^{24} è costituita da superficie metà delle sezioni iperpiane, e l'ordine di n può quindi essere numero fratto di denominatore 2 (come anche ai n. 31-32). Sulla V_3^3 di S_4 le superficie corrispondenti saranno segate da forme di ordine $2n$ (quindi intero), e avranno una linea di multiplicità $\dfrac{\gtreqless 2n+1}{2}$, o un punto isolato di multiplicità $\geqq 2n+1$.

In quest'ultimo caso le superficie in parola sulla V_3^3, di ordine $3k$ (k intero), saranno proiettate dal punto multiplo isolato, almeno $(k+1)^{\text{plo}}$, secondo coni di ordine $< 2k$, le cui intersezioni ulteriori colla V_3^3 saranno superficie di ordine $< 3k$. Basta dunque la proiezione doppia della V_3^3 dal punto considerato per ridurre l'ordine del sistema di superficie.

Quanto a una linea multipla, sulla M^{24} che contiene soltanto linee di ordine pari, lo spazio cui questa linea appartiene può contenere in più soltanto coniche trisecanti quest'ultima. Questo caso e quello di eventuali punti multipli, secondo la possibilità accennata al n. 3, sono tutti suscettibili di riduzione col procedimento ivi indicato. Basterà pertanto occuparci delle curve appartenenti sulla M^{24} ($p = 13$) a spazi di dimensione $\leqq 9$. Fra queste, i due casi di una C_1^{10} e di una C_0^8 multipla (su V_3^3, C_1^5, e C_0^4) risultano già esauriti da quanto è detto alla fine dei n. 31-32.

Osserviamo inoltre che a una C_1^8 di M^{24} corrisponde su V_3^3 una quartica ellittica, contenuta in una superficie cubica, la quale dalle ∞^1 quadriche passanti per la quartica è incontrata ulteriormente secondo un fascio di coniche 4-secanti la quartica stessa. Una superficie intersezione di V_3^3 con una forma di ordine n e avente la quartica come multipla di ordine $>\frac{n}{2}$ conterrebbe di conseguenza tutte le coniche anzidette (1), e perciò l'intera superficie cubica luogo di esse. Escluso questo caso, rimangono a considerarsi su M^{24} i soli casi di una linea multipla di ordine $\leqq 6$, cioè di una C_0^6, C_1^6, C_0^4, C^2; su V_3^3, di una cubica sghemba o piana, conica, o retta.

34. – Supponiamo vi sia su M^{24} un sistema lineare $|\Phi|$ di superficie di generi 1 segato da forme di ordine n e aventi una C_0^6 di di multiplicità $n+i (i>0)$, eventualmente fratto con denominatore 2 se è tale n, in modo che siano sempre $n\pm i$ numeri interi (2)). Dalla C_0^6 la M^{24} si proietta in una M^{10} di S_7 contenente una rigata razionale R^8 immagine della C_0^6 e un piano π proiezione della superficie F^{12} di S_9 passante per la C_0^6 (superficie che corrisponde all'intersezione di V_3^3 collo spazio S_3 della cubica immagine della C_0^6). Fra le sezioni iperpiane f^{10} della M^{10} e le superficie R^8 e π passa la relazione $f^{10}=R^8+2\pi$; le superficie F^{12} generiche di M^{24} si proiettano in $F^9=R^8+\pi$; le Φ, in $nf^{10}-iR^8=(n-i)f^{10}+2i\pi$.

La M^{10} ha 6 punti doppi, contenuti nel piano π, immagini delle coniche bisecanti la C_0^6, le quali sono $2i^{\text{ple}}$ per le Φ (3). La R^8 incontra il piano π secondo una quintica con questi stessi 6 punti doppi; e le proiezioni delle Φ incontrano π secondo curve di ordine $n-5i$ (perciò $i<\frac{n}{5}$).

(1) Ciò risulta anche immediatamente dalla rappresentazione piana della superficie cubica.

(2) Convenzioni rispetto a n e i che non danno luogo ad alcun inconveniente, e che si intenderanno mantenute in seguito.

(3) Queste 6 coniche corrispondono alle corde della cubica C^3 contenute nella V_3^3. La loro multiplicità per le Φ risulta anche immediatamente dalla rappresentazione piana della superficie cubica sezione di V_3^3 collo spazio della C^3.

Il sistema $|(n-i)f^{10}+2i\pi|$, proiezione di $|\Phi|$, prescindendo dagli eventuali suoi elementi multipli, avrebbe come $(n-i)^{\text{sima}}$ aggiunta la superficie $2i\pi$. Dovendo questa aggiunta mancare (poichè è certo $n-i>1$), esso avrà una linea di multiplicità $\geqq n-i+1$, o un punto isolato di multiplicità $\geqq 2(n-i)+1$. Non tenendo conto di questi elementi multipli, il sistema completo $|(n-i)f^{10}+2i\pi|$ rappresenterà una varietà μ a 3 dimensioni, sulla quale al piano π corrisponderà una superficie tipo VERONESE, eventualmente non normale, di ordine $(n-5i)^2$ (1). E questa varietà μ dovrà proiettarsi in una M^{2p-2} di S_{p+1} del nostro tipo da uno spazio contenente almeno tutti i suoi S_{n-i+1} osculatori nei punti di una linea ξ, o da uno spazio almeno $2(n-i)+1$ - osculatore in un suo punto P. Ora la linea ξ non può certo incontrare la superficie tipo Veronese immagine di π, nè il punto P appartenere ad essa, perchè ogni iperpiano passante per lo spazio da cui dovrebbe effettuarsi la proiezione incontrerebbe questa superficie in una linea che vi avrebbe multiplicità $\geqq n-i+1$, rispett. $\geqq 2(n-i)+1$; in ogni caso quindi $>n-5i$, il che non è possibile. Se invece la linea ξ non incontrasse questa superficie, o il punto P non le appartenesse, dovrebbe la M^{2p-2} contenere essa una superficie tipo Veronese; e questo non è nemmeno possibile. Invero le sezioni iperpiane generiche, prive cioè di punti doppi, di una superficie così fatta, sia pure non normale, sono di ordine m^2 e genere $\binom{m-1}{2}$. Invece su una superficie generale f^{2p-2} sezione della M^{2p-2} le curve generiche, prive di punti doppi, sono di ordini $k(2p-2)$ e generi $k^2(p-1)+1$. E queste coppie di caratteri non si possono rendere eguali; per la prima ad es. l'ordine è superiore al genere, per quest'ultima, se $k>1$, inferiore.

