

GINO FANO

GINO FANO

Su alcuni lavori di W. L. Edge

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 8, Vol. **3** (1947), p. 179–185

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1947_2>

Geometria. — *Su alcuni lavori di W. L. Edge.* Nota (*) del Socio G. FANO.

1. W. L. Edge in un gruppo di lavori pubblicati negli anni 1937-40⁽¹⁾ ha determinato per via geometrica alcuni luoghi legati proiettivamente a una rete di quadriche dello spazio S_3 , valendosene per trovare covarianti e combinanti delle forme primi membri delle equazioni di quelle quadriche. Alcuni dei suoi risultati valgono però in ipotesi più generali; e altri, frammentari a questioni di minor importanza, non sempre appaiono in piena luce.

Considerazione fondamentale è quella di una curva di genere 3 non iperellittica, riferibile perciò a una quartica piana; della sua serie lineare completa non speciale g_8^5 doppia della g_4^2 canonica, e della curva C_3^8 dello spazio S_3 che ne è immagine proiettiva. Su quest'ultima i G_4 canonici stanno in piani mutuamente incidenti; i piani dei gruppi di una g_4^1 formano un S_0 -cono cubico; e i vertici di questi ∞^2 coni hanno per luogo una superficie F^4 di Veronese contenente la C_3^8 , e incontrata da quei piani nelle sue ∞^2 coniche. La C_3^8 è intersezione completa della F^4 con una quadrica, la quale non può contenere il piano di alcuna delle sue ∞^2 coniche (piani *secanti* di F^4) né alcun suo piano tangente.

Le curve C_3^8 di S_3 dipendono da 44 parametri⁽²⁾; ma la condizione qui posta loro di essere immagine proiettiva della g_8^5 doppia della serie canonica — una g_8^5 determinata, fra ∞^3 — limita i parametri a 41, d'accordo col fatto che in uno spazio S_3 sono ∞^{27} le F^4 di Veronese⁽³⁾, e ∞^{14} le C_3^8 su ciascuna

(*) Presentata nella seduta dell'11 giugno 1947.

(1) *Notes on a net of quadric surfaces.* — I. *The Cremonian transformation*, «London Mathem. Soc. Proceed.» (2), vol. 43 (1937), p. 302; II. *Anharmonic covariants*, «Lond. Math. Soc. Journ.», vol. 12 (1937), p. 276; III. *The scroll of trisecants of the Jacobian curve*, detti «Proceed.», vol. 44 (1938), p. 466; IV. *Combinantal covariants of low order*; V. *The pentahedral net*, ibid., vol. 47 (1940-42), pp. 123, 455. V. anche i lavori anteriori: *The net of quadric surfaces associated with a pair of Möbius tetrads*, ibid., vol. 41 (1936), p. 337; *Octadic surfaces and quartic plane curves*, ibid., vol. 34 (1932), p. 492.

(2) SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (trad. LÖFFLER), Teubner 1921, pp. 160-61.

(3) Sono ∞^{35} le omografie di S_3 , e due qualunque di queste F^4 sono omografiche in ∞^8 modi.

di esse (tante quante le quartiche piane lorq immagini nella consueta rappresentazione piana della F^4).

In seguito, mi riferirò sempre a C_3^8 del tipo anzidetto. Ogni quadrica ne contiene ∞^{27} . Ma le F^4 di Veronese contenute in una quadrica assegnata di S_3 sono ∞^{12} , ripartite in due schiere, secondo che incontrano in 3 punti i piani della quadrica dell'uno o dell'altro sistema; e perciò le C_3^8 contenute in queste F^4 sono soltanto ∞^{26} .

2. Consideriamo ora in S_3 una quadrica determinata, non cono, come quadrica Ω delle rette dello spazio S_3 . Le ∞^{27} curve C_3^8 in essa contenute sono immagini di rigate R^8 di genere 3, con curva doppia di ordine 18 e genere 19 (v. appresso, nota (7)) incontrante ogni generatrice in 6 punti. I piani delle coppie di generatrici uscenti dai punti della curva doppia formano una sviluppabile di classe anche 18. La R^8 ha 8 punti tripli, tali pure per la sua curva doppia, e dualmente 8 piani tritangenti, cioè contenenti 3 generatrici (4). Su di essa i complessi lineari segano le serie g_8^3 doppia della serie canonica, e in particolare ∞^2 complessi lineari segano i singoli G_4 canonici contati due volte.

