
I Grandi Matematici Italiani online

GINO FANO

GINO FANO

Le trasformazioni di contatto birazionali del piano

Comment. Math. Helv., Vol. **20** (1947), p. 181–215

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1947_1>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Le trasformazioni di contatto birazionali del piano

Di GINO FANO, Lausanne

1. Le trasformazioni di contatto nel piano e nello spazio a tre o più dimensioni, pur essendosi già presentate anteriormente ad altri Autori in casi particolari, sono state considerate in tutta la loro generalità, sia dal lato analitico che geometrico, da S. LIE¹⁾, il quale ne ha sviluppata la teoria principalmente dal punto di vista differenziale, nell'ipotesi che le funzioni che vi compaiono siano funzioni analitiche qualunque delle diverse variabili; e perciò limitatamente a un intorno conveniente di un punto generico. Vi hanno particolare importanza il concetto di trasformazione di contatto infinitesima, e le applicazioni all'integrazione di equazioni differenziali; LIE stesso se ne è fatto un poderoso strumento per ricerche ulteriori, fondamentali, di analisi e di geometria. — Le trasformazioni di contatto possono anche considerarsi nel campo algebrico e nel campo birazionale, applicate in tal caso in tutto il piano o lo spazio ambiente; ma in questi casi non sono state finora molto approfondite. L. AUTOMNE in due Memorie del 1887—88²⁾ ha impostato analiticamente il problema per il piano, studiandone alcuni casi elementari; e in lavori successivi³⁾ ha avviata la ricerca anche per lo spazio a tre o più dimensioni, considerando i diversi tipi di varietà, da lui dette "primordiales,, , che corrispondono ai punti e iperpiani come figure di elementi, e che al crescere della dimensione dello spazio ambiente danno luogo a casi numerosi.

Per il piano, questo studio è stato avviato da me in forma geometrica in alcune note del 1928⁴⁾. Avendo ora ripresa tale ricerca, sono

1) Le prime Memorie di Lie sull'argomento sono del periodo 1870—72. Esposizioni sistematiche si trovano nel Vol. II^o della „Theorie der Transformationsgruppen“ (1890) e nel volume *Lie-Scheffers*: „Geometrie der Berührungstransformationen“, I^o (1896). Alla morte di Lie (1899) erano già redatti pel Vol. II^o di quest'ultima opera soltanto tre capitoli, che furono pubblicati da F. Engel nel vol. 59 dei Math. Annalen (1904), p. 195, e compresi nelle „Gesammelte Abhandlungen“ di Lie, a cura di F. Engel e P. Heegard (Vol. II^o, 1937, p. 691).

2) Journ. de Mathém. (4), vol. 3 (1887), p. 63; vol. 4 (1888), p. 177, 407.

3) Ultimo, la Memoria riassuntiva: „Sur les formes mixtes“, Annales de l'Univ. de Lyon, Sciences et Médec., vol. 16 (1905).

4) Rend. R. Accad. Lincei (6), vol. 8 (2^o sem. 1928), pp. 445, 529, 623; vol. 9 (1^o sem. 1929), p. 16; Atti del Congresso Intern. dei Matematici a Bologna, 1928 (vol. 3, p. 35).

pervenuto ad altri risultati, l'esposizione dei quali è oggetto della presente Memoria.

Nel piano, si chiama *elemento lineare* o anche soltanto *elemento* l'insieme di un punto e di una retta che si appartengono; denominazione giustificata dalla corrispondente figura geometrica, qualora tale retta si consideri limitata a un breve segmento nell'intorno di quel punto. Per la rappresentazione analitica, quando si tratta di elementi propri, si può far uso delle coordinate cartesiane x, y del punto e del coefficiente direttivo p della retta che insieme costituiscono l'elemento. Per elementi eventualmente impropri, conviene far uso di coordinate omogenee, proiettive o loro casi particolari, x_1, x_2, x_3 , risp. u_1, u_2, u_3 , di cui complessivamente 4 indipendenti, legate in più dalla relazione $\sum u_i x_i = 0$. Una semplice infinità di elementi, le cui coordinate x, y, p siano funzioni di un parametro soddisfacenti alle occorrenti condizioni di continuità e derivabilità, dà luogo a una linea costituita dai punti x, y , e a una linea in generale diversa involuppo delle rette che con quei punti costituiscono i singoli elementi. Quando questi due luoghi coincidono, il sistema degli ∞^1 elementi costituisce una *Unione (Verein)*. Il tipo più generale di unione si compone degli elementi costituiti dai punti di una curva piana associati alle relative tangenti, inclusovi il caso di una retta fissa associata ai singoli suoi punti; ed è pure un'unione il sistema duale di quest'ultimo, cioè l'insieme degli ∞^1 elementi appartenenti a un punto fisso (involuppo delle ∞^1 rette passanti per questo punto). Nel concetto di "unione" sono perciò raggruppati i due concetti di "linea" e di "punto". Analiticamente, le unioni sono caratterizzate dalla relazione differenziale $dy - p dx = 0$, che si verifica lungo ognuna di esse: in coordinate omogenee, da una qualunque delle due relazioni $\sum u_i dx_i = 0$ oppure $\sum x_i du_i = 0$, fra loro equivalenti in forza della $\sum u_i x_i = 0$. Due elementi infinitamente vicini di una unione si dicono *in posizione unita*. Quando due elementi prossimi (x, y, p) e $(x + \Delta x, y + \Delta y, p + \Delta p)$ si avvicinano indefinitamente entro un'unione, la quantità $\Delta y - p \Delta x$ al limite è infinitesima almeno di 2° ordine rispetto a uno almeno dei tre incrementi $\Delta x, \Delta y, \Delta p$ come infinitesimo di 1° ordine; il che talvolta si esprime in forma geometrica dicendo che due elementi in posizione unita sono tali che il punto dell'uno appartiene alla retta dell'altro, a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Trasformazioni di contatto sono le trasformazioni del sistema ∞^3 degli elementi del piano, che mutano ogni unione in un'unione, ossia elementi in posizione unita in elementi pure in posizione unita; perciò genericamente linee tangenti fra loro in un punto in linee anche tangenti in un

punto (e da questo trae origine il loro nome), inclusi fra le linee anche i punti come particolari unioni. In coordinate non omogenee, sono le trasformazioni delle tre variabili x, y, p :

$$x_1 = X(x, y, p); \quad y_1 = Y(x, y, p); \quad p_1 = P(x, y, p) \quad (1)$$

che mutano l'equazione $dy - p dx = 0$ in sè stessa; tali cioè che sia identicamente:

$$dY - PdX = \rho(x, y, p) (dy - p dx)$$

dove ρ è una funzione delle tre variabili x, y, p , non identicamente nulla.

2. *Trasformazioni di contatto birazionali.* — La trasformazione di contatto (1) si dirà *birazionale* quando è in pari tempo una trasformazione birazionale delle tre variabili x, y, p ; cioè quando le X, Y, P sono funzioni razionali delle x, y, p , e tali che dalle (1), per valori generici di x_1, y_1, p_1 , possano ricavarsi le x, y, p come funzioni pure razionali delle prime.

Sono trasformazioni di contatto birazionali le trasformazioni cremoniane del piano, estese agli elementi nel senso di S. LIE, cioè in quanto gli elementi uscenti da un punto P generico vengono, come conseguenza della trasformazione puntuale, a corrispondere proiettivamente agli elementi uscenti dal punto omologo P_1 ; e le trasformazioni birazionali del piano rigato (da alcuni chiamate trasformazioni “ortiche,”) estese in senso duale; quindi anche tutti i loro prodotti, i quali, ovviamente, possono ridursi a prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente. Sono pure trasformazioni di contatto birazionali le reciprocità piane, che mutano elementi punto-retta in analoghi elementi retta-punto, e le unioni-punti in unioni-rette, e viceversa; esse si possono anche ottenere come prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato⁵⁾.

Nelle trasformazioni cremoniane del piano punteggiato l'interesse principale si concentra sulle così dette *reti omaloidiche*, cioè sui sistemi ∞^2 di curve dell'un piano che corrispondono alle rette dell'altro piano. Questi sistemi sono caratterizzati dalle due proprietà seguenti:

a) le *linearità*, cioè che per due punti generici del piano passa una e una sola curva del sistema;

b) due curve generiche del sistema hanno una sola intersezione variabile (cioè fuori dei punti basi); e anzi la proprietà *a)* è in questo caso una conseguenza della *b)*. Le curve di questi sistemi sono notoriamente razio-

⁵⁾ P. es. riferendo proiettivamente uno stesso piano come punteggiato e come rigato a una medesima rete di coniche coi 3 punti basi tutti infinitamente vicini.

nali. La più generale trasformazione cremoniana si ottiene scegliendo ad arbitrio nei due piani due reti omaloidiche, una delle quali si può supporre che sia la rete delle rette, e ponendo fra queste due reti una proiettività arbitraria.

Nelle trasformazioni di contatto birazionali i sistemi pure ∞^2 di curve che corrispondono in ciascun piano ai punti dell'altro piano, o anche alle rette, poichè punti e rette sono ora sistemi ∞^2 di unioni fra loro equivalenti, sono caratterizzati da due proprietà analoghe alle precedenti, e che si può dire sono le stesse *limitate al campo infinitesimale*. Esse costituiscono ora due condizioni distinte:

a) Poichè ogni elemento del piano appartiene a un unico punto e a un'unica retta, così: *Vi è nel sistema ∞^2 una e una sola curva contenente un elemento generico assegnato.*

b) Due punti (e così due rette) infinitamente vicini sono sempre tali che un solo elemento dell'uno, ben determinato, è in posizione unita con un elemento dell'altro. Perciò, entro il nostro sistema ∞^2 di curve, una curva generica γ dovrà avere un solo elemento variabile in posizione unita con un elemento di ogni singola curva ad essa infinitamente vicina. Per conseguenza γ avrà colle curve del sistema ad essa infinitamente vicine una sola intersezione variabile, e una sola tangente comune variabile, mentre le altre intersezioni e tangenti comuni di γ con ogni curva infinitamente vicina a questa saranno tutte fisse. In altri termini, adottando un noto concetto di F. SEVERI, *il sistema ∞^2 ha come serie caratteristica una g_1^1 .*

Chiamerò d'ora in poi *sistema omaloidico* ogni sistema ∞^2 di linee piane soddisfacenti alle proprietà a) e b) ultimamente indicate, incluso il sistema ∞^2 dei punti, i quali, considerati come unioni, anche vi soddisfano. Le linee di un sistema omaloidico sono razionali risultando ciascuna di esse, in forza della proprietà b), riferita birazionalmente al sistema ∞^1 delle sue infinitamente vicine. È pure razionale ogni sistema omaloidico come ente ∞^2 , perchè le sue curve passanti per un punto generico costituiscono ∞^2 diversi enti ∞^1 razionali in esso contenuti⁶⁾.

Ogni trasformazione di contatto birazionale fra due piani muta un sistema omaloidico in un sistema omaloidico. E questa trasformazione

⁶⁾ Le reti omaloidiche e i sistemi duali (sistemi lineari di curve-inviluppo, di grado 1) sono particolari sistemi omaloidici. Ma mentre in una rete omaloidica ad es. due punti generici individuano una curva della rete passante per essi, e questa proprietà si conserva al limite quando i due punti si avvicinano indefinitamente e sono sostituiti da un unico punto colla relativa tangente, una curva di un sistema omaloidico è bensì individuata in questo secondo modo, ma non nel primo. Del pari, in una rete omaloidica generica vi sono parecchie curve tangenti a due rette date r, r' ; e, se r' si avvicina indefinitamente ad r , si può domandare cosa avviene di queste curve, all'infuori di quell'una che è tangente a r

può individuarsi dando nei piani stessi due sistemi omaloidici arbitrari, uno dei quali può supporre che sia il sistema dei punti o delle rette, e ponendo fra i due sistemi come enti razionali ∞^2 una trasformazione birazionale arbitraria. Poichè in ciascuno dei due sistemi omaloidici gli elementi di ogni curva sono biunivocamente in posizione unita con *un* elemento delle singole curve infinitamente vicine alla prima, risulta così definita anche la corrispondenza subordinata fra gli elementi delle singole coppie di curve omologhe. Anche in ciò è ovvia l'analogia colle trasformazioni cremoniane.

All'infuori delle reti omaloidiche (cremoniane) e dei sistemi lineari duali di curve-involuppo, un esempio semplice di sistema omaloidico è il sistema ∞^2 delle coniche tangenti a una conica fissa in un punto fisso e in un secondo punto variabile. Esso si ottiene applicando a una rete omaloidica di coniche con due dei tre punti basi infinitamente vicini, aventi perciò a comune un punto *A* e la relativa tangente *a* più un punto ulteriore, una trasformazione cremoniana del piano rigato che muti i punti in coniche aventi a comune anche l'elemento *Aa*, più una tangente ulteriore.

Per un sistema ∞^2 di curve (naturalmente non omaloidico) può essere verificata sia l'una che l'altra delle proprietà *a*), *b*) senza che lo sia la rimanente. P. es. il sistema ∞^2 delle coniche tangenti a una conica fissa η nelle coppie di punti, entrambi variabili, di un'involuzione *I* soddisfa alla proprietà *a*) e non alla *b*); due coniche infinitamente vicine hanno, fuori di η , due intersezioni entrambe variabili⁷⁾. Invece ciascuno dei tre sistemi ∞^2 di coniche tritangenti a una cubica piana ellittica soddisfa

nel punto limite dell'intersezione $r r'$. Rispondiamo in particolare a quest'ultima domanda. Nella rete, considerata come un piano, e le cui curve supponiamo di ordine *n*, le curve tangenti a *r* formano una ∞^1 (curva piana) $I^{2(n-1)}$, razionale perchè riferibile a *r*. In questa ∞^1 vi sono $3(n-2)$ curve aventi con *r* contatto tripunto e $\frac{(2n-3)(2n-4)}{2} - 3(n-2) = (n-2)(2n-6)$ curve bitangenti a *r*; rispettz. cuspidi e punti doppi ordinari della $I^{2(n-1)}$ anzidetta. Quando r' tende a *r*, fra le $4(n-1)^2$ curve tangenti a entrambe le rette, cioè fra le intersezioni delle due *I*, questi varii elementi doppi ne assorbono $3 \cdot 3(n-2) + 2(n-2)(2n-6)$; e, tolta anche la curva tangente a *r* nel punto limite di $r r'$, ne rimangono $3(n-1)$. Queste sono le curve della rete aventi un punto doppio nelle intersezioni di *r* colla Jacobiana della rete, per ciascuna delle quali la *r* assorbe due delle tangenti uscenti da un suo punto qualunque.