35. - Si abbia ora sulla M^{24} un sistema lineare $|\Phi|$ di superficie di generi 1, segate da forme di ordine n, e aventi una C_1^6 multipla di ordine $n+i (i>0)$. Dalla C_1^6 la M^{24} si proietta in una M^{12} di S_8 contenente una rigata R_1^6 di S_5 immagine della C_1^6, e un fascio di

(1) Una superficie cioé rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve piane di ordine $n-5i$ senza punti basi. Si avrebbe una superficie di VERONESE (del 4° ordine) nel caso $n-5i=2$ (G. VERONESE, *La superficie omaloide normale del 4° ordine* ..., « Mem. R. Accad. Lincei » (3), vol. 19, 1883-84).

superficie cubiche generali φ^3 (di S_3), proiezioni delle F^{12} di M^{24} contenenti la C_1^6, le quali incontrano R_1^6s econdo un fascio di cubiche piane sue direttrici [1]. Le Φ si proiettano in superficie $nf^{12} - iR^6 = (n-i)f^{12} + 2i\varphi^3$, le quali sulle φ^3 segano il sistema lineare $(n-i)^{\text{plo}}$ delle sezioni piane, di genere $3\binom{n-i}{2}+1$. Il sistema $|(n-i)f^{12}+2i\varphi^3|$, dovendo mancare dell' $(n-i)^{\text{simo}}$ aggiunto [2], che qualora esso non abbia elementi multipli sarebbe $2i\varphi^3$, dovrà avere una linea di multiplicità $\geqq n-i+1$, oppure un punto isolato di multiplicità $\geqq 2(n-i)+1$. Quest'ultimo caso va però escluso, non potendo un punto di multiplicità così elevata stare su alcuna delle φ^3 suindicate: nè potrà stare su una φ^3 l'eventuale linea multipla. Questa linea incontrerà pertanto le φ^3 in un numero finito di punti; e precisamente in non più di due punti, dato che tre punti $(n-i+1)^{\text{pli}}$ basterebbero a rendere riducibili tutte le curve segate dalle Φ sulle φ^3.

Riferiamoci per maggior comodità a una V_3^3 di S_4 sulla quale il sistema $|\Phi|$ sarà segato da forme di ordine che indicheremo ancora con n (doppio del precedente n), con una cubica piana γ multipla di ordine $\frac{n}{2}+i$ (dove i è lo stesso di prima); alle superficie φ^3 corrisponderanno le sezioni cogli spazi passanti per il piano di γ, e che indicheremo ancora con φ^3. Il sistema $|\Phi|$ avrà inoltre una linea ε di multiplicità $\frac{n}{2}-i+h\,(h>0)$ incontrante ogni φ^3 in uno o due punti variabili. Si può allora facilmente definire su V_3^3 una trasformazione involutoria che muti in sè ogni superficie del fascio $|\varphi^3|$, e su ciascuna di queste un fascio (almeno) di cubiche sezioni piane; non abbia punti fondamentali isolati, e abbia come linee fondamentali di 1ª specie le sole γ e ε. Se la linea ε è unisecante le φ^3, basta a tal uopo considerare la proiezione doppia di ogni φ^3 dal punto sua intersezione variabile con ε. Se invece ε incontra ogni φ^3 in due punti A, B (a parte le intersezioni fisse con γ), consideriamo per ciascuna φ^3 il fascio delle cubiche sezioni coi piani passanti per la retta AB, e su ciascuna di queste cubiche la terza intersezione (fissa) C colla retta AB, e il punto

---

[1] Questa varietà M^{12} fu da me già considerata nella Memoria «Berz», n. 14.

[2] Se $n>1$, e il sistema $|\Phi|$ rappresenta, come per ipotesi, una M^{2p-2} con sole superficie intersezioni complete, è certo $n-i>1$.

variabile) C' tangenziale di C. La trasformazione da considerarsi su V_3^3 subordina su ciascuna di queste cubiche (complessivamente in numero di ∞^2) la proiezione doppia dal relativo punto C'. Per note proprietà delle cubiche, questa proiezione doppia equivale al prodotto delle 3 proiezioni doppie dai punti A, C, B, in quest'ordine (oppure, indifferentemente, nell'ordine inverso B, C, A); e coincide altresì coll'involuzione g_2^1 avente C come punto unito [1].

In entrambe queste trasformazioni sono unite le ∞^1 superficie φ^3 passanti per γ. Perciò, se alle superficie f^3 sezioni iperpiane generiche di V_3^3 corrispondono superficie segate da forme di ordine x, alla cubica γ corrisponderà una superficie fondamentale segata da una forma di ordine $x-1$ (dovendo questa superficie, insieme con una φ^3, equivalere all'intersezione con una forma di ordine x). D'altra parte alle superficie intersezioni con quadriche, di generi 1, e doppie delle f^3, corrisponderanno superficie segate da forme di ordine $2x$, la cui unica aggiunta, costituita dall'insieme delle due superficie fondamentali corrispondenti alle linee γ e ε, deve essere segata da una forma di ordine $2(x-1)$; la superficie corrispondente a ε sarà perciò anche segata da una forma di ordine $x-1$.

