GINO FANO

Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 8, Vol. **I** (1946), p. 463–466

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1946_1>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 18 maggio 1946

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni.* Nota [1] del Corrisp. G. FANO.

La questione della razionalità o meno della forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni, cioè della varietà algebrica a 3 dimensioni del 3° ordine di questo spazio priva di punti doppi, si è presentata in geometria da oltre 50 anni, suscitando viva curiosità [2], senza essere stata finora risolta. Come è noto, non è razionale la curva piana generale del 3° ordine, mentre invece è razionale ogni superficie cubica dello spazio ordinario, all'infuori del cono ellittico; per le forme cubiche generali degli spazi di dimensione $\geqq 4$ la questione rimaneva incerta, con presunzione piuttosto negativa. Per gli spazi di dimensione dispari è noto tuttavia da tempo che esistono forme cubiche razionali, anche se prive di punto doppio; esse sono però tutte (per quanto è noto finora) forme particolari: per esempio, nello spazio a 5 dimensioni, le forme cubiche contenenti una superficie appartenente pure a questo spazio e il cui sistema delle ∞^4 corde è del 1° ordine (coppia di piani indipendenti, rigata razionale normale del 4° ordine).

Per la forma cubica generale dello spazio S_4 ho potuto stabilire nel 1930, in occasione di altra ricerca, un risultato interessante [3]. L'esame di

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Tanto più, come si è rilevato in seguito, trattandosi di varietà avente tutti i generi nulli. Mentre per le curve algebriche la razionalità equivale all'annullarsi del genere, e per le superficie all'annullarsi del genere numerico e del bigenere (CASTELNUOVO, « Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) », 1896), e per conseguenza di tutti gli altri generi, per le varietà algebriche a tre dimensioni le condizioni di razionalità sono tuttora sconosciute.

(3) Ved. le mie Note nei « Rendiconti » di questa Accademia (6), vol. XI, 1° sem. 1930, pp. 227, 329.

un lavoro di F. Palatini sulla geometria della retta dello spazio a 5 dimensioni [4] mi aveva indotto a approfondire alcune questioni sui sistemi lineari di complessi lineari di questo spazio. Nello spazio a tre dimensioni, una rete generica di complessi lineari contiene ∞^1 complessi speciali, le cui direttrici, o rette singolari, costituiscono un regolo; mentre le rette basi della rete costituiscono l'altro regolo della stessa quadrica. Nello spazio a 5 dimensioni [5] un generico sistema lineare ∞^4 di complessi lineari (Λ) contiene ∞^3 complessi singolari di 1ª specie, ciascuno con una retta centro a, e d'altra parte tale sistema ha ∞^3 rette basi b; questi due sistemi ∞^3 di rette a, b ricoprono semplicemente una stessa varietà M_4^4, a 4 dimensioni e del 4° ordine, per un punto generico della quale passa pertanto *una* retta di ciascuno dei due sistemi. Questi due sistemi ∞^3 sono perciò birazionalmente equivalenti [6], potendosi far corrispondere le rette a, b uscenti da uno stesso punto di una sezione iperpiana arbitraria di M_4^4. Ora un fascio generico di complessi lineari di S_5 contiene 3 complessi lineari singolari di 1ª specie; perciò il sistema ∞^3 dei complessi singolari contenuti in Λ, e quindi il sistema ∞^3 delle loro rette–centri a, è riferibile birazionalmente a una forma cubica dello spazio S_4, che si riconosce facilmente essere priva di punto doppio e affatto generale. D'altra parte, il sistema delle rette b è, proiettivamente, la sezione della Grassmanniana delle rette di uno spazio S_5 (M_8^{14} di S_{14}) [7] con un generico S_9. Si ha così una corrispondenza birazionale tra la forma cubica generale V^3 di S_4 e questa generica M_3^{14} di S_9, tale che su ciascuna di queste due varietà i soli punti fondamentali sono quelli di una curva ellittica normale del 5° ordine γ_1^5, δ_1^5. In particolare a quest'ultima curva corrisponde su V^3 la superficie φ^{15} segata dalla varietà delle corde di γ_1^5 (superficie e varietà aventi γ_1^5 come curva tripla [8]).

Questa M_3^{14} appartiene alla categoria delle M_3^{2p-2} di S_{p+1}, a curve-sezioni canoniche di genere p. Di queste varietà, aventi pure tutti i generi nulli, e particolarmente di quelle contenenti, come la M_3^{14}, soltanto superficie loro intersezioni complete con forme, io mi ero occupato fino dal 1908 pei primi casi $p=3$ e $p=4$ [9], accertandone la irrazionalità in base alla

(4) «Atti R. Istit. Veneto», vol. 40 (parte 2ª), 1900-01, p. 371.

