Gino Fano

Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche

Acta Pontif. Acad. Scient., Vol. **9** (1945), p. 163–167

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1945_1>

PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 16
pag. 163-168

NUOVE RICERCHE SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI A CURVE-SEZIONI CANONICHE

(Nota riassuntiva) (*)

GINO FANO

SVMMARIVM. — Iuxta alia eiusdem Auctoris edita studia, determinantur systemata linearia simplicia completa generis primi, quae exsistant in algebricis trium dimensionum varietatibus, quarum curvae-sectiones sint conicae, cum huiusmodi curvae-sectiones ad genera quintum, sextum, vel octavum pertineant: nam praeter hos casus, iam rationalitas varietatum certa est.

Omnia haec systemata aequivalent systemati sectionum yperplanarum earumdem varietatum, vel alius sectionis eiusdem generis; si vero sectio sit generis octavi, systema aequivalet etiam systemati intersectionum formae cubicae generalis spatii quattuor dimensionum cum quadricis.

Ex quo constat omnes huiusmodi varietates esse irrationales, illa forma cubica non excepta, de qua questio iam quinquaginta abhinc annis nota est a geometriae algebricae studiosis.

Nella Memoria che, con lo stesso titolo, è in corso di pubblicazione presso questa Pontificia Accademia delle Scienze, continuo le mie ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche di genere $p(M_3^{2p-2}$ dello spazio $S_{p+1})$, in particolare pei casi di tuttora dubbia razionalità, $p=5, 6, 8$.

Fin dal 1908 ho dimostrata la irrazionalita delle due varietà generali M_3^4 di S_4 e M_3^6 di S_5 (casi $p=3,4$; quest'ultima, intersezione generale di una quadrica e di una forma cubica) (1). Nel 1915 ne ho

(*) *Nota riassuntiva* della Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata del 21 febbraio 1943.

(1) *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, « Atti R. Accademia di Torino », vol. 43 (1907-1908), pag. 973.

data un'altra dimostrazione più semplice, e ho stabilito altresì che le due dette varietà sono birazionalmente distinte (1). Un contributo indiretto all'argomento ho portato con un'altra Memoria dello stesso anno (2), mostrando che è razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni contenente un sistema lineare semplice di superficie razionali di grado superiore a tre; e che per conseguenza la forma cubica generale di S_4, le cui intersezioni con quadriche formano un sistema rappresentante una M_3^{24} di S_{14} (caso $p=13$), se non è razionale, non contiene altri sistemi lineari semplici di superficie razionali che di grado 3.

Riprese queste ricerche attorno al 1925, ne ho fatta una comunicazione preliminare al Congresso Internazionale dei matematici a Bologna del 1928 (3). Poco dopo, trattando una questione di geometria della retta dello spazio a cinque dimensioni, ho riconosciuto che la varietà M_3^{14} di S_9 ($p=8$), sezione generica della Grassmaniana delle rette di S_5 (4), è birazionalmente identica alla forma cubica generale di S_4, cioè alla M_3^{24} di S_{14} già menzionata ($p=13$) (5).

Un nuovo gruppo di ricerche è contenuto in due Memorie pubblicate negli anni 1936-37 (6). Nella prima ho studiato i casi $p=5, 6, 7$,

---

(1) *Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli*, « Atti R. Accademia di Torino », vol. 50 (1914-1915), pag. 1067.

(2) *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali*, « Annali di Matematica » (3), vol. 24 (1915), pag. 49. Vedi anche: « Scritti matematici offerti a ENRICO D'OVIDIO » (Torino, Bocca, 1918), pag. 342.

(3) *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, « Atti Congr. internaz. di matematica », Bologna, vol. IV (1931), pag. 115.

(4) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare*, « Annali di Matematica » (3), vol. 24, (1915), pag. 89.