Al sistema $|\Phi|$ corrisponderà pertanto, nella trasformazione dianzi definita, un sistema lineare di superficie segato da forme di ordine

$$xn-(\frac{n}{2}+i)(x-1)-(\frac{n}{2}-i+h)(x-1)=n-h(x-1);$$

e perciò certamente minore di n. E la multiplicità della linea γ per queste nuove superficie sarà a sua volta minore di questo nuovo ordine; senza di che la trasformazione, che è involutoria, ripetuta, non potrebbe riprodurre il sistema primitivo $|\Phi|$. Se ε è di ordine k e incontra perciò la cubica γ in $k-1$ punti, si trova facilmente che la trasformaziono considerata è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{aligned} f' &= (2k+2)f - 2k\gamma - 3\varepsilon \\ \gamma' &= (2k+1)f-(2k-1)\gamma - 3\varepsilon \\ \varepsilon' &= (2k+1)f - 2k\gamma - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

---

(1) La trasformazione da considerarsi è stata definita come sopra, appunto collo scopo che la ε sia linea fondamentale. Prendendo su ciascuna delle stesse ∞^2 cubiche la proiezione doppia dal punto C, sarebbe stata fondamentale la linea luogo dei punti C, e la ε linea unita, sulla quale sarebbe stata subordinata l'involuzione delle coppie A B.

Se ε, anche di ordine k e genere p, biseca le φ^8 (e incontra perciò γ in $k-2$ punti), le equazioni sono:

$$f' = (10k-12p-7)f-(10k-12p-12)\gamma-6\varepsilon$$
$$\gamma' = (10k-12p-8)f-(10k-12p-13)\gamma-6\varepsilon$$
$$\varepsilon' = (10k-12p-8)f-(10k-12p-12)\gamma-5\varepsilon.$$

In particolare se ε è una conica ($k=2$, $p=0$):

$$f' = 13f-8\gamma-6\varepsilon$$
$$\gamma' = 12f-7\gamma-6\varepsilon$$
$$\varepsilon' = 12f-8\gamma-5\varepsilon$$

36. - Il caso di un sistema $|\Phi|$ anche di generi 1, avente come linea di multiplicità massima sulla M^{24} una quartica, o sulla V_3^3 una conica, si tratta in modo analogo, salvo qualche differenza nella costruzione della trasformazione birazionale considerata su V_3^3.

La M^{24} di S_{14} da una sua quartica (necessariamente razionale, normale) si proietta in una M^{14} di S_9, contenente una rigata R^6, immagine della quartica, un punto doppio D immagine dell'unica conica di M^{24} bisecante la C^4 e doppio anche per R^6 (la quale R^6 non è perciò normale, ma appartiene a uno spazio S_6), e un fascio di φ^4 normali a sezioni ellittiche, proiezioni delle F^{12} di M^{24} passanti per la C^4. Le φ^4 passano semplicemente per D e incontrano R^6 secondo loro sezioni iperpiane con D doppio (1). Le Φ si proiettano in superficie $nf^{14}-iR^6=(n-i)f^{14}+2i\varphi^4$, le quali sulle φ^4 segano il sistema $(n-i)^{\text{plo}}$ delle sezioni iperpiane, di genere $4\binom{n-i}{2}+1$. Dovendo tali superficie essere prive di $(n-i)^{\text{sime}}$ aggiunte, che, a parte gli ulteriori

(1) Questa M_3^{14} (ritengo la stessa considerata da L. Roth, «London M. S. Proc.» (2), vol. 44 (1938), p. 47), oltre alla rigata R^6, contiene una R^{64} proiezione della ∞^1 di coniche di M^{24} appoggiate alla C^4. Le generatrici di R^6 sono direttrici del fascio $|\varphi^4|$; la R^{64} è luogo delle rette contenute nelle φ^4; e l'insieme di queste due rigate è l'intersezione completa di M^{14} con una forma del 5° ordine. Sorge perciò la questione se questa M^{14} con punto doppio, evidentemente riferibile alla M^{14} considerata ai n. 24 e seg. che è la sezione generica della Grass-

elementi mnltipli, sarebbero le $2i\varphi^4$; esclusa anche qui l'ipotesi di un punto isolato $(2(n-i)+1)^{\text{plo}}$; rimane sola ipotesi possibile quella di una linea di multiplicità $n-i+h(h>0)$, incontrante le φ^4 in non più di 3 punti.

Sulla V_3^3 di S_4 il sistema $|\Phi|$ verrà anche segato da forme di un certo ordine n (doppio del precedente) con una conica γ di multiplicità $\frac{n}{2}+i$, e la retta r di V_3^3 contenuta nel piano di γ come $2i^{\text{pla}}$ (1). Alle φ^4 corrisdondono su V_3^3 le φ^3 segate dagli spazi S_3 passanti per