(5) Che è lo spazio dispari successivo. È noto che alcune proprietà di geometria della retta e in particolare dei complessi lineari variano secondo la parità dello spazio ambiente, perchè dipendono da un determinante emisimmetrico, che è identicamente nullo, oppure in generale diverso da zero, secondo che di ordine dispari o pari.

(6) La relazione fra essi non è però reciproca, come per i due regoli di una quadrica di S_3. Ad esempio, lo spazio S_3 congiungente due a generiche non contiene nessuna b, mentre lo spazio congiungente due b generiche contiene una a.

(7) F. Severi, *Sulle varietà che rappresentano gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare.* «Annali di Matem.» (3) vol. 24, 1915, p. 89.

(8) La φ^{15} è l'aggiunta delle superficie di V^3 corrispondenti alle sezioni iperpiane di M_3^{14}.

(9) «Atti R. Accad. di Torino», vol. 43, 1907–08, p. 973. Ved. anche la Nota posteriore negli stessi «Atti», vol. 50, 1914-15, p. 1067.

proprietà di contenere sistemi lineari completi di superficie di generi 1 soltanto della dimensione $p+1$: quello delle sezioni iperpiane, o riducibili birazionalmente a questo. Avevo pure avviate più tardi ricerche sui casi successivi, facendone nel 1928 una comunicazione al Congresso internazionale di Bologna (10), e nel 1936 oggetto di una Memoria compresa nel volume offerto al nostro Socio Luigi Berzolari in occasione del suo collocamento a riposo per età (11). La M_3^{14} di S_9 di cui sopra, birazionalmente equivalente alla forma cubica generale di S_4, si inseriva appunto in questa serie per $p=8$; e a questa serie appartiene pure, per $p=13$, la M_3^{24} di S_{14} rappresentante il sistema lineare delle superficie intersezioni della detta forma cubica con quadriche. Era pertanto a presumere che una via per risolvere possibilmente la vexata quaestio della razionalità o meno della forma cubica generale di S_4 fosse lo studio più approfondito delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche di genere p, e dei sistemi lineari completi (semplici) di superficie di generi 1 ivi contenuti, accertandone in particolare per $p=8$ la diversità da quelli dello spazio ordinario.

Questo studio ulteriore è stato fatto da me in una Memoria del 1936 inserta nella raccolta della cessata Accademia d'Italia (12); in una Nota del 1941 pubblicata in Svizzera (13); e infine in una lunga Memoria presentata nel febbraio 1943 all'Accademia delle Scienze Pontificia (14), e a cagione degli avvenimenti bellici non ancora pubblicata, ma della quale l'Introduzione, o breve riassunto, è apparsa recentemente negli « Acta » della stessa Accademia (15).

Da questi lavori risulta che la M_3^8 di S_6 della successione indicata (intersezione generale di tre quadriche) e la M_3^{10} di S_7, corrispondenti ai valori $p=5$ e $p=6$, contengono solo sistemi lineari completi semplici di superficie di generi 1 riducibili birazionalmente al sistema delle sezioni iperpiane della stessa varietà o di altra del medesimo tipo, e non sono perciò razionali; che sono invece razionali le M_3^{2p-2} di S_{p+1} della successione per $p=7$ e per $p \geqq 9$, con esclusione tuttavia del caso $p=13$, varietà sulla quale il sistema delle sezioni iperpiane anzichè essere base minima del sistema delle superficie è doppio della base stessa; che infine su quest'ultima varietà e su quella $p=8$, equivalenti entrambe alla forma cubica generale di S_4, i sistemi lineari completi di superficie di generi 1 sono riducibili al sistema delle sezioni iperpiane di una M_3^{14} di S_9 oppure a quello

(10) « Atti del detto Congresso », vol. V, 1931, p. 115.

(11) *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni*... Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, Tip. Rossetti, 1936, p. 329.

(12) Vol. VIII, Mem. n. 2, 1937.

(13) *Su alcune varietà a tre dimensioni razionali e a curve sezioni canoniche.* « Commentarii Mathem. Helvetici », vol. 14, 1941-42, p. 203.

(14) *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.*

(15) *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a curve-sezioni canoniche.* « Acta dell'Accademia Pontificia », vol. IX, n. 13, p. 135.

delle intersezioni di una forma cubica di S_4 con quadriche, di dimensioni rispettivamente 9 e 14; essenzialmente diversi perciò da quelli dello spazio ordinario, dove ad esempio, il sistema di tutte le superficie di 4° ordine è di dimensione 34. La forma cubica generale di S_4 non è perciò razionale [16].