(5) *Sulle sezioni spaziali della varietà Grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, « R. Accademia Lincei » (6), vol. 11 (1° sem. 1930), pag. 329. Le due varietà suindicate (M_{14}^3 di S_9, V_3^3 di S_4) sono prive di punti multipli, e contengono soltanto superficie loro intersezioni complete con forme; su ciascuna di esse vi è un'unica curva fondamentale di prima specie, di genere uno.

(6) *Su alcune varietà algebriche e tre dimensioni aventi curve-sezioni canoniche*, Scritti Matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, Pavia, Tip. Rossetti, 1936, pag. 329. *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, « Mem. R. Accademia d'Italia », vol. VIII (1937), n. 2. Queste due Memorie, ripetutamente citate in seguito, verranno indicate rispettivamente con « Berz. » e « Accad. It. »; i risultati principali della seconda erano già stati enunciati in una Nota dei

sopratutto per quanto concerne i loro caratteri proiettivi. Nella seconda ho dimostrato che le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} esistono soltanto per $p \leqslant 37$, mentre si poteva pensare che la loro serie fosse illimitata, come per le superficie a curve-sezioni canoniche ([1]), e per $p > 10$ sono tutte razionali, all'infuori forse della M_3^{24} di S_{14} ($p = 13$). Ultimamente ho ancora dimostrato che queste varietà, se contenenti solo superficie loro intersezioni complete con forme, sono pure razionali nei due casi $p = 9{,}10$ ([2]); e pertanto, la razionalità essendo già stata accertata nella stessa ipotesi per $p = 7$ in « Berz. », n. 5, 6, 11, restava dubbia soltanto quella dei casi $p = 5, 6, 8$ ([3]).

Nella Memoria di cui trattasi viene esaurita la ricerca pei tre casi suddetti, e stabilito che le M_3^{2p-2} di S_{p+1} per $p = 5, 6, 8$ contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme, *non* sono razionali, e sono anche fra loro birazionalmente distinte. E poichè la M_3^{14} di S_9 ($p = 8$) è birazionalmente equivalente alla forma cubica generale (cioè priva di punti doppi) di S_4 ([4]), risulta anche accertata la irrazionalità di questa forma cubica; questione che si era affacciata nella geometria algebrica da circa mezzo secolo. La ricerca è fondata essenzialmente sulla determinazione dei sistemi lineari di superficie di genere uno contenuti nelle varietà suddette; sulle proprietà di questi sistemi, se segati da forme di ordine $n > 1$, di avere una linea di multiplicità $\geqslant n+1$ o un punto isolato di multiplicità $\geqslant 2n+1$ ([5]); su procedimenti di riduzione successiva di tali sistemi a altri, segati sulla stessa varietà o su una birazionalmente equivalente, da forme di ordine inferiore; sulla constatazione infine che questi sistemi si riducono a quelli segati sulle stesse M_3^{2p-2} o su altre del medesimo tipo, dagli iperpiani, e sulla V_3^3 di S_4 dalle quadriche, e sono quindi, nei vari casi, differenti fra loro e da quelli contenuti nello spazio S_3.

« Rend. R. Accademia Lincei » (6), vol. 23 (1° sem. 1936), pag. 813. Una comunicazione ne è stata fatta anche al 1° Congresso dell'« Unione Matematica Italiana » (Firenze, 1937; Atti relativi, pag. 245).

(1) Enriques, « Rend. R. Accademia Bologna », vol. 13 (1908), pag. 25; Severi, « Atti R. Ist. Veneto » (7), vol. 68 (1908), pag. 256.

(2) *Su alcune varietà a tre dimensioni razionali e aventi curve-sezioni canoniche*, « Comm. Mathem. Helvetici », vol. 14 (1941-1942), pag. 203.

(3) Cfr. le ultime righe della mia Nota ultima cit.

(4) Cfr. il mio lavoro già cit. dei « Rend. Acc. Lincei », 1930.

(5) Cfr. la mia Nota cit. « *Osservazioni* . . . », pag. 1.