manniana delle rette di S_5, ne sia proiettivamente caso particolare, e appartenga pertanto al sistema continuo di queste ultime. Ora ciò sembra a priori da escludere (nonostante qualche apparenza favorevole). La M^{14} sezione della detta Grassmanniana e la V_3^3 generale di S_4 essendo birazionalmente identiche e (come risulterà dal presente lavoro) irrazionali, perciò la V_3^3 generale distinta dalla V_3^3 con punto doppio, non si comprenderebbe come la detta M^{14} potesse invece acquistare per continuità un punto doppio, rimanendo birazionalmente identica a sè stessa. E infatti la M^{14} qui considerate *non* è proiettivamente caso particolare dell'altra; *non può ottenersi come sezione della Grassmanniana delle rette di* S_5. Dalla mia Nota: *Sulle sezioni spaziali della Grassmanniana*... «Rend. R. Accad. Lincei» (6), vol. II (1° sem. 1930), p. 329 (cfr. in part. n. 5) risulta infatti che sulle superficie F^{14} di S_8 sezioni generiche della Grassmanniana in parola la base delle linee ivi contenute è costituita dalle (sole) sezioni iperpiane; perciò la M^{14} sezione con un qualsiasi spazio S_9 non può contenere che superficie sue intersezioni complete con forme. E tale non è rigata R^6 dianzi considerata. A parte questo, si può anche ricorrere alla considerazione seguente. Supposto che l'attuale M^{14} possa ottenersi come sezione della detta Grassmanniana, si consideri in questa sezione il sistema ∞^2 di rette Γ corrispondente a una φ^4. Alle coniche della φ^4, incontrate in 2 punti dagli iperpiani dello spazio ambiente, corrisponderanno rigate aventi due generatrici comuni coi complessi lineari generici di S_5, cioè rigate quadriche, contenute in spazi S_3. E poichè su φ^4 ogni conica è bisecata da un fascio di altre, sue residue rispetto alle sezioni iperpiane, ogni rigata quadrica di Γ avrà a comune con ∞^1 altre due generatrici di uno stesso sistema; sicchè tutte queste ∞^1 quadriche e l'intero sistema Γ staranno nel medesimo S_3. Il sistema Γ è pertanto (come facilmente prevedibile) una congruenza (2, 2) dello spazio S_3, contenuta in un complesso lineare di questo ultimo spazio; e ogni complesso lineare di S_5 contenente Γ conterrà di conseguenza quest'ultimo complesso. Supposto pertanto che l'attnale M^{14} fosse sezione della Grassmanniana delle rette di S_5, questa sezione dovrebbe contenere tutti i punti immagini di ∞^3 rette di ciascuno di ∞^1 diversi spazi S_3, e perciò complessivamente ∞^4 punti; sarebbe cioè una varietà a 4 dimensioni.

(1) Ricordiamo che il primitivo n poteva essere anche numero fratto di denominatore 2, perciò l'attuale n dispari; e i in questo caso è fratto con denominatore 2.

il piano γr; alle loro sezioni iperpiane, il sistema di quartiche somma su ogni φ^3 delle sezioni piane e della retta r (nel quale sistema somma la retta r è fondamentale); e le Φ avranno pertanto ancora una linea ε di multiplicità $\frac{n}{2} - i + h \, (h > 0)$ incontrante ogni φ^3 in 1, 2, o 3 punti variabili. Si potrà allora definire su V_3^3 una trasformazione involutoria che muta in sè ogni φ^3; su ciascuna φ^3, almeno un fascio delle quartiche considerate, e che ha le sole γ ed ε come linee fondamentali di 1ª specie (mentre r è linea fondamentale di 2ª specie). Questa trasformazione permetterà di ridurre l'ordine delle superficie Φ, come al n. prec. Osserviamo inoltre che ciascun fascio delle quartiche anzidette contiene una curva composta di una cubica piana e della retta r, e ha perciò i 4 punti basi su questa cubica, quindi in un piano (se la r ne è parte fissa, il fascio ha in più 3 punti basi allineati).

Se ε incontra le φ^3 in 3 punti, questi sono su ogni φ^3 punti basi di un fascio di quartiche, avente un quarto punto base, così individuato. Fissando su ogni quartica la g_2^1 che ha quest'ultimo punto come doppio, risulta definita sull'intera V_3^3 una trasformazione involutoria, colle sole linee fondamentali di 1ª specie γ e ε (¹). Rappresentiamo sul piano una generica delle φ^4 dianzi considerate sulla M^{14} mediante un sistema di cubiche con 5 punti basi $A_1, \ldots A_5$. La corrispondente φ^3 di V_3^3 sarà allora rappresentata da questo stesso sistema con un sesto punto base R in più, immagine della retta r; il fascio di quartiche considerato su φ^3, dal fascio di cubiche passanti per i punti $A_1, \ldots A_5$ e per i tre punti P_1, P_2, P_3 immagini delle intersezioni E_1, E_2, E_3 di questa φ^3 colla linea ε; e all'ulteriore punto base X del fascio di quartiche assunto su ciascuna di queste linee come punto unito della g_2^1, corrisponderà nel piano il nono punto base del fascio di cubiche. Si riconosce allora immediatamente che l'involuzione costruita sulla φ^3 ha per immagine nel piano quella cui appartiene il sistema ∞^3 delle sestiche piane cogli 8 punti doppi $A_1 \ldots A_5 \, P_1 \, P_2 \, P_3$, e nella quale a ciascuno di questi 8 punti corrisponde la sestica avente questo punto come triplo e gli altri 7 come doppi. A ciascuno dei 3

(¹) Alla retta r corrisponde *un* punto su ciascuna φ^3, e perciò complessivamente, in corrispondenza degenere, la linea luogo di questi punti, unisecante le φ^3.