⁷⁾ Questo sistema ∞^2 è contenuto nel sistema lineare ∞^3 delle coniche rispetto a cui il polo e l'asse dell'involuzione *I* su η sono elementi mutuamente polari. Per due punti generici del piano passano due coniche di quel sistema ∞^2 ; ma quando questi punti si avvicinano indefinitamente, una di queste due coniche tende come luogo a una retta doppia, la quale, come sistema ∞^1 (riducibile) di elementi, non contiene l'elemento lineare limite di quella coppia di punti. Queste ∞^1 rette doppie formano un particolare sistema ∞^1 entro il sistema complessivo ∞^2 di coniche.

alla proprietà b) e non alla a); per un elemento generico del piano passano 4 coniche del sistema 8).

Se la trasformazione di contatto (1) non è una trasformazione puntuale estesa agli ∞^2 elementi del piano nel senso già indicato, vale a dire se eliminando fra le equazioni (1) le variabili p, p_1 si ricava un'equazione unica (ora algebrica) fra x, y, x_1, y_1 :

$$F(x, y, x_1, y_1) = 0$$

(*aequatio directrix* di PLÜCKER), questa, quando vi si interpretino x, y come coordinate e x_1, y_1 come parametri, o viceversa, rappresenta al variare dei parametri le ∞^2 curve del primo o risp. del secondo piano corrispondenti ai punti dell'altro. Perchè la trasformazione (1) sia birazionale occorre e basta che questi due sistemi ∞^2 di linee soddisfaccino entrambi alla proprietà a), oppure entrambi alla proprietà b), poichè la proprietà a) dell'uno equivale alla proprietà b) dell'altro. Se l'equazione $F = 0$ è bilineare rispetto alle due coppie di variabili x, y e x_1, y_1 , essa rappresenta notoriamente una reciprocità fra i due piani, non degenera se il determinante dei 9 coefficienti è diverso da zero, e che è appunto una particolare trasformazione di contatto birazionale.

3. Le curve piane razionali di ordine $n(C^n)$ generalmente irriducibili dipendono da $\frac{n(n+3)}{2} - \binom{n-1}{2} = 3n - 1$ parametri, e formano un unico sistema continuo, non lineare se $n > 2$, della dimensione accennata. Entro questo sistema, la curva generica ha $\binom{n-1}{2}$ punti doppi variabili, che assorbono $(n-1)(n-2)$ sue intersezioni con ognuna delle curve infinitamente vicine; rimangono perciò $3n - 2$ loro intersezioni variabili. Il detto sistema ∞^{3n-1} ha dunque come serie caratteristica una g_{3n-2}^{3n-2} (completa). Per staccare da esso un sistema ∞^2 con g_1^1 caratteristica dovremo imporre alle sue curve $3(n-1)$ condizioni ulteriori, implicanti per ciascuna curva un egual numero di intersezioni fisse con tutte le sue infinitamente vicine. In altri termini, ciascuna di queste condizioni deve portare di conseguenza la diminuzione di uno stesso

⁸⁾ Riferito il piano a una F^4 di Veronese in modo che alle rette del piano corrispondano le coniche della F^4 , alla cubica piana considerata corrisponde una C_1^6 , per la quale passano altre tre F^4 analoghe (Rosati, Rend. Ist. Lomb. [2], vol. 35 [1901—02], p. 407; Veneroni, ibid. vol. 38 [1904—05], p. 523); e ai tre sistemi di coniche tritangenti alla cubica corrispondono i sistemi di ∞^2 iperpiani dello spazio S_5 tangenti lungo coniche a queste ulteriori F^4 . Per una retta tangente alla prima F^4 passano appunto, come per una retta generica dello spazio S_5 , 4 iperpiani di ciascuno di questi ultimi tre sistemi.

numero di unità per l'ordine e la dimensione della serie caratteristica. In particolare:

1) La curva razionale generica del sistema suindicato può essere vincolata ad avere, fra i suoi punti doppi, una o più cuspidi. Ciascuna di queste implica, rispetto ai $3n - 1$ parametri inizialmente disponibili, una condizione ulteriore; e assorbe d'altra parte una intersezione in più (3 anzichè 2) della curva considerata colle sue infinitamente vicine. Ordine e dimensione della g_{3n-2}^{3n-2} caratteristica diminuiscono perciò entrambi di un'unità.

2) La stessa C^n generica può essere vincolata a avere un punto k^{plo} fisso ($k > 2$). Poichè questo punto assorbe $\binom{k}{2}$ punti doppi della C^n già razionale, ciò implica solo $\binom{k+1}{2} - \binom{k}{2} = k$ condizioni in più. D'altra parte il punto k^{plo} fisso assorbe k^2 intersezioni di due C^n , mentre i $\binom{k}{2}$ punti doppi variabili ne assorbono $2\binom{k}{2} = k^2 - k$ di due C^n infinitamente vicine. Si ha pertanto ancora la stessa diminuzione k nell'ordine e nella dimensione della serie caratteristica.

3) La C^n generica non può invece avere un punto k^{plo} variabile, se $k > 2$. Invero la riunione di $\binom{k}{2}$ punti doppi in un punto k^{plo} non assegnato implica $\binom{k+1}{2} - 2 - \binom{k}{2} = k - 2$ condizioni, quindi la diminuzione di $k - 2$ unità nella dimensione del sistema delle C^n e della sua serie caratteristica. Ma ciò non porta invece alcuna diminuzione dell'ordine di questa serie; poichè un punto k^{plo} variabile di una C^n è $(k - 1)^{plo}$ per le curve infinitamente vicine, e assorbe perciò $k(k - 1)$ loro intersezioni, esattamente come l'insieme di $\binom{k}{2}$ punti doppi. *Per le curve di un sistema omaloidico gli eventuali punti di molteplicità superiore a 2 saranno pertanto tutti fissi.*

Chiamasi *punto caratteristico principale* di una curva piana variabile in un sistema continuo ogni punto *semplice* comune a questa curva e a tutte le sue infinitamente vicine. Per una curva di un sistema omaloidico sono perciò tali tutti i punti semplici comuni a questa e alle sue infinitamente vicine, all'infuori di uno solo, variabile (la serie caratteristica essendo una g_1^1). E mentre i punti doppi di tale curva, cuspidi incluse, pur essendo intersezioni fisse di questa con tutte le curve infinitamente vicine, possono invadere l'intero piano, ciò non avviene per i punti

caratteristici principali (semplici), ciascuno dei quali, se non è fisso, varia, al variare della linea considerata entro il sistema ∞^2 , soltanto su una linea tangente a tutte le linee del sistema⁹⁾. Queste nuove linee costituiscono insieme l'involuppo del sistema dato; a ciascuna di esse le linee del sistema omaloidico possono essere tangenti in più punti, generalmente variabili, ma eventualmente fissi, e anche con contatti di ordini superiori assegnati. Queste curve, insieme con gli eventuali punti basi del sistema omaloidico, sia semplici che multipli, sono tutte "unioni,, alle quali le linee del sistema omaloidico devono essere tangenti.

Supposto che la C^n generica del sistema omaloidico ∞^2 abbia $r (\geq 0)$ cuspidi, queste implicheranno un egual numero di condizioni fra le $3(n - 1)$ inizialmente disponibili; e le altre $3(n - 1) - r$ consisteranno appunto in contatti con unioni algebriche assegnate, colle avvertenze di cui sopra. Poichè una C^n razionale generica con r cuspidi è di classe $v = 2(n - 1) - r$, si potrà dire che *Ogni sistema omaloidico si compone delle curve razionali di un certo ordine n e classe v , assoggettate a $n + v - 1$ condizioni ulteriori, consistenti in altrettanti contatti con unioni algebriche assegnate.* Imponendo però alla detta C^n di avere $n + v - 1$ contatti con unioni algebriche comunque assegnate, si ha un sistema ∞^2 soddisfacente alla condizione b) enunciata al n. prec., ma in generale non alla condizione a). Perchè sia soddisfatta anche quest'altra condizione, dovranno le dette unioni essere scelte con particolari criteri, che saranno chiariti in seguito (benchè non ancora precisati per ogni caso).

Osserviamo, coll'occasione, che in un sistema continuo di curve piane algebriche di ordine n e classe v la somma $n + v$ (carattere duale di sé stesso) può ricevere un significato geometrico molto semplice: cioè il numero degli elementi di una curva generica che sono in posizione unita rispettivamente con altrettanti elementi di una curva infinitamente vicina. P. es.: nel sistema di tutte le C^n piane due curve generiche infinitamente vicine hanno n^2 intersezioni, e altrettante coppie di elementi in posizione unita; e n^2 è appunto la somma dell'ordine n , e della classe $n(n - 1)$.

4. *Rappresentazione degli elementi di un piano sui punti dello spazio S_3 .* Già S. LIE ha dato una rappresentazione algebrica e biunivoca, quindi birazionale, del sistema degli elementi lineari di un piano sullo spazio

⁹⁾ Ciò risulta da un'accurata ricerca di F. Severi e B. Segre (L'involuppo di un sistema più volte infinito di curve piane, Annali di Matem. [4], vol. 8 [1930], p. 173; in part. n. 2 e seg.). In un sistema omaloidico che non sia una rete con soli punti basi multipli ogni curva ha qualche punto caratteristico principale, ed è perciò curva principale; il sistema è perciò di rango due.

punteggiato¹⁰). Fra le coordinate (ξ, η, p) di un elemento lineare del piano e le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto dello spazio poniamo le relazioni:

$$x = \xi ; \quad y = \frac{1}{2}p ; \quad z = \eta - \frac{1}{2}p\xi$$

dalle quali si ricava, viceversa:

$$\xi = x ; \quad \eta = z + xy ; \quad p = 2y .$$

Si ha così una rappresentazione birazionale della varietà ∞^3 degli elementi del piano sopra lo spazio punteggiato. E poichè l'equazione differenziale $d\eta - pd\xi = 0$, che caratterizza le coppie di elementi in posizione unita, cioè le unioni del piano, si muta nell'equazione $dz + xdy - ydx = 0$, equazione Pfaffiana di un complesso lineare generale di rette \mathcal{A} , alle unioni del piano corrispondono nello spazio linee appartenenti al complesso lineare \mathcal{A} , cioè le cui tangenti sono rette di questo complesso; e viceversa. In particolare a linee piane algebriche corrispondono linee del complesso \mathcal{A} anche algebriche, in corrispondenza birazionale colle prime. Queste curve appartenenti a un complesso lineare hanno in ogni loro punto come piano osculatore il piano polare di questo punto rispetto al complesso; ogni loro singolarità è *autoduale*; inoltre, se sono algebriche, hanno la classe eguale all'ordine.

In particolare le rette del complesso lineare \mathcal{A} corrispondono alle ∞^3 parabole $\eta = a + b\xi + c\xi^2$ aventi il punto all'infinito sull'asse η .

Le trasformazioni di contatto birazionali del piano hanno per immagini le trasformazioni cremoniane dello spazio, che mutano in sè l'equazione Pfaffiana suddetta, cioè il sistema degli elementi punto-retta, e quindi anche il sistema degli elementi punto-piano di questo complesso. Ai sistemi omaloidici del piano corrispondono nello spazio *congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso lineare \mathcal{A}* . In particolare agli ∞^2 punti e alle ∞^2 rette del piano corrispondono due congruenze lineari speciali di rette contenute nel complesso \mathcal{A} . Introducendo coordinate omogenee di punto (x, y, z, t) , le direttrici di queste due congruenze sono le rette improprie $x = t = 0$ e $y = t = 0$. Sono elementi fondamentali della rappresentazione:

¹⁰ Geometrie der Berührungstransformationen I, p. 238. La rappresentazione risale però ai lavori di *Lie* del 1870—72. Per questa rappresentazione cfr. anche i lavori più recenti di *K. Strubecker* (Monatsh. Math.: Phys., vol. 42 [1935], p. 309); *E. A. Weiss* (Journ. f. Math., vol. 177 [1936], p. 116; vol. 178 [1937], p. 123; Monatsh. Math. Phys., vol. 46 [1937], p. 99); *H. Beck* (Math. Zeitschr., vol. 42 [1937], p. 543). In quest'ultima Memoria è pure citato: *A. Werner*, „Die systematische Stellung ebener Projektivitäten“ (Diss. Bonn, 1932), lavoro che non ho potuto esaminare io stesso.

nello spazio, tutti i punti delle rette $x = t = 0$ e $y = t = 0$, a ciascuno dei quali corrispondono gli ∞^1 elementi di un'unione, e cioè risp. gli elementi di una retta parallela all'asse η , e gli elementi di uno stesso punto improprio;

nel piano, l'elemento costituito dal punto all'infinito A dell'asse η e dalla retta all'infinito a , al quale corrispondono gli infiniti punti del piano $t = 0$. Più particolarmente, ai singoli elementi consecutivi ad Aa nell'intorno di 2° ordine di A corrispondono i punti delle diverse rette del fascio di centro $x = y = t = 0$ nel piano $t = 0$.