Poichè la curva C_3^8 ha i gruppi canonici in piani e per conseguenza sulle coniche intersezioni di questi piani colla quadrica Ω , i G_4 canonici della rigata R^8 apparterranno a altrettanti (∞^2) regoli, luogo dei quali sarà il complesso cubico L avente per immagine in S_3 la M_3^6 intersezione di Ω colla M_4^3 luogo dei piani secanti e dei piani tangenti di F^4 , e per la quale F^4 è superficie doppia. Il complesso cubico L ha pertanto le generatrici di R^8 come rette doppie. Per ogni retta di questo complesso non appartenente a R^8 passa *uno* di quegli ∞^2 regoli; nessuno di essi è cono, ma ∞^1 si spezzano in due fasci di rette, in corrispondenza ai piani secanti di F^4 che sono tangenti a Ω . Ogni G_4 canonico di R^8 contenente due generatrici incidenti ne contiene altre due pure incidenti; e queste due coppie di generatrici determinano una di quelle ∞^1 coppie di fasci, aventi a comune una retta r , congiungente dei loro centri e intersezione dei loro piani. Gli ∞^1 fasci costituiscono insieme una congruenza (18, 18), avente per immagine in S_3 la rigata R^{36} intersezione di Ω colla varietà, di ordine 18, luogo delle corde di C_3^8 , e anche colla M_3^{18} luogo dei piani secanti di F^4 che sono tangenti a Ω (5). I centri delle coppie di fasci di cui sopra formano sulla curva doppia della rigata R^8 un'involuzione γ_2^1 priva di elementi doppi; e le rette r loro congiungenti hanno per luogo una rigata R^{18} (6), la

(4) CASTELNUOVO, « Rend. Circ. Mat. Palermo », vol. 3 (1888), p. 27; C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, art. III C 7 della « Encykl. der Mathem. Wissenschaften », n. 31, p. 912 (1912).

(5) I piani delle coniche di un fascio su F^4 formano una V_3^3 , incontrata da Ω in una superficie di ordine 6, a sezioni di genere due, con sei coniche spezzate in coppie di rette. Perciò quei piani di coniche di F^4 che sono tangenti a Ω formano una varietà equivalente a 6 volte la precedente.

(6) L'ordine di questa rigata si determina applicando una nota formola di SCHUBERT. V. per esempio SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (*geometria delle serie lineari*), Bologna, 1926, p. 253.

cui immagine in S_3 , è la curva anche di ordine 18 luogo dei punti di contatto di Ω coi piani secanti di F^4 e tangenti a Ω . Tale curva è doppia per la rigata R^{36} suddetta (7).

Il complesso cubico L contiene un secondo sistema ∞^2 di regoli, corrispondenti alle coniche intersezioni di Ω coi piani tangenti di F^4 , tali che per una retta di L ne passano due. Fra questi regoli, di nuovo ∞^1 si spezzano in due fasci aventi per immagini in S_3 , le generatrici di un'altra rigata R^{36} (8); sicchè i fasci stessi hanno per luogo una seconda congruenza (18, 18). Questa nuova R^{36} ha anche una curva doppia di ordine 18, luogo dei punti di contatto di Ω coi piani tangenti ad essa e a F^4 .

La varietà M_4^3 dei piani secanti e tangenti di F^4 non contiene altre rette all'infuori di quelle contenute in questi piani; perciò il complesso L non contiene altri fasci di rette oltre i due sistemi ∞^1 già incontrati, i cui centri hanno per luoghi 2 curve di ordine 18. D'altra parte la curva complessiva luogo di tali centri deve essere di ordine 90 (9), e i fasci stessi devono costituire complessivamente una congruenza (90,90). Evidentemente, una almeno delle due congruenze (18,18) dovrà avere per la congruenza complessiva una certa molteplicità. Ora la M_4^3 ha la superficie F^4 come doppia, e pertanto la sua intersezione con un S_3 generico è una superficie cubica con 4 punti doppi, le cui congiungenti, sezioni di altrettanti piani secanti di F^4 , assorbono ciascuna 4 rette di una superficie cubica generale, mentre le rimanenti 3 rette contano semplicemente. Pertanto la prima ∞^1 di fasci del complesso L , determinati da coppie di generatrici incidenti di R^8 , va contata 4 volte, l'altra semplicemente (10).