punti E corrisponde su φ^3 una C^8 avente questo stesso punto come triplo e gli altri due come doppi; alle cubiche sezioni piane di φ^3, linee di ordine 28, equivalenti alla somma di 7 sezioni piane e di 7 volte la retta r (cioè, complessivamente, a 7 sezioni iperpiane della φ^4). Non è possibile però, senza tener conto dell'ordine di ε e del modo in cui le sue eventuali intersezioni col piano γr si distribuiscono fra queste due linee, assegnare l'ordine della curva, unisecante le φ^3, che corrisponde su V_3^3 a ogni singolo punto della conica γ, cioè la multiplicità x' di γ per le superficie f^{3x} corrispondenti alle sezioni iperpiane di V_3^3. Si può osservare tuttavia che a una retta di una φ^3 appoggiata (semplicemente) a γ, p. es. a quella che ha per immagine uno dei punti A_i, corrisponde su φ^3 una C^7; mentre a una retta generica di V_3^3 corrisponde una C^x: perciò $x-x'=7$. Inoltre la retta r deve avere per le f^{3x} suddette (come risulta dalla rappresentazione piana delle φ^3) multiplicità $2x'-x$ e $\geqq 7$; perciò $2x'-x=k+7$. E da queste due equazioni si ricava $x=21+k$, $x'=14+k$. L'involuzione costruita su V_3^3 è pertanto rappresentata (per un certo valore di k) dalle equazioni:

$$\begin{aligned} f' &= (21+k)f-(14+k)\gamma-8\varepsilon \\ \gamma' &= (20+k)f-(13+k)\gamma-8\varepsilon \\ \varepsilon' &= (20+k)f-(14+k)\gamma-7\varepsilon\,; \end{aligned}$$

e risponde pienamente a quanto richiesto.

37. - Se invece ε biseca le φ^3, queste due intersezioni sono punti base di una rete di quartiche sulla φ^3 stessa, di grado 2; risulta così definita su ogni φ^3 e perciò sull'intera V_3^3 un'involuzione, che risponde di nuovo alle condizioni richieste. Esaminiamo in particolare il caso in cui ε è una conica, naturalmente non incontrante γ nè r; sicchè i loro piani σ (di ε) e π (di γ) s'incontreranno in un punto X non appartenente a V_3^3. Saranno unite su ogni φ^3 le ∞^1 cubiche segate dai piani passanti per le due intersezioni di queste φ^3 con ε, cioè complessivamente le ∞^2 cubiche sezioni coi piani passanti per X e incontranti sia π che σ in rette. Su ciascuna di queste cubiche i punti C_1, C_2, intersezioni con γ; E_1, E_2, intersezioni con ε; e due

qualunque punti corrispondenti P, P' staranno su una conica [1]. Chiamando s la retta di V_3^3 contenuta nel piano di ε saranno punti corrispondenti $R \equiv r . C_1 C_2$ e $S \equiv s . E_1 E_2$; perciò r, s rette fondamentali di 2ª specie corrispondenti; e, per ogni cubica, P e P' saranno allineati colla terza intersezione Y di tale cubica colla retta RS.

Le due coniche γ, ε entrano simmetricamente nella questione. A ogni punto C_1 di γ corrisponde una quartica passante doppiamente per C_1, semplicemente per C_2, e 4-secante ε; e analogamente scambiando le due coniche. Quando P descrive una retta generica g di V_3^3, i punti R, S descrivono su r, s punteggiate proiettive alla $g(P)$, quindi fra loro; generano perciò una quadrica, la cui ulteriore intersezione con V_3^3 è una C_0^4 (luogo di punti Y), essa pure riferita proiettivamente alla g (P). Queste ultime due linee hanno a comune il punto intersezione di g collo spazio rs; generano perciò una rigata di 4° ordine; e a g corrisponde la curva intersezione ulteriore di questa rigata con V_3^3, di ordine 7.

L'involuzione così costruita su V_3^3 è rappresentata pertanto dalle equazioni:

$$f' = 7f - 4\gamma - 4\varepsilon$$
$$\gamma' = 6f - 3\gamma - 4\varepsilon$$
$$\varepsilon' = 6f - 4\gamma - 3\varepsilon$$

Queste considerazioni si possono estendere al caso in cui la linea ε è di ordine qualsiasi $m > 2$ e genere p, sempre bisecante le φ^3 (quindi iperellittica). Le congiungenti delle coppie di punti E_1, E_2 intersezioni della ε colle singole φ^3 formano allora una rigata razionale di ordine $m-p-1$, incontrante il piano π secondo una direttrice di ordine $m-p-2$, e la V_3^3, all'infuori di ε, in una direttrice s di ordine $2m-3p-3$, che sostituisce la precedente retta s, anche come linea fondamentale di 2ª specie corrispondente alla retta r. Però le $m-2$ intersezioui di ε col piano π, e quindi le $2m-3p-4$ intersezioni della s anche con π possono distribuirsi in vario modo fra la conica γ e la retta r. Tuttavia in ogni caso le equazioni dell'involuzione ottenuta su V_3^3

(1) L'involuzione delle coppie PP' è appunto segata sulla cubica in parola dalle quadriche passanti per la conica γ e per i due punti E_1, E_2.

saranno del tipo seguente, per un certo valore di k (nullo se ε è una conica):

$$\begin{aligned} f' &= (7+k)f-(4+k)\gamma-4\varepsilon \\ \gamma' &= (6+k)f-(3+k)\gamma-4\varepsilon \\ \varepsilon' &= (6+k)f-(4+k)\gamma-3\varepsilon \end{aligned}$$

Se infine ε è unisecante delle φ^3, basterà considerare su ciascuna di queste superficie il fascio di quartiche aventi tale intersezione E come punto doppio, e su ciascuna di queste quartiche (ora razionali) l'involuzione avente come doppi i due punti sovrapposti in E (involuzione, sulle φ^3, tipo de Jonquières). La superficie fondamentale corrispondente alla linea ε è allora luogo delle quartiche aventi in E una cuspide, in numero di due, generalmente distinte, su ogni φ^3. Da ciò si trae che la linea ε deve avere per le superficie corrispondenti alle sezioni iperpiane di V_3^3 la multiplicità 8; e le equazioni dell'involuzione su V_3^3 saranno, per un conveniente valore di x:

$$\begin{aligned} f' &= xf-(x-7)\gamma-8\varepsilon \\ \gamma' &= (x-1)f-(x-8)\gamma-8\varepsilon \\ \varepsilon' &= (x-1)f-(x-7)\gamma-7\varepsilon \end{aligned}$$

38. – Consideriamo infine sulla V_3^3 un sistema lineare di superficie Φ segate da forme di ordine n e aventi una retta r di multiplicità $i > \frac{n}{2}$. Indicando con f una sezione iperpiana generica di V_3^3 e con φ la sezione con un iperpiano passante per r (sicchè $\varphi = f - r$), sarà $\Phi = nf - ir = (n-i)f + i\varphi$.