A una curva piana algebrica di ordine n e classe ν in posizione generale (più precisamente, non passante per A nè tangente alla retta a) corrisponde nello spazio una curva sghemba di ordine $n + \nu$, appartenente al complesso lineare \mathcal{A} e avente le due rette suindicate del piano $t = 0$ come corde risp. ν^{pla} e n^{pla} ; in particolare alle coniche ($n = \nu = 2$) le quartiche appartenenti al complesso e aventi tali rette come corde ordinarie. A un sistema omaloidico di curve piane di ordine n e classe ν (pure non avente A nè a come elementi basi) corrisponde una congruenza del 1° ordine di curve razionali di ordine $n + \nu$ appartenenti al complesso \mathcal{A} e vincolate, oltre ad avere le due corde multiple suaccennate, ad appoggiarsi in $n + \nu - 1$ punti a curve fisse (direttrici), non necessariamente distinte, e appartenenti anch'esse al complesso \mathcal{A} . Alcune proprietà di queste congruenze sono state dimostrate da me nelle Note cit. del 1928; la presente Memoria riprende e prosegue lo studio dei sistemi omaloidici, facendo uso di altra rappresentazione. In particolare, il contenuto degli ultimi tre n° (n. 13—15) potrà forse dare origine a ricerche ulteriori

5. *Rappresentazione degli elementi di un piano sui punti di una M_3^6 di S_7 .* La varietà ∞^3 degli elementi lineari del piano si può rappresentare anche birazionalmente e senza eccezioni su una M_3^6 dello spazio S_7 , come indicato recentemente da F. SEVERI¹¹), la quale ne costituisce il modello minimo normale. Questa M_3^6 è la sezione iperpiana generica della M_4^6 di S_8 di C. SEGRE¹²), rappresentante la varietà ∞^4 delle coppie di punti di due piani.

¹¹) I fondamenti della geometria numerativa, Annali di Matem. (4), vol. 19 (1940), p. 153; in part. n. 61. Questa rappresentazione era già stata accennata da H. Beck, l. c., senza approfondirla.

¹²) Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani e spazi, Rend. Circolo Matem. di Palermo, vol. 5 (1891), p. 192; cfr. anche: Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, Mathem. Ann. vol. 40 (1892), p. 413. Questa M_4^6 è, in due modi diversi, la varietà luogo degli ∞^2 piani congiungenti le terne di punti omologhi di tre piani omografici in posizione generale in S_8 .

Consideriamo più particolarmente un unico piano proiettivo π come sistema di tutti gli elementi costituiti dall'insieme di un suo punto (x) e di una sua retta (u), propri o impropri, pel momento anche non appartenentisi; e rappresentiamo questa ∞^4 di elementi sulla varietà M_4^6 luogo dei punti di coordinate omogenee $X_{ik} = x_i u_k$ ($i, k = 1, 2, 3$) in uno spazio S_8 . Gli elementi lineari del piano sono dati dalle coppie costituite da un punto e da una retta che si appartengono; che soddisfanno cioè all'equazione:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0;$$

e ad essi corrispondono biunivocamente senza eccezioni i punti della varietà intersezione della detta M_4^6 coll'iperpiano (affatto generico):

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = 0$$

la quale è appunto una M_3^6 di S_7 ¹³). Indicheremo d'ora in avanti questa M_3^6 semplicemente con M . Essa contiene due sistemi ∞^2 (congruenze) del 1° ordine di rette, prive di punti e linee singolari, rappresentanti rispettivamente gli elementi del piano π che appartengono ai singoli punti e alle singole rette, in guisa che risultano incidenti soltanto due rette di M di sistemi diversi immagini risp. di un punto e di una retta di π che si appartengono. Le rette di ciascun sistema appoggiate a una stessa retta dell'altro formano una rigata cubica R^3 di S_4 . Due R^3 dello stesso sistema hanno a comune una (sola) generatrice. Due R^3 di sistemi opposti s'incontrano secondo una conica, loro comune direttrice, e costituiscono insieme l'intersezione di M con un iperpiano tangente ad essa lungo questa intera conica. La M contiene ∞^4 coniche, tali che per due suoi punti ne passa sempre una ed una sola¹⁴); ∞^3 fra esse si spezzano nelle coppie di rette incidenti dei due opposti sistemi.

Chiameremo *piano principale* di un punto di M il piano delle due rette della varietà passanti per questo punto. Elementi del piano π in posizione unita con un elemento dato hanno per immagini punti di M infinitamente vicini a un punto fisso, in direzioni contenute in un piano, il quale dovendo passare per le due rette uscenti da questo punto è il relativo piano principale. Pertanto: *Curve luogo-inviluppo, e più generalmente*

¹³) Questa M_3^6 a curve-sezioni ellittiche fu considerata dapprima da *F. Enriques* (Mathem. Ann., vol. 46 [1895], p. 179; in part. n. 17), e studiata più ampiamente da *G. Scorza*, Le varietà a curve-sezioni ellittiche, Annali di Matem. (3), vol. 15 (1908), p. 217; in part. n. 24—39.

¹⁴) Ogni iperpiano bitangente a M è tangente ad essa lungo l'intera conica passante pei due punti di contatto. Anzichè ∞^5 diversi iperpiani bitangenti, ve ne sono ∞^4 tangenti ciascuno lungo un'intera conica.

unioni del piano π hanno per immagini su M linee tangenti in ogni loro punto al piano principale (e viceversa)¹⁵). Le chiameremo brevemente *linee principali*. Ogni linea contenuta in M ammette in ogni suo punto una conica tangente; le linee principali godono della proprietà caratteristica, che le coniche ad esse tangenti nei singoli punti si spezzano nelle coppie di rette uscenti da questi punti¹⁶). E alle trasformazioni di contatto, eventualmente birazionali, del piano π corrispondono su M trasformazioni puntuali che mutano elementi piani principali e curve principali in elementi e curve consimili. Le trasformazioni birazionali di M di questo tipo le chiameremo *trasformazioni principali*.

I piani principali corrispondenti ai punti di una retta di M hanno per luogo l' S_1 -cono quadrico di S_4 , che da questa retta proietta la rigata R^3 di cui tale retta è direttrice. Gli spazi S_3 tangenti a M negli stessi punti formano un S_1 -cono quadrico di S_5 contenente il cono precedente, e il cui sistema ulteriore di spazi S_3 è costituito dagli spazi che congiungono la retta di M considerata alle singole rette sue infinitamente vicine.

Una curva algebrica del piano π di ordine n e classe ν ha per immagine su M una curva principale di ordine $n + \nu$ incontrante le rigate R^3 dei due sistemi risp. in n e in ν punti, e contenuta in rigate di questi sistemi di ordini $3n$ e 3ν , tangenti fra loro (se $n, \nu > 1$) e ai piani principali lungo la detta linea. Ai punti multipli e cuspidi, alle tangenti multiple e di flesso della linea piana corrispondono rette dei due sistemi aventi analoghe singolarità rispett. per queste due rigate, e in pari tempo corde, eventualmente multiple, e tangenti della linea principale considerata su M . Viceversa ogni rigata R^{3n} è tangente ai piani principali nei punti di una sua direttrice $C^{n+\nu}$ che è l'unica sua direttrice principale, e i punti della quale sono determinati sulle singole generatrici dalle direttrici rettilinee delle R^3 involuppati la R^{3n} , cioè congiungenti le sue coppie di generatrici consecutive. Le curve razionali di ordine n e classe ν del piano π sono $\infty^{n+\nu+1}$, e a queste corrispondono su M curve principali pure razionali. In particolare alle ∞^5 coniche corrispondono quartiche razionali normali principali, incontranti le R^3 di ambo i sistemi in due punti, e contenute in due rigate R^6 tangenti lungo di esse e non aventi

¹⁵) Questo piano, a differenza di quanto avviene nella rappresentazione di *Lie* degli elementi di π su uno spazio S_3 (n. 4), non è però generalmente osculatore alle dette linee (cfr. anche n. 6).

¹⁶) Le coniche generiche di M_3^6 sono immagini di ∞^1 elementi di π , i cui punti e rette appartengono risp. a una punteggiata e a un fascio in posizione prospettiva, e che non costituiscono perciò unioni. Due elementi consecutivi di questo sistema ∞^1 sono in posizione unita soltanto quando la prospettiva degenera, cioè quando i sostegni delle due forme si appartengono: allora appunto la conica di M_3^6 si spezza in due rette.

ulteriore intersezione¹⁷⁾. Quando la “conica completa,, , cioè luogo-inviluppo, è degenerare di 1^a specie, si spezza cioè come luogo in una coppia di rette distinte e come involuppo si riduce al loro fascio contato due volte, di 2^a specie (figura duale nel piano), o di 3^a specie (retta doppia, e fascio anche doppio col centro su questa retta)¹⁸⁾, la quartica si spezza nei primi due casi in due rette dell’uno o dell’altro sistema, più la retta del sistema opposto loro secante comune contata due volte; e nell’ultimo caso in due rette dei due sistemi fra loro incidenti e entrambe doppie.

Il gruppo delle ∞^8 omografie e reciprocità del piano π si rispecchia in un gruppo di omografie su M , il quale tuttavia non opera transitivamente sul sistema degli ∞^7 iperpiani. La M contiene infatti ∞^6 esagoni semplici sghembi, ottenuti ad es. prendendo 3 rette generiche di uno dei due sistemi e le loro secanti comuni a coppie nell’altro sistema; esagoni appartenenti a spazi S_5 , e ciascuno dei quali è mutato in sè da un gruppo continuo permutabile ∞^2 di omografie. Per questo gruppo ∞^2 sono uniti gli iperpiani passanti per il detto S_5 e tangenti a M nei singoli vertici di quell’esagono¹⁹⁾; quindi anche tutti gli iperpiani del loro fascio; sicchè un iperpiano generico non può essere mutato dal gruppo proiettivo totale ∞^8 che in ∞^6 altri (al più; e così è precisamente). D’altra parte una sezione iperpiana generica di M è una superficie F^6 di S_6 di DEL PEZZO²⁰⁾, che contiene un fascio invariante di curve principali, generalmente trascendenti, e, se algebriche, razionali (ammettendo esse un gruppo ∞^1 di proiettività). Due di queste F^6 non sono perciò omografiche

¹⁷⁾ La M contiene, più generalmente, ∞^{2k} curve razionali di ordine k , che si distribuiscono in più sistemi continui, eventualmente di diversa dimensione e che non sono in generale curve principali, nè quindi immagini di curve del piano π , bensì di altre ∞^1 di elementi (non unioni). Per $k = 3$ si hanno due sistemi ∞^6 di cubiche, sezioni iperpiane delle R^3 dei due sistemi, e contenute in rigato R^6 dell’altro sistema. Queste cubiche non sono in generale curve principali. Per $k = 4$ su ciascuna delle ∞^5 R^6 dei due sistemi vi sono ∞^3 quartiche direttrici, bisecanti le R^3 di ambo i sistemi; su ciascuna delle ∞^2 R^3 vi sono ∞^6 quartiche pure direttrici, incontranti le R^3 dello stesso e dell’altro sistema rispett. in 1 e in 3 punti; e ancora sulle stesse R^3 ∞^5 quartiche razionali (in tutto perciò ∞^7) bisecanti le generatrici, e incontranti perciò le altre R^3 di ambo i sistemi di nuovo in 2 punti. Le quartiche principali γ^4 (nota 22) appartengono al primo di questi tre sistemi.

¹⁸⁾ Severi, l. c. degli Ann. di Matem. (4), vol. 19; n. 46. Il sistema ∞^3 delle coniche di 3^a specie è perciò riferibile biunivocamente senza eccezioni al sistema degli elementi del piano π , e quindi dei punti di M .

¹⁹⁾ Qualsiasi iperpiano tangente a M in un punto P contiene le tangenti in P a tutte le ∞^2 coniche della varietà passanti per questo punto; e sega perciò M in una superficie luogo di ∞^1 fra queste coniche. Per gli iperpiani tangenti particolari qui considerati la superficie intersezione con M si compone di due R^3 , luoghi delle coniche passanti per P e appoggiate rispett. ai due lati dell’esagono opposti a quelli che comprendono P .

²⁰⁾ Rend. Circolo Matem. di Palermo, vol. 1 (1884—87), p. 241. Queste F^6 ammettono appunto un gruppo ∞^2 permutabile di omografie.

che quando sono tali queste curve; in particolare, se si tratta di curve razionali, se queste sono dello stesso ordine.

6. Nel piano π vi sono ∞^6 fasci-schiere di coniche bitangenti, ciascuno dei quali è luogo complessivamente di una ∞^2 di elementi, avente a comune con ogni punto e ogni retta generica un elemento. Queste ∞^2 di elementi hanno per immagini su M altrettante (particolari) sezioni iperpiane, che indicheremo con φ^6 (distinguendole così dalle sezioni iperpiane generiche F^6)²¹). Ciascuna φ^6 contiene, come immagini delle coniche del fascio-schiera anzidetto, un fascio di quartiche principali γ^4 ²²) con 2 punti basi, in generale distinti; e contiene altresì, come ogni F^6 , un esagono semplice formato da rette di M . Due di quelle γ^4 si spezzano in rette nel modo indicato al n. prec. per coniche degeneri di 1^a e 2^a specie, le due rette doppie essendo lati opposti di quest'esagono, e i punti basi del fascio i due vertici opposti non contigui a questi lati. Le γ^4 sono complessivamente ∞^5 ; per ogni punto di M ne passano ∞^3 , e per due punti assegnati ∞^1 , luogo delle quali è una φ^6 . Ogni sezione iperpiana passante per una γ^4 è una φ^6 , e contiene un fascio di γ^4 . Rispetto alle sezioni iperpiane della φ^6 , le γ^4 hanno per residuo un fascio di coniche, incidenti a due lati opposti dell'esagono suddetto. E per ogni esagono di M passano tre φ^6 , contenenti fasci di γ^4 coi punti basi risp. nelle tre coppie di vertici opposti dell'esagono.