(7) Il genere della curva doppia, di ordine 18, della rigata R^8 si può determinare in più modi. 1) Tale curva è in corrispondenza (2,1) colla rigata R^{18} delle rette r . E il genere di questa rigata, cioè della γ_2^1 di cui sopra, cioè della ∞^1 dei piani secanti di F^4 e tangenti a Ω , è quello di una C^6 piana generale, cioè 10. Dalla formola di ZEUTHEN, ritenuto che la γ_2^1 non ha elementi doppi, si ricava pertanto che il genere richiesto è 19. 2) questo stesso genere è anche quello della rigata R^{36} equivalente (come alla nota (5)) all'insieme di 6 superficie di di 6° ordine a sezioni di genere 2, aventi a coppie una conica comune. E poichè la R^{36} ha una curva doppia di ordine 18, il suo genere, che è quello della curva sezione, sarà $6 \cdot 2 + \binom{6}{2} \cdot 2 - 5 - 18 = 19$. - Questo risultato è d'accordo con una formola per il genere della curva doppia di una rigata algebrica, data da FR. MEYER nell'art. III C 10 b della « Encykl. der Mathem. Wiss. ». (*Flächen vierter und höherer Ordnung*, p. 1759), senza indicare (almeno in modo chiaro) a chi sia dovuta.

(8) Ciò in base a considerazioni analoghe a quelle della nota (5), applicate alla ∞^2 dei piani tangenti di F^4 anzichè ai piani secanti.

(9) - V. per esempio ZINDLER, *Algebraische Liniengeometrie*, Art. III C 8 della « Encykl. der Math. Wissenschaften », n. 41, pp. 1166-67 (1921). Proprietà dovuta a VOSS (« Mathem. Annalen », vol. 9 (1875), p. 55).

(10) Alla stessa conclusione si giunge considerando la sezione della M_4^3 con uno spazio S_4 . Si ha una V_3^3 con quartica doppia, contenente due sistemi ∞^2 di rette; uno (1,6) di corde della quartica, e uno (2,3) (C. SEGRE, « Mem. Accad. di Torino » (2), vol. 39 (1888), p. 3). Dovendo questi, opportunamente computati, costituire insieme il sistema (6,27) di una V_3^3 generale, non è possibile altra soluzione che di computare il primo 4 volte.

3. Passiamo ora a considerare tipi particolari di curve C_3^8 e rigate R^8 , nelle quali ultime la curva doppia di ordine 18 è sostituita da una curva tripla di ordine 6, o quadrupla di ordine 3, mentre i piani delle coppie di generatrici incidenti continuano a formare, generalmente, una sviluppabile irriducibile di classe 18 (oppure dualmente). Edge, prendendo le mosse da una rete di quadriche dello spazio S_3 , è condotto appunto a considerare in tutta la questione i soli casi *a*) e *c*).