In massima, quando si conosca sulla M_3^{2p-2} una trasformazione birazionale che muti le sezioni iperpiane in superficie segate da forme di ordine k e aventi una linea $\mathbf{C}$ di multiplicità $k+1$, la trasformazione inversa (che, se la prima è involutoria, coinciderà con questa) basterà per ottenere una prima riduzione per i sistemi Σ di superficie segati da forme di un ordine qualsiasi n e aventi lungo $\mathbf{C}$ multiplicità $\geqslant n+1$ (1). E più generalmente, quando si conosca comunque sulla M_3^{2p-2} un sistema lineare di superficie, anche segato da forme di ordine k e colla $\mathbf{C}$ di multiplicità $\geqslant k+1$, il quale rappresenti una varietà μ avente gli stessi caratteri proiettivi della M_3^{2p-2}, al sistema Σ su M_3^{2p-2} e ivi segato da forme di ordine n, corrisponderà su μ un sistema di ordine inferiore.

Per le trasformazioni birazionali incontrate sulle diverse M_3^{2p-2} non è emersa alcuna indicazione su quelle che potrebbero essere le operazioni generatrici del relativo gruppo (2). Credo tuttavia opportuno segnalare due tipi di corrispondenze di cui ho fatto uso di frequente: 1) ogni qualvolta una varietà contiene una congruenza del primo ordine di curve razionali, sono semplici e importanti le corrispondenze involutorie che ho chiamate « specchiamenti » rispetto a una superficie Ω bisecante tali curve, e nelle quali a ogni punto di una di queste curve viene associato il punto della stessa curva suo coniugato armonico rispetto alle due intersezioni di questa con Ω. Congruenze così fatte esistono per $p=5, 8$; mentre non ne ho incontrate (e forse non esistono nemmeno) sulla M_3^{10} di S_7 ($p=6$); 2) le corrispondenze che si ottengono quando sia nota una congruenza del primo ordine di curve ellittiche, su ciascuna delle quali si possa individuare una corrispondenza birazionale, involutoria o no. Se per esempio su ciascuna di queste curve sono razionalmente noti due gruppi di uno stesso numero di punti non equivalenti, si può applicare un procedimento usato da Enriques per le superficie contenenti

---

(1) I casi di superficie con punto isolato di multiplicità $\geq 2n+1$ saranno pochissimi e semplici.

(2) Gruppo che si compone in generale di più schiere continue, nessuna delle quali è però un gruppo continuo nel senso di S. Lie. Cfr. la mia Nota nei « Rend. Accademia Lincei » (6), vol. 15 (1° sem. 1932), pag. 3.

un fascio di curve ellittiche (1). Il più delle volte si incontreranno anche, sulle singole curve, trasformazioni di prima specie, perciò involutorie, cioè serie lineari g_2^1, definite mediante un loro punto doppio, razionalmente noto. Trasformazioni più semplici ancora sono quelle che risultano dalla proiezione di una M_3^{2p-2}, per $p>3$, da un conveniente S_{p-3} in un S_3 doppio.

Contrariamente a quanto forse si poteva pensare, per una M_3^{2p-2} di S_{p+1} il fatto di contenere soltanto superficie intersezioni complete con forme tende piuttosto a facilitarne, per così dire, la razionalità. Per esempio per $p=7$ la M_3^{12} di S_8 contenente soltanto superficie intersezioni complete è razionale (2), mentre esistono altre M_3^{12} di S_8 irrazionali e contenenti superficie non del tipo indicato (3). E mentre le M_3^{2p-2} di S_{p+1} contenenti soltanto superficie intersezioni complete sono tutte razionali per $p \geqslant 9$, ne esistono per $p=9$ e $p=13$, anche altre non razionali, sulle quali il sistema delle sezioni iperpiane è doppio del sistema lineare di superficie di ordine minimo.

---

(1) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, «Rend. R. Accad. Lincei» (5), vol. 15 (2° sem. 1906), pag. 665.

(2) Cfr. «Berz.», n. 11; nonchè la mia Nota cit. dei «Comm. Mathem. Helv.», vol. 14, n. 2-4.

(3) «Berz.», n. 12-13.