Nella rappresentazione di S. LIE degli elementi lineari del piano π sui punti di uno spazio S_3 (n. 4), alle parabole di π aventi un certo punto all'infinito — che dal punto di vista proiettivo sono coniche contenenti un elemento punto-retta assegnato — corrispondono rette di un complesso lineare generale; perciò agli ∞^3 fasci-schiere che possono formarsi con quelle parabole corrispondono i fasci di rette di questo complesso lineare, contenuti nei singoli piani. D'altra parte, nella rappresentazione della stessa varietà di elementi del piano π su M , a questi ∞^3 fasci-schiere corrispondono le superficie φ^6 luoghi delle γ^4 passanti per un punto fisso P e per un secondo punto variabile. Se ne trae che queste φ^6 , vale a dire le ∞^3 superficie φ^6 luoghi dei fasci di γ^4 aventi un punto base P fisso e

²¹) Un fascio e una schiera di coniche in π del tipo più generale sono anche luoghi complessivamente di ∞^2 elementi, dei quali però due appartengono a una retta e risp. a un punto generico. Le superficie corrispondenti su M sono pertanto F^6 unisecanti le rette di uno dei due sistemi, e bisecanti quelle dell'altro.

²²) Parlando delle linee γ^4 sottintenderemo d'ora in poi per esse la qualifica di „principali“, e designeremo eventualmente come „quartiche“ (o C^4) le altre curve di 4^o ordine (non principali) contenute in M . Una F^6 generica contiene tre sistemi lineari ∞^3 di quartiche, e sulle sole φ^6 un fascio di queste sono γ^4 .

un altro punto base variabile formano su M un sistema lineare omaloidico²³). In particolare gli iperpiani contenenti tali φ^6 passeranno per un stesso spazio $S_3 \equiv \sigma$ contenente il piano principale del punto P , e che quanto prima potremo meglio precisare.

Tra gli ∞^6 fasci-schiere di coniche bitangenti del piano π ve ne sono ∞^5 composti di coniche aventi con una conica data e in un punto assegnato di questa contatto 4-punto, perciò 3 elementi consecutivi comuni. A questi corrispondono su M superficie φ^6 particolari, luoghi di γ^4 fra loro tangenti in un punto P , e aventi anzi in P uno stesso piano osculatore. Su queste φ^6 , poichè due vertici opposti dell'esagono già più volte considerato si sono avvicinati indefinitamente e in una direzione principale, i 6 lati dell'esagono sono venuti a coincidere a tre a tre colle due rette di M uscenti da P . Sono φ^6 , evidentemente, con punto doppio in P ²⁴); e in corrispondenza a ogni punto P di M se ne hanno ∞^2 , contenute negli iperpiani passanti per lo spazio σ di cui sopra e per lo spazio S_3 tangente a M in P : quindi per lo spazio $S_4 \equiv \Sigma$ che li congiunge, e che è quello determinato dalle due rette a, b uscenti da P su M e dalle due a_0, b_0 infinitamente vicine a queste e incidenti all'altra delle due.

Possiamo ora precisare quale sia lo spazio σ già considerato. Ogni γ^4 passante per P è immagine di una conica del piano π ; e alla polarità rispetto a questa conica corrisponde su M un'omografia involutoria, per la quale sono uniti tutti i punti di quella γ^4 ²⁵), quindi anche P , il piano ab , lo spazio S_3 tangente in P a M , e lo spazio Σ ; ma sono scambiate le due rette a, b , e pure scambiati i due spazi $S_3 \equiv aba_0, abb_0$. È dunque unito il fascio di spazi S_3 avente per asse il piano ab e contenuto in Σ ; e in questo fascio viene subordinata un'involuzione, nella quale sono coniugati i due spazi aba_0, abb_0 , ed è unito lo spazio S_3 tangente a M in P . Lo spazio σ , evidentemente anch'esso unito, è dunque l'altro elemento unito di questa involuzione; vale a dire *lo spazio coniugato armonico dell' S_3 tangente in P rispetto ai due spazi aba_0, abb_0 .*

²³) In questo sistema omaloidico sono compresi due sistemi ∞^2 di φ^6 riducibili, spezzati in una rigata cubica arbitraria di uno dei due sistemi e nella rigata cubica dell'altro sistema la cui direttrice rettilinea passa per P . Queste particolari φ^6 sono luoghi delle γ^4 anche riducibili passanti per P , composte della retta (fissa) dell'uno o dell'altro sistema passante per P , di una retta arbitraria di questo stesso sistema, e della loro secante comune, appartenente al sistema opposto, contata due volte.

²⁴) Più particolarmente, esse si rappresentano sul piano in modo che alle loro sezioni corrispondano le cubiche piane passanti per tre punti tutti infinitamente vicini e non allineati.

²⁵) Sono perciò uniti per la detta omografia involutoria di S_7 tutti i punti dello spazio S_4 di questa γ^4 , e inoltre i punti di un piano, contenente la conica direttrice minima della M_3^8 luogo dei piani principali uscenti dai punti della γ^4 .

7. *Proiezioni della varietà M_3^6 .* Proiettiamo la varietà M dal piano principale uscente dal punto P su uno spazio S_4 .

La proiezione è un cono quadrico Γ , il cui vertice V è traccia dello spazio S_3 tangente a M in P , e le cui generatrici sono proiezioni delle ∞^2 coniche di M passanti per P . Lo spazio Σ ha per traccia una particolare g di queste generatrici. Le rigate R^3 aventi per direttrici le rette a, b passanti per P si proiettano in due rette a', b' di Γ , entrambe incidenti a g , ma sghembe fra loro; le $\infty^1 R^3$ aventi a o b come generatrice, nei piani dei due sistemi del cono Γ ; le rette generiche di M del sistema di a o b , nelle rette di questi piani incidenti a b' o a' ; le R^3 generiche dei due sistemi, nelle quadriche sezioni del cono Γ cogli iperpiani passanti risp. per queste due rette; le coniche generiche intersezioni di questi due sistemi di R^3 , nelle coniche di Γ appoggiate a a' e b' . Lo spazio σ ha per traccia il punto S di g coniugato armonico del vertice V rispetto alle intersezioni ga', gb' . Le ∞^3 superficie φ^6 contenute negli iperpiani passanti per σ si proiettano nelle quadriche sezioni di Γ cogli spazi S_3 passanti per S ; e le γ^4 passanti per P in coniche passanti per S . Poichè queste γ^4 sono tutte tangenti in P al piano ab , sta bene ch'esse si proiettino in coniche; e il fatto che queste coniche passano tutte per S indica che i piani osculatori in P alle dette γ^4 sono tutti contenuti nello spazio σ . Questi stessi piani sono anzi, complessivamente, i piani osculatori in P a tutte le curve principali di M passanti per P , poichè ciascuna di queste curve è a sua volta osculatrice in P a $\infty^1 \gamma^4$: infatti ogni curva piana ammette in un suo punto ∞^1 coniche con contatto 4-punto, cioè aventi a comune con essa tre elementi consecutivi.

Le curve principali di M passanti per uno stesso punto P hanno i piani osculatori in P tutti contenuti in un medesimo spazio S_3 : lo spazio σ sopra menzionato.

Inoltre, nella proiezione stereografica del cono Γ dal punto S , che equivale alla proiezione di M dallo spazio σ , le curve γ^4 di M si proiettano in rette, tali che quelle passanti per uno stesso punto stanno sempre in un piano, cioè ovviamente rette di un complesso lineare generale. Perciò: *Le due rappresentazioni della varietà ∞^3 degli elementi lineari del piano su uno spazio S_3 (LIE; qui n. 4) e su M sono legate da una relazione molto semplice: la prima si può ottenere come proiezione della seconda da un conveniente spazio S_3 ; lo spazio σ dianzi indicato²⁶.* In questa proie-

²⁶) Poichè ogni curva piana ammette in un suo punto una conica con contatto 5-punto, cioè avente a comune con essa 4 elementi consecutivi, così per ogni curva principale di M passante per P lo spazio S_3 ivi osculatore ad essa sarà pure tale per una γ^4 . Sul cono Γ , proiezione di M del piano ab , le immagini delle γ^4 passanti per P sono coniche passanti

zione alle curve γ^4 passanti per P corrispondono in S_3 le rette di un complesso lineare generale.

Nella proiezione del cono Γ dal punto S le rette a' , b' si proiettano in rette incidenti a_1 , b_1 , che sono le $x = t = 0$, $y = t = 0$ del n. 4; i due sistemi di piani del cono Γ , nei fasci di piani di assi a_1 , b_1 ; i due sistemi di rette di M , in due congruenze lineari speciali di direttrici a_1 , b_1 . Le sezioni iperpiane generiche F^6 di M si proiettano in superficie del 4° ordine con a_1 , b_1 doppie, e — dovendo esse incontrare le rette di quelle due congruenze in un solo punto variabile — con un piano tangente fisso in ogni singolo punto di a_1 , b_1 . Questa rappresentazione di M sullo spazio S_3 per proiezione da σ è quella stessa ottenuta di G. SCORZA (Mem. cit. in ¹³), n. 30 e seg.) per altra via, cioè (sostanzialmente) facendo corrispondere a ogni punto di M l'intersezione unica del relativo S_3 tangente con uno arbitrario, fisso, di questi S_3 .

8. *Congruenze Ω .* — A un sistema omaloidico di linee di ordine n e classe ν del piano π corrisponde in M una congruenza del 1° ordine di linee principali di ordine $n + \nu$. Se $n + \nu > 1$, vale a dire se la congruenza non si compone di rette, essa avrà una o più direttrici pur esse linee principali, immagini delle linee (anzi delle unioni) a cui tutte le linee del sistema omaloidico sono tangenti (n. 3), e alle quali direttrici le linee della congruenza si appoggeranno complessivamente in $n + \nu - 1$ punti (focchi). Queste congruenze si indicheranno d'ora in poi colla lettera Ω , e con ω una loro linea generica. Le due congruenze di rette ($n = 0$, $\nu = 1$; o viceversa) sono le sole Ω senza direttrici. P. es. una rete omaloidica di C^n del piano π , che per semplicità supponiamo con punti basi tutti distinti, perciò con soli punti multipli ordinari, curve quindi di classe $\nu = 2(n - 1)$, ha per immagine una congruenza di curve principali ω^{3n-2} appoggiate a certe rette del primo sistema complessivamente

per S ; gli S_3 osculatori in P a quelle γ^4 sono congiunti al piano ab da spazi S_4 che danno come traccie le tangenti di queste coniche in S . Nella proiezione stereografica del cono Γ da S su uno spazio S_3 queste tangenti danno punti di un piano, che si riconosce facilmente essere traccia dell' S_6 che incontra M nelle due rigate cubiche di direttrici a , b . Quindi: Gli spazi S_3 osculatori in un punto di M alle curve principali passanti per questo punto sono tutti contenuti nello spazio S_6 delle due rigate cubiche le cui direttrici rettilinee passano anche per questo punto. In altri termini, lo spazio σ e questo S_6 hanno contatto rispett. 3-punto e 4-punto con tutte le curve principali passanti per P . — Nel fascio degli spazi S_5 di asse Σ e contenuti nel detto S_6 , due S_5 contengono rispett. le rigate cubiche di direttrici a , b ; ciascuno degli altri ha contatto 4-punto con una γ^4 passante per P , e con tutte le curve principali aventi contatto 4-punto con questa.

in $3(n-1)$ punti²⁷⁾; per $n=2$, una congruenza di quartiche γ^4 appoggiate semplicemente a tre rette. Se il sistema omaloidico ha un elemento base, punto e relativa tangente, le curve della congruenza Ω passeranno tutte per un punto fisso; e ciò equivale per esse all'appoggiarsi a due rette infinitamente vicine, dell'uno o dell'altro sistema indifferentemente.

Ogni trasformazione principale su M muta congruenze Ω in congruenze Ω ; in particolare ciascuno dei due sistemi di rette anche in una congruenza Ω .

Le direttrici di una congruenza Ω sono tutte curve razionali. Anzitutto è certamente razionale ogni direttrice a cui le ω si appoggino in un solo punto. Invero le $\infty^1 \omega$ passanti per uno stesso punto generico di questa direttrice sono tangenti in questo punto al relativo piano principale, al quale è pure tangente la direttrice; e quella ω , certo razionale, che è ivi tangente a questa direttrice dovrà contenerla come parte, o eventualmente coincidere con essa. Se poi vi fosse una direttrice δ non razionale a cui le ω si appoggiassero in due o più punti, facendo variare δ con continuità su M ²⁸⁾, la linea corrispondente a δ nel piano π potrebbe acquistare un punto doppio o una tangente doppia in più, pur senza spezzarsi. Allora δ si spezzerebbe in una linea di ordine inferiore di due unità e una retta corda di questa, da contarsi due volte; e la congruenza Ω si spezzerebbe in almeno due congruenze di linee appoggiate alla nuova δ e a questa retta complessivamente nello stesso numero di punti, ma diversamente ripartiti; il che per una congruenza del 1° ordine non è possibile²⁹⁾.

²⁷⁾ Supposto che la rete omaloidica abbia α_i punti basi di molteplicità i , ciò è appunto conforme alla nota relazione Cremoniana $\sum i\alpha_i = 3(n-1)$ (Cremona, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, II; Mem. Accad. Bologna [2], vol. 5 [1865], p. 3; Op. Mat., vol. II [Milano 1915], p. 173; n. 6).

²⁸⁾ Cioè come curva totale di uno stesso sistema continuo di curve, soddisfacenti a condizioni analoghe a quelle cui era assoggettata δ .