a) Data in S_3 una rete generica di quadriche, le coppie di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche della rete costituiscono un'involuzione I_2 ⁽¹¹⁾, per la quale la linea \mathfrak{D}_3^6 , luogo dei vertici dei coni della rete è la sola linea fondamentale; e ai suoi punti P corrispondono le rette p trisecanti di essa, luogo delle quali è appunto una rigata R^8 avente la sestica \mathfrak{D} come tripla, e come nel caso generale 8 piani tritangenti ⁽¹²⁾. Queste rigate R^8 dipendono, come le reti di quadriche, da 21 parametri (anzichè 27). Su \mathfrak{D} i G_4 canonici sono le quaderne di vertici dei coni contenuti nei fasci della rete; e è noto già da Chasles ⁽¹³⁾ che le corrispondenti quaderne di generatrici p di R^8 appartengono a regoli: si tratta perciò di un caso particolare della R^8 di cui al n. 2. Le 3 generatrici di R^8 uscenti da uno stesso punto P di \mathfrak{D} appartengono a coppie a altrettanti G_4 canonici, per i quali il regolo si spezza nel fascio di queste 2 generatrici e in un secondo fascio col centro sulla p e il piano passante per P . Le congiungenti dei due centri formano di nuovo, come al n. 2, una rigata R^{18} per la quale \mathfrak{D} è linea tripla. A questo caso è particolarmente dedicato il lavoro III di Edge qui cit. alla nota ⁽¹⁾ ⁽¹⁴⁾.

b) La F^4 di Veronese contenente la curva C_3^8 può essere contenuta nella quadrica Ω , ed è allora immagine dalla congruenza (1,3) delle corde di una cubica sghemba, oppure della congruenza duale (3,1) delle intersezioni dei suoi piani osculatori. La rigata R^8 è allora intersezione di questa congruenza (l'una o l'altra) con un complesso quadratico di rette, e perciò generata da una corrispondenza simmetrica (4,4) sulla cubica, o nella svi-

(11) Le rette congiungenti queste coppie di punti sono le generatrici delle quadriche della rete; e luogo di esse è anche un complesso cubico.

(12) Ciascuno di questi 8 piani è tangente a tre coni della rete; e insieme essi formano un gruppo autoassociato, cioè base di un sistema lineare ∞^2 di quadriche-inviluppo (W. P. MILNE, *In- and circumscribed triangles of a plane quartic curve*, «Lond. Math. Soc. Journ.», vol. 8 (1932), p. 211; in part. n. 4, pp. 214-16.

(13) *Aperçu historique...*, 3^a ediz., Paris 1889, p. 692. In sostanza: Le intersezioni delle facce di un tetraedro coi piani polari dei vertici opposti rispetto a una stessa quadrica sono rette di un regolo.

(14) La corrispondenza involutoria I_2 è caso particolare della corrispondenza Cremoniana fra due spazi S_3 anche distinti, nella quale ai piani di ciascuno dei due spazi corrispondono nell'altro le superficie cubiche passanti per una sestica di genere 3 (qui la \mathfrak{D} stessa), e ai punti di questa sestica le trisecanti della sestica dell'altro spazio. Queste sestiche dipendono da 24 parametri, ma sono birazionalmente identiche alle \mathfrak{D} di cui sopra (dipendenti da 21 parametri). Per esse, la \mathfrak{D} , e la \mathfrak{D} più particolare del caso *c*) - indicate da EDGE (lav. cit. in «Lond. Math. Soc. Proceed.» (2), vol. 34) come SCHUR'S, HESSE'S, REYE'S sextics - V. le ampie indicazioni bibliografiche in ROHN-BERZOLARI, *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen*, art. III C 9 della «Encykl. der Math. Wissenschaften», (1926), n. 68, p. 1401 e sg.

luppabile Γ dei suoi piani osculatori; nel primo caso R^8 ha la cubica come linea quadrupla, nel secondo caso ha i piani di Γ come piani 4 - tangenti, e una linea doppia di ordine 18; in ambo i casi le quaderne di rette appartenenti a uno stesso punto o piano osculatore della cubica sono G_4 canonici di R^8 . Il complesso cubico L si compone delle ∞^3 rette appoggiate alla cubica, oppure rispettivamente contenute nei suoi piani osculatori.