Le coniche δ di V_3^3 contenute nei piani per r saranno incontrate da queste superficie in $2(n-i)$ punti variabili; e dalle loro successive aggiunte, in quanto esistenti, in un numero di punti decrescente di due unità per volta, fino alle $(n-i)^{\text{sime}}$ aggiunte, $(2i-n)\varphi$, luoghi di ∞^1 coniche δ. La congruenza della δ può rappresentarsi birazionalmente su un piano α in modo che alle superficie φ corrispondano le rette di questo piano, e alle δ riducibili i punti di una curva generale $\mathbf{K}^5$ del 5° ordine.

Le superficie bisecanti le coniche $\delta (n=i+1)$ saranno del tipo $f+i\varphi$ e risulteranno rappresentate sul piano α doppio con curva di diramazione di ordine $2i+4$, ovunque tangente alla $\mathbf{K}^5$. Per $i=0$ abbiamo le ∞^4 sezioni iperpiane di V_3^3, alle quali corrispondono come curve di diramazione nel piano α le ∞^4 quartiche ovunque tangenti a $\mathbf{K}^5$ di un sistema determinato Σ, somma della conica 5-tangente a $\mathbf{K}^5$ immagine della ∞^1 di coniche δ tangenti alla retta r, e delle rette doppie (1). Per $i=1$ le $f+\varphi$ sono di generi uno e formano un sistema lineare ∞^{11}, segato dalle quadriche di S_4 passanti per la retta r; le corrispondenti C^6 di diramazione sono caratterizzate, entro il sistema completo ∞^{12} di sestiche ovunque tangenti a $\mathbf{K}^5$ somma di Σ e delle rette doppie, dall'essere in più ciascuna di esse ovunque tangente a una cubica razionale, immagine della retta r. In questo sistema ∞^{11}, Σ', di sestiche sono contenute anche ∞^1 sestiche spezzate nella $\mathbf{K}^5$ e una retta (variabile in un inviluppo quadrico); esse corrispondono alle $f+\varphi$ segate su V_3^3 delle quadriche polari dei punti di r (2) (3).

Per $i>1$ le $f+i\varphi$ possono avere una curva doppia unisecante $\infty^1\delta$; se questa ∞^1 di δ ha per immagine nel piano α una curva di ordine $k(\leq i)$, le corrispondenti C^{2i+4} di diramazione si spezzano in questa curva di ordine k, contata due volte, perciò trascurabile, e in una curva residua di ordine $2(i-k)+4$.

In particolare, un sistema lineare semplice, completo $|\Phi|$ di superficie bisecanti le δ e razionali, dovendo essere privo di aggiunte $(i-1)\varphi$, avrà una curva doppia ξ giacente su una $i\varphi$. Le curve di diramazione corrispondenti alle Φ nel piano α, prescindendo dall'immagine di ξ

(1) Cfr. la mia Nota: *Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale*, «Comm. Mathem. Helvetici», vol. 12, (1939-40), pag. 172.

(2) Queste quadriche passano per la curva Δ_6^{10} luogo dei punti doppi delle coniche δ riducibili. Cfr. la mia Nota ultima cit., n. 2.

(3) Pe $i=2$, si ha un sistema lineare ∞^{21} di superficie $f+2\varphi$, ciascuna delle quali é intersezione della data V_3^3 con una forma cubica avente la retta r come doppia (perciò anche con un fascio di V_3^3 tangenti alla prima lungo r). Fra esse, ∞^6 contengono la curva Δ_6^{10} di cui alla nota prec., e sono tangenti alle δ risp. lungo le ∞^6 cubiche piane sezioni della data V_3^3; le loro curve di diramazione nel piano α sono composte della C^3 immagine della cubica precedente e della $\mathbf{K}^5$.

da contarsi due volte, saranno dunque le stesse quartiche del sistema Σ; e un ragionamento analogo a quello del n. 10 mostra che il sistema $|\Phi|$ è ∞^4 e trasformabile birazionalmente nel sistema delle sezioni iperpiane di V_3^3.

Un sistema lineare semplice $|X|=|f+i\varphi|$ di bisecanti di generi uno avrà, se $i>1$, una curva doppia giacente su una $(i-1)\varphi$, che ne costituirà l'unica aggiunta; e le corrispondenti curve di diramazione, prescindendo dall'immagine di questa curva doppia, saranno C^6 del sistema completo ∞^{12} contenento Σ'. Anzi, se $|X|$ è completo, esso sarà precisamente ∞^{11} e birazionalmente equivalente al sistema $|f+\varphi|$. Invero, indicata con $\rho\geqq 4$ la sua dimensione, almeno $\infty^{\rho-1}$, perciò almeno ∞^3 delle sue superficie avranno C^6 di diramazione contenute nel sistema Σ', e saranno perciò una per una birazionalmente equivalenti, in due modi diversi, a altrettante superficie $f+\varphi$. In *una* di queste corrispondenze, che varierà con continuità al variare della coppia di superficie, si corrisponderanno anche le mutue intersezioni delle superficie anzidette dei due sistemi $|X|$ e $|f+\varphi|$; e queste corrispondenze saranno tutte contenute in un'unica corrispondenza birazionale su V_3^3, che muta in sè ciascuna delle coniche δ, e al sistema completo $(f+\varphi)$ fa corrispondere un sistema anche ∞^{11}, completo di bisecanti delle δ. E il sistema $|X|$, se completo, dovrà coincidere con quest'ultimo. Vale a dire: *Ogni sistema lineare semplice, completo di superficie di generi uno contenute in V_3^3 e bisecanti le coniche δ è birazionalmente equivalente al sistema ∞^{11} segato dalle quadriche passanti per la rette r.*