²⁹⁾ Quando una curva ξ del piano π acquista un punto doppio (eventualmente un punto doppio in più) senza spezzarsi, ogni sistema di linee tangenti alla prima in $k \geq 1$ punti variabili si scinde in due sistemi di egual dimensione; uno di linee pure tangenti a ξ in k punti, l'altro di linee passanti pel punto doppio e tangenti a ξ in $k-1$ punti. Così avviene ad es. per l'inviluppo delle rette tangenti a ξ . Ma se ξ è razionale, e non può quindi acquistare un punto doppio senza spezzarsi, la conclusione indicata nel testo non può applicarsi, almeno senza un previo esame delle componenti in cui ξ o la curva corrispondente di M si spezzano e delle condizioni a cui queste componenti risultano vincolate. P. es. nella congruenza di quartiche γ^4 passanti per un punto fisso P e appoggiate in un ulteriore punto variabile a una fissa γ_0 di queste stesse quartiche (n. 9 e seg.), γ_0 può spezzarsi soltanto in una retta a passante per P , un'altra retta a' dello stesso sistema, e nella loro secante comune b contata due volte. E le γ^4 passanti per P non possono incontrare ulteriormente nè la retta a , nè la rigata cubica luogo delle rette b , cioè di direttrice α , alla quale rigata esse sono tangenti in P ; sicchè la direttrice γ_0 si riduce alla sola retta a' , e la congruenza non si spezza.

9. *Congruenze Ω coniugate.* — Le due congruenze di rette esistenti su M godono della proprietà che le rette di ciascuna di esse appoggiate a una medesima retta dell'altra formano una rete di R^3 intersecantisi a coppie nelle singole rette della prima congruenza. Una qualsiasi trasformazione principale su M muta pertanto i due sistemi di rette in congruenze Ω tali che le linee di ciascuna delle due appoggiate a una stessa linea dell'altra godono di analoghe proprietà; hanno cioè come luoghi superficie razionali di un sistema lineare ∞^2 , appartenenti alla congruenza e aventi come intersezioni variabili le singole linee della stessa congruenza, una per ciascuna coppia di superficie. Chiameremo *rete omaloidica* di una congruenza Ω ogni sistema ∞^2 di superficie appartenenti alla congruenza e che sia rete omaloidica (entro la congruenza come ente razionale ∞^2). E *congruenze Ω coniugate* saranno due congruenze Ω tali che le linee di ciascuna delle due appoggiate a una stessa linea dell'altra abbiano per luoghi le superficie di una rete omaloidica. La relazione ha carattere invariante rispetto alle trasformazioni principali di M , e carattere reciproco rispetto alle due congruenze. Basta che essa si verifichi per una delle due rispetto all'altra perchè sussista anche in senso inverso. Essa equivale alla doppia proprietà, che in ciascuna delle due congruenze vi sia una sola linea variabile incidente a due linee generiche dell'altra³⁰).

Abbiamo detto al n. 2 che una trasformazione di contatto birazionale tra due piani si può individuare dando due sistemi omaloidici corrispondenti e la corrispondenza birazionale subordinata fra essi come enti ∞^2 ; poichè in entrambi i sistemi ogni curva ha con ciascuna delle sue infinitamente vicine una sola coppia variabile di elementi in posizione unita, ne risulta così definita anche la corrispondenza subordinata fra curve omologhe dei due sistemi. Similmente una corrispondenza principale su M può definirsi assegnando ad arbitrio due congruenze Ω, Ω' corrispondenti e la corrispondenza birazionale subordinata fra queste. Se ω, ω' sono due curve omologhe, al sistema ∞^1 delle curve ω_1 infinitamente vicine a ω corrisponde proiettivamente il sistema delle ω'_1 infinitamente vicine a ω' ; e poichè su ω vi è un solo punto non singolare (cioè non appartenente ad alcuna direttrice di Ω) nel quale il piano tangente alla striscia superficiale $\omega \omega_1$ è piano principale, e così per la striscia $\omega' \omega'_1$, ne risulta ben definita anche la corrispondenza puntuale subordinata fra le due linee ω e ω' . Ogni superficie appartenente alla congruenza Ω ha

³⁰) Invero, indicate con Ω e Ω' le due congruenze, se vi è una sola linea ω appoggiata a due ω' generiche e viceversa, le superficie luoghi delle ω appoggiate a una stessa ω' e viceversa formeranno entro le due congruenze sistemi ∞^2 di grado 1; cioè appunto reti omaloidiche. Il ragionamento è invertibile.

pertanto, in corrispondenza alle sue coppie di linee ω infinitamente vicine, un'unica *direttrice principale* (all'infuori delle direttrici della congruenza), luogo dei punti non singolari in cui tale superficie è tangente ai piani principali. E sulle superficie di una rete omaloidica appartenente a Ω queste direttrici costituiscono la corrispondente congruenza coniugata a Ω ³¹). In particolare ogni rigata contenuta in M ha una sola direttrice principale (unica in via assoluta, le due congruenze di rette essendo prive di direttrici)³²).

Una corrispondenza principale su M si può anche definire dando due coppie di congruenze Ω coniugate che debbono corrispondersi, più, per una di queste coppie di Ω omologhe, la proiettività fra le due reti omaloidiche di superficie che vi si considerano. In particolare si può imporre che le due congruenze di rette A, B di M si mutino rispettz. in due congruenze coniugate Ω, Ω' comunque assegnate. In tale caso ogni superficie fondamentale della prima M , cioè della M considerata come varietà contenente le due congruenze di rette A, B :

o incontrerà tutte le rette a, b di entrambe le congruenze; e allora le corrisponderà una linea direttrice comune di Ω e Ω' o in particolare un punto singolare isolato, comune a tutte le curve di entrambe le congruenze;

oppure incontrerà soltanto le a , e non le b generiche, o viceversa; in tal caso sarà una rigata di generatrici b , o rispettz. di a , e ad essa corrisponderà una curva ω' di Ω' in pari tempo direttrice di Ω , le generatrici b corrispondendo ai singoli punti di ω' , o analogamente scambiate le due

³¹) Prendendo invece entro Ω un sistema omaloidico ∞^2 di superficie (anzichè una rete omaloidica), vale a dire un sistema ∞^2 di superficie appartenenti alla congruenza, nel quale una superficie sia individuata soltanto da due ω infinitamente vicine, e abbia a comune colle sue infinitamente vicine una sola ω variabile, le direttrici principali di queste ∞^2 superficie, all'infuori delle direttrici della congruenza Ω , formeranno una nuova congruenza Ω_0 , in generale non coniugata a Ω . Viceversa, date in M due congruenze Ω qualunque, le linee di ciascuna delle due che si appoggiano a una stessa linea dell'altra hanno per luoghi le ∞^2 superficie di un sistema omaloidico della prima congruenza.

³²) Considerata come Ω una delle due congruenze di rette su M , ogni congruenza Ω' coniugata a questa si compone delle direttrici principali sulle rigate di una rete omaloidica entro Ω ; e entro Ω' formeranno pure una rete omaloidica le superficie luoghi delle ω' appoggiate a una stessa retta generica di Ω . Se le ω' sono quartiche γ^4 appoggiate a tre rette fisse a_1, a_2, a_3 di Ω , le superficie della rete omaloidica così definita entro Ω' sono luoghi delle γ^4 appoggiate a queste tre rette e a una quarta generica pure di Ω . Sono superficie F^9 (di ordine 9; cfr. la nota ²¹), a sezioni di genere 3, rappresentate dal sistema delle quartiche piane passanti per 7 punti, vertici e punti diagonali di un quadrangolo; e contengono 13 rette, corrispondenti ai punti basi e ai lati del detto quadrangolo. Se la quarta retta della congruenza Ω è infinitamente vicina a una delle prime, p. es. a a_1 , la F^9 è luogo delle γ^4 passanti per un punto fisso di a_1 e appoggiate a a_2, a_3 ; ha la a_1 come retta doppia, e le sezioni di genere 2.

congruenze³³). Invece una superficie fondamentale della seconda M (quella delle congruenze Ω e Ω') non può incontrare in pari tempo le ω e le ω' in suoi punti generici, perchè le congruenze di rette A e B non hanno direttrici; perciò può soltanto essere luogo di ∞^1 linee ω o ω' , oppure di linee o loro componenti comuni alle due congruenze, qualcuna di queste linee essendo altresì direttrice di Ω o Ω' . Pertanto ogni linea fondamentale è direttrice di qualche congruenza Ω ; quindi razionale, e linea principale. D'altra parte ogni superficie di M , senza eccezioni, contiene un fascio di linee principali, generalmente trascendenti, ma tali che per un punto generico della superficie ne passa una e una sola³⁴); più un sistema discreto di linee anche principali, direttrici o plurisecanti di quel fascio, lungo le quali la superficie è tangente ai piani principali.

In una trasformazione principale su M , in generale³⁵):

a un punto fondamentale isolato corrisponde una superficie fondamentale; e ai singoli elementi principali uscenti da quel punto, le linee principali del fascio esistente su questa superficie; linee in questo caso algebriche e razionali;

a una linea fondamentale f (isolata), quindi principale, corrisponde anche una superficie F ; ai singoli punti di quella linea e agli elementi principali uscenti da ciascuno di questi punti corrispondono le linee principali del fascio contenute in F , e gli ∞^1 punti di queste diverse

³³) Si sarebbe pertanto portati a concludere che questi tre casi si escludono mutuamente; che perciò una direttrice comune delle due congruenze Ω e Ω' non può essere in pari tempo linea totale o parziale di alcuna di esse; e una linea di una delle due congruenze o sua componente può essere altresì direttrice di una di esse, ma non direttrice dell'altra. Ciò va inteso tuttavia opportunamente. Mi riferisco per semplicità a un esempio nello spazio S_3 , ma che può trasportarsi facilmente sulla M di S_7 . Entro una congruenza lineare speciale Ω di rette in S_3 di direttrice rettilinea d consideriamo la rete omaloidica delle rigate cubiche di Cayley passanti per tre rette fisse. Su ciascuna di queste rigate le ∞^1 asintotiche del secondo sistema sono cubiche sghembe tangenti a d nel punto unipolare della rigata (punto che varia su d al variare di questa rigata), e appartenenti rispett. agli ∞^1 complessi lineari contenenti Ω . Le asintotiche appartenenti a uno stesso (non speciale) fra questi complessi formano appunto una congruenza Ω' coniugata a Ω , tale che d è direttrice e in pari tempo linea o componente di linea di entrambe le congruenze. In realtà, mentre le rette di Ω appartengono ai singoli elementi di 1° ordine del complesso uscenti dai punti di d , le cubiche di Ω' , tutte tangenti a d , appartengono a altrettanti diversi elementi di 2° ordine uscenti dagli elementi di 1° ordine di d . E riferendo questo spazio S_3 a una M in modo che alle congruenze Ω, Ω' corrispondano su M le due congruenze di rette A, B , alla d , più esattamente ai due sistemi ∞^1 menzionati di elementi di 1° e 2° ordine, corrispondono due rigate cubiche di opposti sistemi.

³⁴) La tangente a questa linea in ogni suo punto è l'intersezione del piano principale col piano ivi tangente alla superficie considerata.

³⁵) Cioè salvo che occorra far intervenire elementi di ordine superiore al primo, come ad es. nella nota ³³).

linee; agli elementi della linea f , i punti di una direttrice principale, all'infuori delle linee fondamentali).

L'intersezione di due superficie fondamentali di una stessa trasformazione principale si compone di sole linee principali; perciò, su ciascuna delle due superficie ognuna di queste linee appartiene al fascio delle linee principali, oppure è direttrice o plurisecante di questo fascio.

A titolo di esempio ricordiamo che il sistema ∞^3 delle quartiche γ^4 di M passanti per un punto fisso può proiettarsi nelle rette di un complesso lineare generale di S_3 (n. 7); è quindi birazionalmente equivalente a questo complesso. Entro quest'ultimo, sono congruenze coniugate le congruenze lineari speciali formate dalle rette incidenti rispett. a due rette fisse del complesso medesimo, pure incidenti fra loro³⁶). Sono perciò congruenze coniugate Ω , Ω' su M quelle composte delle γ^4 passanti per un punto fisso P e appoggiate inoltre in un punto ulteriore, variabile, rispett. a due fisse α , β di queste stesse quartiche incontrantisi anche in un secondo punto Q . Con una trasformazione principale su M si potranno dunque mutare queste due congruenze Ω , Ω' nelle due congruenze di rette A , B . In questa trasformazione sono enti fondamentali, nella M delle congruenze Ω , Ω' , le linee α , β , loro rispettive direttrici e comuni altresì, come linee, alle due congruenze; e la superficie φ^6 , luogo delle ∞^1 γ^4 passanti per P e Q e costituenti un fascio che comprende α e β . Alle linee α , β corrispondono due rigate cubiche di opposti sistemi, con direttrici rettilinee incidenti a_0 , b_0 , appartenenti rispett. alle congruenze A , B , e le cui generatrici b e risp. a corrispondono risp. ai singoli punti di α , β ; superficie perciò incontrate dalle sole rette a o risp. dalle b . Queste due rigate cubiche s'incontrano nella coppia di rette a_0b_0 , ciascuna direttrice dell'una e generatrice dell'altra rigata. Il punto a_0b_0 corrisponde all'intera superficie fondamentale φ^6 suindicata; in particolare i singoli elementi principali uscenti da esso corrispondono alle γ^4 del fascio PQ ; mentre alle linee α , β di questo fascio corrispondono non i soli elementi principali rispett. su a_0 , b_0 , ma le intere rigate cubiche aventi queste rette per direttrici.