c) Un caso ulteriormente particolare di a) e in pari tempo di b) si ha quando la rete di quadriche considerata in a) si compone delle prime polari dei punti di un piano π rispetto a una superficie cubica. Le stesse quadriche sono allora prime polari dei punti di ∞^1 diversi piani π rispetto a ∞^2 superficie cubiche aventi solo ∞^1 diversi pentaedri, il piano π variando colla superficie cubica mentre rimane fisso il pentaedro. La curva \mathfrak{D} dipende allora da soli 20 parametri. Gli ∞^1 piani π sono quelli di sviluppabile di 3^a classe Γ ; gli ∞^1 pentaedri hanno per facce i gruppi di una serie lineare g_5^1 entro Γ , e hanno i vertici sulla sestica \mathfrak{D} , nella quale perciò essi risultano inscritti. La corrispondenza simmetrica (4,4) del caso b) è quella che intercede fra le coppie di piani di Γ appartenenti a uno stesso gruppo della g_5^1 ; la rigata R^8 ha come generatrici le intersezioni di queste stesse coppie di piani, ha \mathfrak{D} come curva tripla, e i piani π di Γ come 4 - tangenti. Questi ∞^1 piani incontrano perciò \mathfrak{D} in 6 punti vertici di un quadrilatero completo (15).

4. Gli iperpiani (S_4) di uno spazio S_5 sono a loro volta elementi di uno spazio a 5 dimensioni, nel quale gli ∞^2 iperpiani tangenti lungo coniche a una F^4 di Veronese sono punti anche di una superficie di Veronese. Perciò in una qualsiasi reciprocità di S_5 , per esempio nella polarità rispetto alla quadrica Ω , agli iperpiani tangenti lungo coniche alla precedente F^4 corrispondono i punti di una nuova superficie di Veronese φ^4 (idea applicata da Edge); e agli ∞^4 iperpiani che incontrano F^4 in coppie di coniche, i punti dalla varietà μ_4^3 luogo dei piani secanti e piani tangenti di φ^4 . Questi stessi piani corrispondono nella detta polarità ai piani rispettivamente tangenti e secanti di F^4 ; e la relazione tra F^4 e φ^4 è reciproca.

Occorre però esaminare separatamente i due casi di una F^4 contenuta nella quadrica Ω , e di una F^4 incontrata da Ω in una C_3^8 .

Nel primo caso, pensando F^4 costituita entro Ω dalle corde di una cubica sghemba, le coniche di F^4 sono gli ∞^2 regoli composti di tali corde, con inclusi; e gli iperpiani tangenti a F^4 lungo coniche sono i complessi lineari che incontrano la congruenza (1,3) di quelle corde nei detti regoli o coni, contattati 2 volte. Fra questi interessano qui particolarmente i complessi lineari speciali, cioè gli iperpiani tangenti a Ω , i cui poli appartengono a Ω , e sono immagini delle rette direttrici di quei complessi. Ora le direttrici di uno

(15) Questa curva \mathfrak{D} non ha moduli generali; è riferibile a una quartica piana di LÜROTH («*Mathem. Ann.*», vol. I (1868), p. 37; *ibid.* vol. 13 (1878), p. 548), che è luogo dei vertici di ∞^1 5 - lateri, tutti circoscritti a una stessa conica. V. anche C. SEGRE, «*Atti Acc. di Torino*», vol. 59 (1923-24), p. 145. A questo caso c) è dedicata da EDGE la Memoria V qui cit. alla nota (1).

dei regoli anzidetti sono rette appoggiate alla cubica in un solo punto, direttrici di complessi lineari che incontrano la congruenza (1,3) in questo stesso regolo, più un cono; e soltanto quando la direttrice è tangente alla cubica quest'intersezione si riduce a un cono contato due volte. E poichè le tangenti della cubica, aventi per luogo una sviluppabile S^4 , costituiscono entro Ω una quartica razionale normale (di S_4), la superficie φ^4 non sarà contenuta in Ω , ma l'incontrerà in una quartica, evidentemente da contare due volte; cioè φ^4 sarà tangente a Ω lungo questa quartica ⁽¹⁶⁾.

Se invece F^4 non è contenuta in Ω , ma l'incontra in una C_3^8 irriducibile, gli iperpiani tangenti a F^4 lungo coniche di nuovo non saranno tutti tangenti a Ω ; perchè se no φ^4 sarebbe contenuta in Ω , e F^4 sarebbe tangente a Ω lungo una quartica, contro l'ipotesi.