Ritorniamo adesso alla considerazione di un sistema qualsiasi $|\Phi|=|(n-i)f+i\varphi|$ di superficie di generi uno. Dovendo esso mancare di tutte le aggiunte successive alla prima, avrà una curva l di multiplicità $n-i+h(0<h<n-i)$, unisecante $\infty^1\delta$ e giacente su una superfiicie $m\varphi$ dove $m>\dfrac{2i-n}{h}$, perchè se no questa superficie contata h volte sarebbe per $|\Phi|$ un'aggiunta $(n-i)^{\text{sima}}$, o parte di questa. Se $h=n-i$, vale a dire se la linea l è $2(n-i)^{\text{pla}}$ per le Φ, e perciò queste non incontrano le δ ad essa appoggiate in punti variabili, l'ordine delle Φ potrà ridursi, come ai n. 10, 11, 13, 29, con una conveniente trasformazione birazionale che muti in sè ciascuna delle ∞^2 coniche δ. In questa trasformazione la differenza $n-i$ conserva lo stesso valore, perciò n ed i diminuiscono di uno stesso numero di unità; e quando, dopo una o più trasformazioni di questo tipo, n ed i abbiano assunti nuovi valori n', i' tali che $i' \leqq \frac{n'}{2}$, il sistema trasformato di $|\Phi|$, qualora sia ancora $n' > 2$, avrà una nuova linea, diversa dalla retta r, di multiplicità $> \frac{n'}{2}$.

In ogni altro caso, la superficie luogo delle $\infty^1 \delta$ appoggiate a l, analogamente ai n. 13 e 29-30, non potrà essere che una φ. Supposta l di ordine p e incontrante r in q punti, sarà $p-q=1, q=p-1$. L'ipotesi più semplice è $p=1, q=0$, che cioè la l sia anch'essa una retta sghemba con r; e le altre ipotesi sono da escludere, perchè dalla l si potrebbe staccare con continuità una retta incidente a r, la quale, viceversa, non può in alcun modo esserne parte. Essendo inoltre ora $1 > \frac{2i-n}{h}$, quindi $h > 2i-n, n-i+h > i$, vediamo che la retta l avrebbe per le Φ multiplicità superiore a quella di r. E potendosi supporre di avere presa come retta r quella di multiplicità massima per le φ, si cade in un assurdo.
Concludiamo pertanto: *Sulla varietà M^{14} di S_9 sezione generica della Grassmanniana delle rette dello spazio S_5 e sulla varietà cubica generale dello spazio S_4, birazionalmente identica alla precedente, ogni sistema lineare semplice completo di superficie di generi uno è birazionalmente equivalente al sistema delle sezioni iperpiane di una varietà del primo tipo, o al sistema delle superficie segate dalle quadriche su una varietà del secondo tipo.*

Le dette due varietà sono pertanto irrazionali; e i soli sistemi lineari semplici completi di superficie razionali in esse contenuti sono di dimensione 4 e grado 3.

APPENDICE

39. – Dal risultato precedente emerge che sono pure irrazionali altre varietà a tre dimensioni di cui la forma cubica generale dello spazio S_4 è, birazionalmente, caso particolare. Ad es. la M^6 di S_5 intersezione generale di una quadrica con una forma cubica è irrazionale, ed è ancora tale quando contenga tre piani della detta quadrica

di uno stesso dei due sistemi: ciò perchè le ulteriori quadriche passanti per questi tre piani segano su di essa un sistema ∞^4 di superficie equivalente appunto al sistema delle sezioni iperpiane di una varietà cubica generale di S_4 (¹).

Sono pertanto irrazionali:

1) *La M^6 di S_5 contenente un piano π*. Questa M^6 contiene, nei piani della quadrica passante per essa e incidenti a π secondo rette, una congruenza del 1° ordine di coniche, rappresentabile su un piano α in modo che alle ∞^1 coniche contenute nelle superficie φ^5 segate dagli iperpiani passanti per π corrispondano le rette del piano α, e alle coniche spezzate in due rette i punti di una curva piana $\mathbf{K}^7$ (in generale senza punti doppi). Le superficie bisecanti queste coniche risultano così rappresentate sul piano α doppio con curve di diramazione ovunque tangenti a $\mathbf{K}^7$. Per il piano π questa curva di diramazione è una C^4; per le sezioni iperpiane di M^6, sono C^6 appartenenti al sistema contenente l'insieme di questa C^4 e delle rette doppie; perciò C^6 i cui 21 punti di contatto con $\mathbf{K}^7$ appartengono a una quintica (¹).

2) *La M^4 generale di S_4 con retta doppia*; in quanto la precedente M^6 ha 7 punti doppi contenuti nel piano π, e da uno di questi si proietta appunto in una particolare M^4 con retta doppia (incontrata da uno spazio S_3 passante per questa retta in una coppia di quadriche). La M^4 generale con retta doppia contiene pur essa una congruenza del 1° ordine di coniche, riferibile a un piano α in modo che alle coniche riducibili corrispondano i punti d'una curva $\mathbf{K}^8$. Le superficie bisecanti queste coniche risultano rappresentate sul piano α doppio con curve di diramazione ovunque tangenti a $\mathbf{K}^8$.

La retta doppia della M^4 è anch'essa una particolare bisecante delle dette coniche; alle coniche tangenti a questa retta corrispondono in α i punti di una C^4 ovunque tangente a $\mathbf{K}^8$.