10. *Direttrici di due congruenze coniugate.* — Se Ω , Ω' sono due congruenze coniugate, una delle due può avere fra le sue direttrici linee appartenenti all'altra. Per es. se Ω è una delle due congruenze di rette, Ω' si compone delle direttrici principali sulle rigate di una rete omaloidica

³⁶) Entro ciascuna di queste due congruenze, le rette appoggiate a una stessa retta dell'altra congruenza formano una rete omaloidica di quadriche, tangenti fra loro lungo la retta direttrice della prima congruenza, e passanti semplicemente per la direttrice della seconda.

entro Ω ; la quale, se non è la rete delle R^3 , ha certo delle rette basi, che sono appunto direttrici di Ω' . E ogni trasformazione principale su M che non abbia nessuna di queste rette come linea fondamentale muta Ω e Ω' in congruenze che godono della stessa proprietà. È anche possibile, come appare dall'esempio alla fine del n. prec., che ciascuna delle due congruenze abbia una direttrice che sia linea dell'altra, e anzi linea comune alle due congruenze. *Di due congruenze coniugate Ω, Ω' non composte entrambe di rette, una almeno ha per direttrice qualche linea dell'altra, o una componente di questa*³⁷⁾. In base all'esempio addotto poc'anzi possiamo supporre che nessuna delle due congruenze sia costituita da rette. Consideriamo su M una corrispondenza principale risultante dal riferire birazionalmente le congruenze Ω, Ω' alle due congruenze di rette A, B (n. prec.). Le corrispondenze subordinate fra Ω e A , fra Ω' e B non potranno essere entrambe biunivoche senza eccezioni; perchè se no la corrispondenza risultante su M sarebbe anche tale, quindi proiettiva; e Ω, Ω' sarebbero le stesse A, B , eventualmente scambiate, contro l'ipotesi. Vi sarà dunque una almeno delle congruenze A, B , e sia A , la cui corrispondenza con Ω ammetterà qualche elemento fondamentale; e più precisamente vi sarà certo in A una retta fondamentale a_0 , alla quale (cioè ai cui singoli punti) corrispondono ∞^1 diverse linee ω , costituenti una superficie ξ ³⁸⁾. Alle rigate R^3 di A passanti per a_0 corrisponderanno superficie luoghi di ω composte della stessa ξ come parte fissa e di una superficie residua variabile. D'altra parte alle rette b di B corrispondono le linee ω' , generalmente irriducibili e non rette, che certo incontrano la superficie ξ ³⁹⁾. E poichè le b generiche non incontrano a_0 , le intersezioni delle ω' generiche con ξ non potranno cadere che su linee fondamentali contenute in ξ , e precisamente su una o più particolari delle ω contenute in ξ , o loro componenti. Queste ω o loro componenti corrisponderanno a

³⁷⁾ I due casi, che una direttrice ad es. di Ω' sia una linea totale ω o soltanto una componente di questa, non sono sostanzialmente diversi. Supposto che si tratti di una ω generica entro Ω , perciò irriducibile, facciamola variare entro Ω ; varierà con essa la Ω' , restando coniugata di Ω . Fra le ∞^2 linee ω , se queste non sono rette, ve ne saranno ∞^1 riducibili; e in corrispondenza a queste la effettiva direttrice di Ω' sarà soltanto una determinata componente della ω riducibile.

³⁸⁾ Per la congruenza A , riferibile a un piano senza eccezioni, cioè di ordine invariante relativo 1 (*Severi*, Conferenza di geometria algebrica; litogr., Roma 1927; p. 64), l'invariante relativo indicato con ω da *Castelnuovo-Enriques* ha il valore massimo 10. Perciò in ogni corrispondenza birazionale fra essa e un altro ente razionale, se vi sono elementi fondamentali, uno almeno ve n'è certo in A .

³⁹⁾ Sulla M la base minima delle linee è costituita dalle rette dei due sistemi (*Severi*, *Annali di Matem.* [4], vol. 19 [1940], p. 153; n. 59). Le ω' sono perciò del tipo $ka + k'b$, con k, k' entrambi ≥ 1 ; e incontrano tutte le superficie contenute in M .

superficie rigate di A passanti per α_0 ; saranno perciò elementi base della rete omaloidica $|R(\omega)|$ corrispondente alle rigate R^3 di A , e direttrici della congruenza Ω' .

È appunto ovvio che, se entro Ω una rete omaloidica $|R(\omega)|$ ha qualche ω base, queste (o loro componenti) sono direttrici della congruenza coniugata Ω' definita da $|R(\omega)|$.

Viceversa, se Ω, Ω' sono congruenze coniugate, direttrici ad es. di Ω' possono essere soltanto le direttrici di Ω e le eventuali linee ω basi della rete omaloidica $|R(\omega)|$ che definisce Ω' . Per un punto generico D di una direttrice δ di Ω' passano infatti ∞^1 linee ω' , e quindi anche le ∞^1 superficie della rete $|R(\omega)|$ aventi queste ω' per direttrici, tutte fra loro tangenti in quel punto. Se le ω passanti per D su queste singole $|R(\omega)|$ sono anche distinte, δ sarà pure direttrice di Ω . In caso contrario le ∞^1 $|R(\omega)|$ passanti per D avranno una ω comune; e anzi, poichè le ω' loro direttrici passano tutte per D , avranno a comune due ω infinitamente vicine. Ora ciò non può avvenire senza che la prima ω rimanga fissa al variare di D , e coincida perciò con δ o abbia questa come componente (variando invece con D la seconda, ad essa infinitamente vicina).

D'altra parte Ogni direttrice della congruenza Ω che non sia in pari tempo linea ω' della congruenza coniugata Ω' o sua componente è certo direttrice anche di Ω' . Invero, riferendo le congruenze Ω, Ω' alle due congruenze di rette A, B (n. 9), a una direttrice ε di Ω deve corrispondere una superficie incontrante tutte le rette a della congruenza A . Questa superficie o incontrerà anche tutte le rette b della B , e allora ε sarà direttrice anche di Ω' ; oppure sarà una rigata di retta b , corrispondenti ai singoli punti di ε , ossia a linee ω' infinitamente vicine a ε ; e allora ε sarà essa pure una ω' o componente di questa. In particolare, se le linee ω incontrano la direttrice ε in due o più punti, quest'ultima non potrà essere linea di una congruenza Ω' coniugata di Ω , e sarà perciò direttrice anche di Ω' . Se poi le curve della congruenza Ω passano tutte per un punto P , questo assorbe due direttrici infinitamente vicine di ogni superficie appartenente alla congruenza. E per P passeranno pure, di conseguenza, tutte le curve di ogni congruenza Ω' coniugata di Ω , salvo che quelle due direttrici siano curve di Ω' .

11. Indicate ancora con Ω, Ω' due congruenze coniugate, supponiamo che la prima abbia una direttrice ω'_0 che sia linea o parte di una linea della seconda. Le ω uscenti da ogni singolo punto di ω'_0 avranno per luoghi superficie razionali appartenenti a Ω , per le quali questi punti assorbiranno insieme colla ω'_0 una seconda direttrice variabile, infinita-

mente vicina alla ω'_0 . Tali superficie, che indicheremo con $R_0(\omega)$, sono perciò superficie totali o parziali della rete omaloidica $|R(\omega)|$ definita da Ω' .

a) Se due delle $R_0(\omega)$, luoghi delle ω uscenti da punti distinti di ω'_0 , hanno a comune una ω variabile, questa è certo unica, e l'unica ω passante per i due punti considerati di ω'_0 . La ω'_0 non appartiene perciò alla congruenza Ω come linea totale o parziale; e le ∞^2 linee ω segano su di essa i gruppi di una serie lineare anche ∞^2 (di ordine ≥ 2) ⁴⁰. Le $R_0(\omega)$ sono allora superficie totali della rete $|R(\omega)|$.

b) Se invece le $R_0(\omega)$ non hanno a comune a due a due alcuna ω variabile, formeranno un fascio, contenuto, totalmente o parzialmente, nella rete $|R(\omega)|$; le ω si appoggeranno alla direttrice ω'_0 in un solo punto variabile; e la ω base del fascio $|R_0(\omega)|$ sarà la stessa ω'_0 , o avrà questa come componente. In altri termini la ω'_0 , oltre che direttrice della congruenza Ω , sarà anche curva ω di questa, o componente di una ω ; perciò linea o parte di linea comune alle due congruenze⁴¹).

c) Supponiamo ora, viceversa, che Ω abbia come direttrice una propria curva o una componente ω_0 di questa. I sistemi ∞^1 di curve ω uscenti dai singoli punti di ω_0 avranno per luoghi superficie appartenenti alla congruenza Ω , e non aventi a comune a due a due altra ω che la ω_0 , o quella di cui questa è componente: se no per una stessa coppia di punti generici di ω_0 passerebbero due distinte ω (e non infinite). Le ω incontreranno perciò ω_0 in un solo punto variabile; e le superficie suindicate formeranno di nuovo un fascio $|R_0(\omega)|$. Su di esse il punto di ω_0 da cui escono le $\infty^1 \omega$ assorbe di nuovo due direttrici infinitamente vicine di ogni $R_0(\omega)$, una delle quali deve essere altresì curva totale o parziale di ogni congruenza Ω' coniugata di Ω e definita da una rete omaloidica, contenente, totalmente o parzialmente, il fascio $|R_0(\omega)|$; e questa non può essere che la stessa ω . Le due ipotesi b) e c) corrispondono pertanto allo stesso

⁴⁰ La ω'_0 è linea semplice per le $R(\omega)$, ma può essere multipla per le $R(\omega')$. Invece su una direttrice di Ω che sia pure tale per Ω' le ω segano gruppi che non costituiscono in generale una serie lineare. Questa direttrice, a differenza del caso presente, è allora linea multipla delle $R(\omega)$.

⁴¹ Riferendo in una corrispondenza principale le due congruenze Ω, Ω' alle congruenze A, B di rette a, b , ai singoli punti di ω'_0 corrisponderanno altrettante rette b , generatrici di una rigata $R(b)$; alle $\infty^1 \omega$ uscenti dai singoli punti di ω'_0 , rigate cubiche del sistema A , aventi queste b per direttrici, e formanti un fascio; e l'asse di questo fascio sarà una retta a , direttrice della rigata $R(b)$. Quest'ultima sarà dunque pur essa una rigata cubica; e ciò conferma che la ω'_0 , i cui elementi corrispondono ai punti della a , è pure linea o componente di linea di Ω .

caso: di una curva totale o parziale comune alle due congruenze coniugate Ω e Ω' , e direttrice di una di esse⁴²).

La rete omaloidica $|R(\omega)|$ che definisce la congruenza Ω' può contenere il fascio $|R_0(\omega)|$ totalmente o parzialmente. Il primo caso non dà luogo a ulteriori osservazioni. Nel secondo caso il fascio $|R_0(\omega)|$ sarà completato da una superficie residua Φ , passante anche essa generalmente per la ω'_0 , direttrice di Ω ; poichè le superficie generiche della rete $|R(\omega)|$ sono tangenti fra loro e ai piani principali lungo la ω'_0 , mentre ciò non avviene per le $R_0(\omega)$. Le $R(\omega)$ segheranno Φ in una linea fissa, base della rete $|R(\omega)|$; ma anche qui si possono presentare due casi diversi. La superficie Φ può essere pur essa luogo di $\infty^1 \omega$ (ed è il caso che primo si presenta alla mente); allora la sua intersezione fissa colle $R(\omega)$ è anche una ω , base della rete e direttrice, essa o una sua componente, della congruenza Ω' . Ad essa, del pari, le ω' potranno appoggiarsi in un solo punto variabile; e questa sarà altresì curva, o componente, della Ω' . Le congruenze Ω e Ω' avranno perciò a comune due distinte curve, totali o parziali, che saranno altresì risp. loro direttrici (ciascuna direttrice di una delle due)⁴³. Ma la superficie Φ può anche essere essa stessa, per così dire, una ω degenerata (come appare da un esempio⁴⁴); e non vi è allora nessuna ω direttrice di Ω' .

Escludiamo quest'ultima ipotesi e fermiamoci sul caso delle due curve comuni alle congruenze coniugate Ω e Ω' e ciascuna direttrice di una di queste: ω'_0 direttrice di Ω , ω_0 direttrice di Ω' . Consideriamo su M una trasformazione principale che muti Ω , Ω' nelle due congruenze A , B di rette a , b . Alle ω appoggiate a una stessa ω' generica corrispondono rette a appoggiate a una b , cioè di una rigata cubica R^3 ; e così, in particolare, alle ω uscenti da uno stesso punto di ω'_0 , caso limite del precedente quando la detta ω' si avvicina indefinitamente a ω'_0 . A questi ultimi sistemi ∞^1 di ω corrisponderanno rigate R^3 di un fascio, cioè passanti per una retta a_0 , che sarà la analoga di ω'_0 come linea ω . Analogamente scam-

⁴²) Questo caso si presenta ad es. quando, nell'ipotesi b), Ω' è una congruenza di rette, perciò Ω la congruenza delle direttrici principali di una rete omaloidica, e ω'_0 una retta base semplice di questa rete, o almeno incontrata dalle dette direttrici principali in un solo punto variabile.

⁴³) Cfr. l'esempio dato alla fine del n. 9; cioè le congruenze delle γ^4 passanti per un punto fisso, e incidenti in un secondo punto variabile risp. a due fisse di queste γ^4 , aventi a comune un secondo punto.