L'intersezione di φ^4 e Ω sarà perciò una nuova curva γ_3^8 irriducibile, immagine di una rigata ρ^8 ; e l'intersezione $\mu_4^3 \cdot \Omega$ sarà immagine di un nuovo complesso cubico Λ avente le generatrici di ρ^8 come rette doppie, e luogo a sua volta di due sistemi ∞^2 di regoli. Anzi, poichè la polarità rispetto ad Ω muta ogni regolo nel regolo delle sue direttrici, o «complementare» del primo, questi nuovi regoli saranno i complementari di quelli contenuti nel complesso L ; e per ogni regolo contenuto in L e spezzato in due fasci $A(\alpha)$ e $B(\beta)$, il complesso Λ conterrà i fasci $A(\beta)$ e $B(\alpha)$; sicchè i fasci dei due complessi hanno complessivamente gli stessi centri e gli stessi piani, ma collo scambio degli uni o degli altri nel modo indicato. Così si spiega il fatto ⁽¹⁷⁾ che nel caso *a*) si spezza in tre fasci il cono cubico uscente da un punto di \mathfrak{F} non solo pel complesso L - proprietà evidente, avendo esso come rette doppie le 3 generatrici di R^8 uscenti da questo punto -, ma anche pel complesso Λ ⁽¹⁸⁾.

Anche le relazioni fra i complessi L e Λ e fra le rigate R^8 e ρ^8 sono reciproche. Ciascuno dei due complessi L e Λ si compone delle rette direttrici dei regoli contenuti nell'altro; rette perciò che incontrano 4 generatrici di ρ^8 o rispettivamente di R^8 di un G_4 canonico, e per conseguenza altre 4 di un secondo G_4 canonico. *I complessi cubici L e Λ sono luoghi delle rette incontranti rispettivamente le rigate ρ^8 e R^8 in punti appartenenti a generatrici di due gruppi canonici.* Più particolarmente, per le generatrici di R^8 e ρ^8 , rette doppie dei due complessi, questi due gruppi canonici coincidono. *Ciascuna delle due rigate R^8 e ρ^8 si compone di rette 4-tangenti all'altra in punti appartenenti a generatrici di un gruppo canonico.*

5. Se F^4 è contenuta in Ω , come nei casi *b*) e *c*) del n. 3, la curva γ_3^8 di φ^4 è sostituita da una quartica doppia, ed è perciò prevedibile che la rigata ρ^8 sia sostituita dalla sviluppabile S^4 anche doppia. Nell'ipotesi *b*) mi

(16) Sono queste entro Ω le ∞^{12} quartiche - tante quante le F^4 , e ∞^7 in ogni sezione iperpiana - immagini di sviluppabili S^4 ; quelle stesse per cui la polarità rispetto alla quartica coincide colla polarità rispetto alla quadrica sezione di Ω coll'iperpiano relativo.

(17) Cfr. EDGE, Mem. III, pp. 476-77.

(18) Del quale pertanto le rette intersezioni dei piani dei 3 fasci sono rette singolari, e \mathfrak{F} linea tripla dalla superficie singolare.

riferisco, per fissare le idee al caso della rigata R^8 generata da una corrispondenza $(4,4)$ nella sviluppabile Γ .

Ogni generatrice g di S^4 è generatrice di contatto con un piano della sviluppabile Γ , il quale contiene 4 generatrici di R^8 , formanti un gruppo canonico; g incontra pertanto queste 4 generatrici, né può incontrarne altre, perchè per nessun suo punto passano altri due piani di Γ . Essa è pertanto tangente a R^8 nelle 4 intersezioni anzidette.

Ogni generatrice di R^8 è intersezione di due piani di Γ , e perciò tangente a S^4 nelle sue intersezioni colle generatrici di contatto di questi due piani. Può quindi considerarsi come 4-tangente alla S^4 doppia. E sulla ρ^8 così degenerata ogni coppia di generatrici, contata due volte, è un gruppo canonico.

Le due rigate R^8 e S^4 hanno a comune 8 generatrici, provenienti dagli elementi doppi della corrispondenza $(4, 4)$ del caso $b)$, e che nel caso $c)$ costituiscono il gruppo Jacobiano della g_5^1 entro Γ ; e si toccano inoltre lungo una curva di ordine 12.