3) *La M^{12} di S_8 di* SEGRE («Berz.», n. 12), riferibile a una M^6 di S_5 contenente due piani incidenti. Questa M^{12} contiene due congruenze del 1° ordine di coniche, ciascuna rappresentabile su un piano α

(¹) Cfr. la mia Nota cit. negli «Atti Congr. internaz. dei matem.», Bologna vol. IV (1931), pag. 115.

(²) Sistema quindi di tipo diverso dal sistema Σ qui considerato ai n. 10 e seg.

in modo che alle coniche riducibili corrispondano i punti di una curva $\mathbf{K}^6$. Le bisecanti più semplici delle coniche di una delle due congruenze sono ∞^2 superficie F^6 appartenenti all'altra congruenza, e rappresentabili sul piano α doppio con C^4 di diramazione che esauriscono uno dei sistemi ∞^2 di quartiche ovunque tangenti a $\mathbf{K}^6$.

Inoltre:

4) *Lo spazio S^3 doppio con superficie di diramazione generale del 4° ordine* («Accad. It.», n. 10); poichè questo spazio doppio, quando la superficie di diramazione ha un piano tangente lungo una conica, è notoriamente proiezione di una forma forma cubica generale di S_4 (1). Nel caso della superficie di diramazione più generale, esso è pure riferibile a una M^{16} di S_{10} da me già incontrata (2).

40. – La M^6 di S_5 generale, essendo contenuta in una quadrica non cono, rappresenta, rispetto alla geometria della retta dello spazio ordinario, un complesso cubico generale; e la M^6 contenente un piano π rappresenta un complesso cubico contenente una stella di rette P, o un piano rigato. Quest'ultima M^6, contenendo una congruenza del 1° ordine di coniche bisecate dal piano π, può rapprentarsi su *un'involuzione* $\mathbf{I}_2$, naturalmente *irrazionale, di coppie di punti dello spazio* S_3 (3). Questa rappresentazione può farsi in modo che le rette del complesso cubico siano precisamente le congiungenti delle coppie di punti coniugati nell'involuzione.

Sia Δ un complesso cubico contenente una stella di rette P. Esso conterrà altresì, nei piani della stella P, altrettanti inviluppi di 2ª classe ε (coniche-inviluppi) di rette del complesso. Una retta generica r del complesso appartiene a uno (solo) di questi inviluppi, del quale due rette, generalmente distinte, passano per P. La rappresentazione in in parola si ha facendo corrispondere alla retta r le sue intersezioni R, R' con queste due rette della stella P. Evidentemente a punti R di una retta della stella P corrispondono nell'involuzione $\mathbf{I}_2$ punti R' anche di una retta di questa stella; e queste due rette sono

(1) Cfr. i lavori di C. Segre e G. Castelnuovo cit. al n. 26.

(2) «Accad. It.» n. 10; «Comm. Mathem. Helv.» vol. 14 (1941-42), pag. 203; n. 6,

(3) Enriques, *Intorno alla risoluzione razionale...*, «Ann. di Matem.» (3). vol. 20 (1913).

coniugate in un'involuzione di Geiser, generata da una rete di coni cubici della stella P (1) con 7 rette basi $a_1, a_2, \ldots a_7$ (corrispondenti ai 7 punti doppi della M^6 nel piano π) e a sua volta subordinata dall'involuzione $\mathbf{I}_2$ delle coppie RR'.

Volendo assegnare la trasformazione Cremoniana involutoria **T** in cui si corrispondono le coppie R, R', osserviamo che, fra gli inviluppi ε, ∞^1 si spezzano in due fasci; e i raggi di questi fasci passanti per P costituiscono un cono Γ^{21}, di genere 29, colle rette a_i come 7^{ple} e 14 generatrici doppie $b_h (h = 1, 2, \ldots 14)$. La linea iuogo dei centri di questi fasci non passa per P; è perciò una γ^{21}_{29}, colle rette b_h come corde (2). La γ è linea fondamentale della **T**: a ogni suo punto C corrisponde la generatrice del cono Γ^{21} passante per il punto C' di γ stessa, centro del fascio di rette del complesso Δ complanare col fascio C. Sono pure rette fondamentali di 1ª specie le a_i, mentre le b_h sono fondamentali di 2ª specie.

Le rette unite dell'involuzione di Geiser hanno per luogo un cono $\Lambda^6 (a_i^2, b_h)$; esse sono le tangenti in P alle coniche ε passanti per questo punto, e sono pure luoghi di punti uniti per la $\mathbf{I}_2$.

Ai piani passanti per P corrispondone gli ∞^2 coni $\Gamma^8 (a_i^3)$; a P stesso, il monoide luogo dei punti di contatto delle coniche ε colle loro tangenti uscenti da P. Il cono tangente in P a questa superficie è il cono Λ^6 predetto: si tratta perciò di una $F^7 (P^6, a_i^2, b_h)$.

La trasformazione involutoria **I** *è perciò di ordine 15;* ai piani corrispondono superficie $F^{15} (P^{14}, a_i^5, b_h)$ (3).

---

(1) Questi coni cubici appartengono rispett. ad altrettante congruenze di rette (2, 3) contenute nel complesso Δ, immagini delle superficie F^5 intersezioni di M^6 cogli spazi S_4 passenti pel piano π.

(2) Il sistema delle rette di questi fasci è una congruenza (14, 21), immagine della rigata R^{35} luogo delle rette di M^6 componenti delle coniche riducibili della congruenza.

(3) Essendo la **T** involutoria, alle rette corrispondono curve anche di ordine 15, col punto P come 7^{plo}. L'intersezione di due F^{15} si compone delle rette a_i, che vi contribuiscono complessivamente per $7.5^2 = 175$ unità; delle 14 rette b_h, della γ^{21}, e di una C^{15} variabile.