⁴⁴) Entro una delle due congruenze di rette di M applichiamo una trasformazione quadratica che muti le rigate cubiche in rigate R^6 aventi a comune tre generatrici a , a' , a_0 , delle quali le prime due infinitamente vicine; rigate perciò tangenti al piano principale e fra loro in un punto determinato P di a , e passanti per a_0 . Alle rette dell'altro sistema corrisponderanno le quartiche direttrici principali delle R^6 anzidette, passanti tutte per

biare le congruenze Ω e Ω' , A e B , e sia b_0 la retta analoga a a_0 . Poichè la ω_0 deve incontrare ω'_0 , direttrice di Ω^{45} , anche a_0 e b_0 saranno incidenti. D'altra parte le rette b generiche incontrano le rigate cubiche di rette a , e viceversa, in un solo punto; e così le linee ω' dovranno incontrare in un solo punto variabile le superficie della rete omaloidica $|R(\omega)|$, in particolare le $R_0(\omega)$ luoghi delle $\infty^1 \omega$ uscenti dai singoli punti della direttrice ω'_0 . Ora le $\infty^1 \omega$ e le $\infty^1 \omega'$ passanti per il punto $\omega_0 \omega'_0$ contengono rispett. gli ∞^1 elementi principali uscenti da questo stesso punto, e sono perciò tutte tangenti in questo punto, che non è punto base di alcuna delle due congruenze⁴⁶⁾, alla superficie luogo dell'altra ∞^1 . E ciò non è possibile senza che ciascuna di queste superficie contenga per intero le curve dell'altro sistema ∞^1 ; vale a dire senza che coincidano queste due superficie, e coincidano pure i due fasci di curve ω e ω' uscenti dal punto $\omega_0 \omega'_0$ e comprendenti le linee ω_0 e ω'_0 , non potendo una superficie contenere due distinti fasci di linee principali. Nella corrispondenza dianzi con-

P e appoggiate alla a_0 in un punto variabile. Le γ^4 appoggiate inoltre a un'ulteriore retta di A , cioè contenute nelle R^6 di un fascio, hanno per luogo superficie F^9 (nota ³²⁾) aventi a come retta doppia, e tangenti ai piani principali e fra loro lungo a_0 . Le $\infty^2 R^6$ suddette possono distribuirsi in ∞^1 fasci aventi risp. come ulteriore retta base una retta di A infinitamente vicina alla a_0 ; rigate perciò mutuamente tangenti, oltre che in P , in un punto A_0 di a_0 , variabile con quel fascio. Questi fasci contengono tutti la rigata cubica $B^3(aa_0)$ di generatrici a, a_0 contata due volte. Per ognuno di essi le γ^6 direttrici, passando per i due punti P, A_0 , hanno per luogo una superficie φ^6 , sezione iperpiana (particolare, n. 6) di M , passante per le due rette a, a_0 ; si ha così un fascio di φ^6 , che entro la rete $|F^9|$ ha come residua la stessa rigata cubica $R^3(aa_0)$. Quando la R^6 nel relativo fascio tende a questa rigata cubica doppia, la γ^4 sua direttrice tende alla curva riducibile composta delle a, a_0 e della direttrice rettilinea $d(aa_0)$ di $R^3(aa_0)$, quest'ultima contata doppiamente. Ma tra i fasci di R^6 considerati ve n'è uno riducibile, composto della rigata cubica $R^3(aa_0)$, parte fissa, e di una seconda rigata cubica ρ , variabile, passante per a [e ciò quando il punto A_0 di a_0 cade nell'intersezione di a_0 con $d(aa_0)$]. Le relative γ^4 sono anche riducibili, e spezzate nella $d(aa_0)$, nella a contata due volte, e nella direttrice rettilinea della rigata ρ . Quando quest'ultima rigata tende alle $R^3(aa_0)$, la γ^4 al limite risulta composta della a e della $d(aa_0)$, entrambe contate doppiamente; diversa quindi dal limite precedente. D'altra parte l'intersezione di una F^9 generica colla rigata cubica $R^3(aa_0)$ è composta della a doppia e delle due rette a_0 e $d(aa_0)$ contate semplicemente (e non è una γ^4). La rigata $R^3(aa_0)$ non è perciò assolutamente luogo di γ^4 della congruenza in esame; e può soltanto considerarsi nella sua totalità come una γ^4 degenerata. Nella corrispondenza considerata su M questa rigata cubica, o γ^4 degenerata, corrisponde alla retta (del sistema opposto ad A) direttrice della rigata cubica $a a'$: essa corrisponde però, più precisamente, al solo punto fondamentale P che sta su questa direttrice, mentre a un punto generico di questa direttrice e all'intera retta di A che lo contiene corrisponde soltanto un punto della a_0 .

⁴⁵⁾ Qualora una almeno delle due linee ω_0 e ω'_0 fosse solo componente di una ω e ω' , potrebbe questa componente non incontrare l'altra delle due linee. Ma ciò porterebbe solo lievi modifiche al ragionamento, non alla conclusione.

⁴⁶⁾ Se fosse tale, le curve ω e ω' dovrebbero appoggiarsi a ω'_0 risp. ω_0 in un secondo punto variabile, il che porterebbe solo lievi modificazioni nel corso del ragionamento.

siderata su M alle curve di questo fascio, comune alle due congruenze, corrisponderanno i singoli elementi principali uscenti dal punto $a_0 b_0$; in particolare alle linee ω_0 e ω'_0 le intere rigate cubiche di direttrici b_0 e a_0 . Prescindendo per le curve delle due congruenze Ω e Ω' dalla condizione di appoggiarsi a ω'_0 o rispett. a ω_0 , si ha un unico sistema continuo ∞^3 di curve contenente le due congruenze, tale che un elemento principale generico di M appartiene a una di esse. Questo sistema ∞^3 contiene ∞^3 congruenze Ω , costituite rispett. dalle curve di esso che si appoggiano a una fissa tra queste; e sono coniugate le coppie di congruenze le cui direttrici sono incidenti (all'infuori degli eventuali punti fissi comuni), e perciò curve comuni alle congruenze stesse. Le curve del sistema passanti per uno stesso punto generico hanno per luogo una superficie, incontrata da ogni curva del sistema ∞^3 non giacente su di essa, cioè non passante per quel punto, in un solo punto variabile; il sistema di quest'è ∞^3 superficie è perciò un sistema lineare omaloidico. E la M potrà riferirsi birazionalmente allo spazio S_3 in modo che alle dette superficie corrispondano i piani, e alle linee del sistema ∞^3 le rette di un complesso lineare generale.

Il sistema ∞^3 più semplice di questo tipo sulla varietà M è costituito dalle quartiche γ^4 (n. 9) passanti per un punto fisso P , e che al n. 7 abbiamo appunto veduto potersi proiettare in un complesso lineare di rette. Le congruenze Ω si compongono allora delle γ^4 passanti per P e appoggiate inoltre a una fissa tra queste in un secondo punto variabile. Le superficie $R_0(\omega)$ sono φ^6 , luoghi di quartiche γ^4 passanti per P e per un secondo punto fisso, e la Φ è una di queste stesse φ^6 , luogo delle γ^4 passanti pel punto $\omega_0 \omega'_0$ (oltre che per P). — Un altro esempio si ha nello spazio S_3 , applicando a un complesso lineare di rette la corrispondenza birazionale involutoria avente per curva fondamentale una cubica sghemba k appartenente al complesso, e nella quale si corrispondono tutte le coppie di punti appartenenti a una stessa corda della cubica e coniugati armonici rispetto agli estremi di tale corda. Questa corrispondenza muta appunto in sè l'insieme degli elementi punto-piano appartenenti al complesso⁴⁷). Alle rette del complesso corrispondono cubiche del complesso, appoggiate a k in 4 punti formanti quaderne equianarmoniche. Tra queste ∞^3 cubiche ve ne sono ∞^2 riducibili, spezzate in una tangente di k contacta due volte, e in un raggio osculatore di k (cioè una retta appoggiata a k in un punto e contenuta nel relativo piano osculatore). Sono perciò congruenze coniugate Ω , Ω' anche quelle costituite dalle ∞^3 cubiche del sistema che si appoggiano rispett. a due raggi osculatori di k fra loro incidenti (in un punto generico). Considerando lo spazio S_3 come proiezione

⁴⁷) Cfr. la mia nota nei Rend. R. Accad. dei Lincei (6), vol. 9 (1° sem. 1929), p. 15.

di una M di S_7 , nel modo indicato al n. 7, si può fare in modo che alla cubica k corrisponda una quartica principale γ^4 appoggiata a una delle due rette a, b ; alle corde della cubica k anche quartiche, in generale non principali, bisecanti la detta γ^4 ; alle cubiche del sistema ∞^3 , curve di ordine 12 aventi il punto P come triplo.

In conclusione, due congruenze Ω, Ω' contenute in M , coniugate e non composte entrambe di rette, sono sempre tali che all'infuori delle eventuali direttrici comuni:

o una delle due ha come direttrici una o più linee dell'altra, senza che quest'altra abbia per direttrici linee della prima. Le linee della prima segano allora su queste direttrici gruppi di una serie lineare ∞^2 , oppure un solo punto variabile;

ovvero le due congruenze sono contenute in un sistema ∞^3 birazionalmente equivalente a un complesso lineare di rette di S_3 ; esse si compongono di quelle curve del sistema ∞^3 che si appoggiano risp. a due fisse tra di esse, fra loro incidenti⁴⁸).

12. *Trasformazioni elementari e loro prodotti.* — Abbiamo detto al n. 2 che in un piano sono trasformazioni di contatto birazionali tutte quelle risultanti da prodotti di trasformazioni cremoniane dello stesso piano come punteggiato e rigato, alternativamente. Le trasformazioni principali di M immagini delle precedenti sono prodotti di trasformazioni birazionali che mutano in sè, alternativamente, l'uno o l'altro dei due sistemi di rette. Esaminiamo pertanto le congruenze Ω che corrispondono in questi prodotti a uno dei sistemi di rette; e più particolarmente l'insieme delle loro direttrici.

Indichiamo con A, B i due sistemi di rette di M . Una prima trasformazione birazionale entro A muta le rigate R^3 di questa congruenza in una rete omaloidica di rigate R^{3n} con certe rette basi α_i (del sistema A) aventi per esse determinate molteplicità k_i ; e le rette del sistema B , direttrici principali di quelle R^3 , nelle direttrici principali (uniche) di queste R^{3n} , appoggiate alle singole α_i in k_i punti. Queste linee b_1 formano una congruenza Ω che chiameremo B_1 , le direttrici α_i ; su queste rette esse segano gruppi di una serie lineare $g_{k_i}^2$ (corrispondenti ai gruppi delle tangenti alle curve di una rete omaloidica in un punto base multiplo), o anche un solo punto variabile (nel qual caso questa retta sarà parte di una b_1).

Applichiamo ora una trasformazione birazionale entro il sistema B .

⁴⁸) Qualora il sistema ∞^3 si componga di curve passanti tutte per uno o più punti fissi (come nell'esempio delle γ^4 già più volte incontrato; n. 9 e seg.), queste due direttrici dovranno incontrarsi in un punto ulteriore.

Le rette di A si muteranno nelle linee a_1 di una congruenza A_1 dello stesso tipo della precedente B_1 , con direttrici rettilinee β_i appartenenti a B ; e la congruenza B_1 in altra B_2 , coniugata di A_1 , avente per direttrici certe linee di A_1 , trasformate dalle rette α_i ; e anche le β_i , in quanto queste ultime corrispondono in questa seconda trasformazione a superficie fondamentali appartenenti a B , incontrate in certi punti dalle b_1 . Le linee b_2 di B_2 segheranno ancora sulle trasformate delle α_i serie lineari, trasformate di quelle considerate in precedenza sulle α_i ; non così generalmente sulle rette β_i , i cui punti corrispondono nella seconda trasformazione alle singole generatrici di una rigata fondamentale, due determinate delle quali possono essere incontrate da più linee b_1 .

Così continuando, e operando alternativamente su A e su B , otteniamo congruenze Ω le cui direttrici si ripartiscono ordinatamente in più gruppi, tali che: 1) quelle di uno stesso gruppo sono linee di una stessa congruenza Ω ; 2) gruppi consecutivi appartengono a congruenze Ω coniugate; 3) ognuna di queste congruenze Ω ha per direttrici soltanto direttrici delle congruenze precedenti, e linee dell'ultima Ω precedente; 4) l'ultima congruenza Ω a cui si perviene e quella a cui appartiene l'ultimo gruppo di direttrici sono anche coniugate; e le linee della detta ultima Ω segano su queste ultime direttrici gruppi di una serie lineare.

Un punto fisso pel quale debbano passare tutte linee di una congruenza Ω equivale a imporre come direttrici una delle due rette passanti per questo punto (l'una o l'altra indifferentemente) e una determinata delle sue infinitamente vicine. Questo punto risulta anche punto fisso, generalmente multiplo, per le congruenze Ω successive.

Chiamando *trasformazione elementare* di M ogni trasformazione principale che muti in sè una delle due congruenze di rette, possiamo dire che ogni congruenza Ω ottenibile da una delle due congruenze di rette con un prodotto di trasformazioni elementari⁴⁹⁾ è legata a questa (o all'altra congruenza di rette, indifferentemente) dalla proprietà di appartenere con essa a una successione di un numero finito di congruenze Ω , di cui ciascuna è coniugata alla precedente. — Viceversa, ogni congruenza Ω che si trovi in questa relazione con una delle due congruenze di rette è ottenibile da questa con un prodotto di trasformazioni elementari. Consideriamo infatti una congruenza $\Omega \equiv A_n$, e con essa la successione di congruenze $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_1, A_0 \equiv A$, di cui ciascuna sia coniugata alla precedente, e l'ultima si componga di rette; sicchè la prima abbia come “ n^{esima} coniugata”, la congruenza di rette A . Con una trasformazione

⁴⁹⁾ Fra i prodotti di trasformazioni elementari sono comprese anche le trasformazioni che su M scambiano le due congruenze di rette. Cfr. la nota ⁵⁾.

elementare entro A si può mutare la congruenza A_1 , coniugata di A , nell'altra congruenza di rette B ; la $\Omega \equiv A_n$ verrà così trasformata in altra congruenza avente quest'ultima come $(n-1)^{\text{sim}}^{\text{a}}$ coniugata. E così di seguito.

Osserviamo ancora che in ogni trasformazione cremoniana del piano punteggiato (o rigato) vi è un numero finito di punti (risp. di rette) fondamentali; e alle rette (punti) delle forme di 1^a specie aventi i detti elementi come sostegni corrispondono curve riducibili — le sole riducibili —, distribuite in un numero finito di fasci (schiere), composti di una parte fissa e una parte variabile. In un prodotto di trasformazioni di questi due tipi, al sistema dei punti o delle rette corrisponderanno perciò sempre sistemi omaloidici le cui curve riducibili, distribuite in un numero finito di sistemi continui ∞^1 , saranno composte, per ciascun sistema, ancora di una parte fissa, eventualmente anch'essa riducibile, e di una parte variabile irriducibile. Nessuno di questi sistemi ∞^1 potrà comporsi di curve comprendenti due parti entrambe variabili. E così anche nelle corrispondenti congruenze Ω di M ogni sistema continuo ∞^1 di curve riducibili dovrà comporsi di curve con una sola parte variabile. Non potranno perciò ottenersi, a partire da una congruenza di rette di M e con prodotti di trasformazioni elementari, quelle congruenze Ω nelle quali le curve riducibili di un sistema continuo ∞^1 si compongono di almeno due parti entrambe variabili. Tale è, ad es. nello spazio S_3 (n. 11, in fine) la congruenza delle cubiche sghembe appartenenti a un complesso lineare e appoggiate in 4 punti a una determinata k di queste cubiche e in un punto a un'altra l di queste stesse cubiche, essa pure 4-secante la k ; poichè le cubiche riducibili di questa congruenza si compongono dei raggi osculatori di k incidenti a l , ciascuno congiunto alla tangente di k passante per la sua intersezione (unica, fuori di k) colla superficie luogo di tali tangenti; la tangente stessa essendo contata due volte.

13. Congruenze coniugate minime. — Una congruenza Ω ha infinite coniugate, che possono comporsi di curve di ordine comunque elevato. Fra queste ve n'è però una, eventualmente anche più d'una, di curve di uno stesso ordine minimo, e che chiameremo congruenze *coniugate minime* di Ω . Una congruenza di rette è evidentemente coniugata minima di tutte le sue coniugate. Una congruenza può avere anche infinite coniugate minime; così avviene p. es. in M per le congruenze Ω generiche contenute nei sistemi ∞^3 equivalenti a complessi lineari di S_3 . La relazione di "coniugata minima, di una congruenza Ω rispetto a un'altra Ω' non ha però carattere invariante rispetto a trasformazioni principali, potendosi ogni coppia di congruenze coniugate trasformare in un'altra coppia

qualunque consimile (n. 9). Due congruenze Ω possono anche essere “reciprocamente minime,,; e sono tali ad es. su M le due congruenze di rette.

Partendo su M da una congruenza Ω arbitraria, possiamo prenderne la coniugata minima Ω_1 , o una di queste; poi la (o una) Ω_2 coniugata minima di Ω_1 , se tale non è già Ω ; e così di seguito. Poichè l'ordine delle curve di queste successive congruenze andrà in massima diminuendo, e certo diminuirà da Ω a Ω_2 e nei casi analoghi, l'operazione avrà termine con una coppia di congruenze reciprocamente minime. In qualche caso di congruenze con infinite coniugate minime potrà anche avvenire che scegliendo opportunamente una di queste si riesca a prolungare la successione, e ridurre ulteriormente l'ordine delle curve. P. es. su M la congruenza più volte considerata delle γ^4 passanti per un punto fisso P e incontranti una fissa di tali γ^4 in un secondo punto variabile (n. 9, 11) ha infinite coniugate minime composte pure di γ^4 passanti per P e incidenti, anzichè alla precedente direttrice, a un'altra qualsiasi curva della prima congruenza. Assumendo come nuova direttrice una γ^4 riducibile, spezzata in una retta passante per P , una seconda retta dello stesso sistema incidente alla prima γ^4 (retta che sarà la effettiva nuova direttrice) e nella retta loro secante comune contata due volte, la successione potrà prolungarsi fino a una congruenza di rette.

Se la congruenza iniziale Ω è riferibile a un piano biunivocamente senza eccezioni — corrispondenza che sarà completamente definita a meno di un'omografia nel piano —, cioè se Ω ha ordine invariantivo relativo uno, risulta così anche definita in essa la rete omaloidica minima, corrispondente alle rette del piano, e quindi la congruenza Ω_1 coniugata minima di Ω , in tal caso unica. E questa sarà pure di ordine invariantivo relativo uno: poichè in caso diverso almeno una superficie $R(\omega)$ della detta rete omaloidica dovrebbe avere infinite direttrici ω_1 , il che in questo caso non è possibile. Pertanto la costruzione delle congruenze successive coniugate minime, a partire da una congruenza Ω assegnata di ordine invariantivo relativo 1, conduce sempre a congruenze dotate pur esse di questa ultima proprietà, fino a terminare colle congruenze di rette. E queste stesse congruenze, come pure tutte quelle che fra le successive coniugate ne hanno una di grado invariantivo relativo uno, si potranno ottenere da una delle due congruenze di rette di M con un prodotto di trasformazioni elementari (cfr. n. 12).

14. Siano ora di nuovo Ω e Ω' congruenze coniugate, tali che Ω' abbia fra le sue direttrici qualche linea ω , ma non viceversa; sicchè le direttrici di Ω siano soltanto quelle eventualmente comuni alle due con-

gruenze. Consideriamo su M una qualsiasi delle corrispondenze principali definite riferendo Ω , Ω' rispettivamente alle due congruenze di rette A , B . Alle direttrici comuni di Ω e Ω' corrisponderanno superficie secanti comuni delle rette a , b delle congruenze A , B ; alle linee ω direttrici di Ω' , rigate $R(a)$ di generatrici a , incontranti tutte le b ma non le a generiche; mentre a nessuna ω' potrà corrispondere una rigata analoga $R(b)$. Ne segue che nella corrispondenza birazionale fra le due congruenze Ω' e B non vi sarà alcun elemento fondamentale ω' ; e quindi, in base al n. 10, nota ³⁸), nemmeno un elemento fondamentale b . In altri termini, la corrispondenza fra le due congruenze Ω' e B come enti ∞^2 sarà biunivoca senza eccezioni; e Ω' , come ente ∞^2 di linee ω' , avrà al pari della congruenza di rette B l'ordine invariantivo relativo uno.

Ogni qualvolta delle due congruenze coniugate Ω , Ω' la prima non abbia nessuna direttrice che sia linea totale o parziale della seconda, quest'ultima (cioè la Ω') avrà grado invariantivo relativo uno. P. es., se Ω è una congruenza di rette, perciò completamente priva di direttrici, la congruenza delle direttrici principali sulle rigate di una rete omaloidica $|R(\omega)|$ entro Ω è sempre di grado invariantivo relativo uno.

Nelle stesse ipotesi, potendosi la Ω' riferire alla congruenza di rette B in corrispondenza biunivoca senza eccezioni, la sua coniugata Ω che in questa corrispondenza (perfettamente definita, a meno di una proiezione entro B) ha per omologa l'altra congruenza di rette A risulta da questa condizione ben definita; è pur essa di ordine invariantivo relativo uno; è altresì la coniugata minima unica di Ω' , e l'unica sua coniugata che non abbia per direttrice alcuna curva di Ω' ⁵⁰). Una congruenza Ω ha dunque al più una sola coniugata Ω' non avente come direttrice alcuna linea ω della prima o sua componente. Se questa Ω' esiste, entrambe le congruenze sono di ordine invariantivo relativo uno.

Con riferimento all'enunciato posto alla fine del n. 11, e per quanto concerne la prima parte di esso, possiamo dunque concludere che se di due congruenze coniugate contenute in M una non ha come direttrice nessuna linea totale o parziale dell'altra, queste due congruenze, come enti razionali ∞^2 , sono entrambe di ordine invariantivo relativo uno, e possono ottenersi dalle due congruenze di rette con un prodotto di trasformazioni elementari.

⁵⁰) Se una congruenza Ω' ha l'ordine invariantivo relativo 1, essa può riferirsi alla congruenza di retta B in corrispondenza biunivoca senza eccezioni. Ma se contemporaneamente una congruenza Ω comunque assegnata e coniugata di Ω' deve mutarsi nell'altra congruenza di retta A , la corrispondenza che ne consegue fra Ω' e B sarà in generale diversa dalla precedente, e avrà elementi fondamentali in entrambe le congruenze; e nulla ne emerge circa l'ordine invariantivo relativo di Ω .

Esse sono pertanto immagini di sistemi omaloidici del piano ricavabili dal sistema ∞^2 dei punti o delle rette con un prodotto di trasformazioni Cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternate.

15. Consideriamo invece, conforme alla seconda parte dello stesso enunciato, due congruenze coniugate contenute in un sistema ∞^3 equivalente a un complesso lineare di rette di S_3 , e aventi rispett. due distinte direttrici, ciascuna delle quali non sia tale per la congruenza residua. Queste direttrici saranno curve totali o parziali di un sistema ∞^1 (fascio) comune alle due congruenze. Entro il sistema ∞^3 suddetto prendiamo due congruenze coniugate generiche Ω, Ω' , con direttrici ulteriori rispett. α, β incidenti, curve totali comuni alle due congruenze; e riferiamo Ω, Ω' in una corrispondenza principale alle due congruenze di rette A, B pure coniugate. Alle eventuali direttrici comuni o punti fissi comuni delle congruenze Ω, Ω' corrisponderanno superficie secanti le rette a, b di entrambe le congruenze A, B , non luoghi perciò di rette dell'uno nè dell'altro sistema, e pertanto non fondamentali per le corrispondenze subordinate fra Ω e A , e fra Ω' e B . Alle ∞^2 superficie $R_0(\omega)$ luoghi delle linee ω uscenti dai singoli punti della direttrice α e formanti un fascio di cui α è la ω base, corrispondono in A rigate cubiche $R^3(a)$ con una retta base a_0 , immagine di α . Più particolarmente, ai singoli punti di α , assorbenti ciascuno due direttrici ω' delle $R_0(\omega)$, la α e un'altra infinitamente vicina variabile, corrispondono le direttrici rettilinee b delle suddette $R^3(a)$, generatrici a loro volta della rigata cubica contenuta in B e di direttrice rettilinea a_0 . Analogamente quando si scambino le congruenze Ω e Ω' , A e B ; alla linea β come elemento di Ω' corrisponde una retta b_0 , incidente a a_0 ; e ai singoli punti di β , rette a appoggiate a b_0 , immagini delle singole ω infinitamente vicine a β . Quando un punto variabile di α o β tende al punto $\alpha\beta$, la b od a corrispondente tende a b_0 o rispett. a_0 ; ma le rigate cubiche aventi queste ultime due rette come direttrici corrispondono per intero rispett. alle sole curve β od α , non già al fascio delle ∞^1 curve comuni alle congruenze Ω, Ω' e passanti pel punto $\alpha\beta$; a queste ultime corrispondono soltanto i singoli elementi principali uscenti dal punto a_0b_0 , nel piano a_0b_0 .

Pertanto, nella corrispondenza subordinata ad es. fra le congruenze Ω ed A , alle ∞^2 rigate cubiche di A corrispondono in Ω superficie di una rete omaloidica $|R(\omega)|$ colla β , unica linea ω direttrice di Ω' , come unica ω base; sicchè β è entro Ω il solo elemento fondamentale, e ad essa corrispondono entro A ∞^1 rette a : considerata A come un piano, sarebbero gli ∞^1 punti di una retta r . Viceversa, alle ∞^1 curve ω passanti per

il punto $\alpha\beta$ corrispondono in A gli elementi lineari principali pel punto a_0b_0 . Ora a_0 e un punto di essa equivalgono nel piano suddetto a un punto della r e all'elemento di r passante per questo punto; e gli elementi lineari principali pel punto a_0b_0 agli elementi di 2° ordine appartenenti all'elemento suddetto di r . La corrispondenza fra Ω ed A è dunque esattamente quella che intercede fra un cono quadrico a due dimensioni e un piano, quando il cono si proietta su questo piano da un suo punto generico (per Ω , l'elemento β). Le congruenze Ω e Ω' sono dunque di ordine invariante relativo due, riferibili biunivocamente senza eccezioni a un cono quadrico di S_3 ⁵¹).

Concludiamo perciò:

Entro la varietà M le congruenze Ω sono tutte di ordine invariante relativo *uno* o *due*, e riferibili biunivocamente senza eccezioni, nei due casi, rispett. a un piano e a un cono quadrico dello spazio S_3 . Analoga proprietà sussiste naturalmente per i sistemi omaloidici di curve di un piano (n. 2).

Entro un sistema ∞^3 di linee principali birazionalmente equivalente a un complesso lineare generale di rette dello spazio S_3 , una congruenza Ω generica — composta delle linee del sistema che si appoggiano a una linea generica di esso — è di ordine invariante relativo *due* (come ad es. una congruenza lineare speciale di rette in S_3). Però particolari congruenze Ω consentite nel sistema ∞^3 possono essere di ordine invariante relativo *uno*.

⁵¹) Le linee α e β , immagini del vertice di questo cono, sono perciò elementi doppi rispett. delle congruenze Ω e Ω' . Una linea che sia elemento doppio (cioè di grado -2 , anzichè -1) di una congruenza Ω ne è necessariamente anche direttrice. E in una rete omaloidica $|R(\omega)|$, per la quale questa linea non sia linea base, essa è elemento doppio per tutte le ∞^1 superficie della rete che la contengono. Queste superficie sono perciò tutte riducibili; e il fascio $|R_0(\omega)|$ di cui al n. 11 è certo contenuto parzialmente nella rete $|R(\omega)|$.

(Reçu le 3 juin 1946.)