Gino Fano

Osservazioni varie sulle superficie regolari di genere zero e bigenere uno

Revista Univ. Nac. Tucumán, Serie A, Vol. **4** (1944), p. 69–79

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1944_2>

OSSERVAZIONI VARIE

SULLE

SUPERFICIE REGOLARI DI GENERE ZERO E BIGENERE UNO

DI GINO FANO

(Lausanne, Suiza)

---

1. Il primo esempio di superficie algebriche di genere geometrico e numerico zero e non razionali è stato dato nel 1896 da Enriques [1]; e sono le superficie di 6° ordine dello spazio a tre dimensioni aventi come rette doppie gli spigoli di un tetraedro. In seguito tali superficie sono state da lui caratterizzate mediante i valori $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ di questi invarianti; il che porta di conseguenza che sono eguali a zero tutti i plurigeneri dispari (compreso pertanto il genere geometrico $p_g = P_1$), e eguali all'unità i plurigeneri pari [2].

Queste superficie sono tutte riferibili a superficie del 6° ordine del tipo suindicato [3]. Qualora non contengano curve eccezionali, come qui sarà sempre supposto, l'invariante ω di Castelnuovo-Enriques [4] vale per esse 1; l'invariante I di Zeuthen-Segre vale 8; il numero base ρ di Severi vale 10, e deve conservare questo stesso valore finchè

[1] *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche, Mem. Soc. Ital. delle Scienze* (detta dei XL) (3), vol. 10 (1896), p. 1.

[2] *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno, Mem. suddette* (3), vol. 14 (1906), p. 327.

[3] Inclusi i casi di degenerazione del tetraedro delle rette doppie. Per questi casi cfr. più particolarmente la mia Nota : *Superficie di genere zero e bigenere uno e loro casi particolari, Rend. Circ. Matem. Palermo,* vol. 29 (1910), p. 98.

[4] Invariante che, per superficie non riferibili a rigate e prive di curve eccezionali, coincide col genere lineare *(Kurvengeschlecht* di Noether), cioè col genere virtuale delle curve canoniche.

la superficie, pur specializzandosi, non contiene curve eccezionali [5]. I sistemi lineari completi di curve di genere π privi di punti basi sono tutti di grado $2\pi - 2$ e dimensione $\pi - 1$; a coppie, per uno stesso π, mutuamente aggiunti. Per $\pi = 1$ i sistemi stessi hanno dimensione $\geqq 0$, e sono perciò anche (aritmeticamente e geometricamente) effettivi. Curve razionali ($\pi = 0$) non vi sono in generale, ma possono esservi; sono in tal caso, evidentemente, curve isolate, e, insieme ai fasci di curve ellittiche, sono i soli sistemi lineari sovrabbondanti. Se γ, γ' sono due curve ellittiche irriducibili mutuamente aggiunte, le curve 2γ, $2\gamma'$ appartengono a un medesimo fascio, che ha come unica aggiunta la $\gamma + \gamma'$. Sulla superficie del 6° ordine avente come rette doppie gli spigoli di un tetraedro, due spigoli opposti del tetraedro sono appunto linee γ, γ' così fatte; le curve del fascio $|2\gamma| = |2\gamma'|$ sono allora le quartiche segate sulla superficie dalle quadriche passanti per gli altri 4 spigoli del tetraedro.

Quando non sia detto il contrario, il tetraedro che ha per spigoli le 6 rette doppie si supporrá non degenere; e la superficie con queste 6 rette doppie si indicherà con F^6 (senz'altro).

In coordinate proiettive omogenee x_i, riferite al tetraedro delle rette doppie come fondamentale, l'equazione della superficie F^6 deve contenere in ogni termine due qualunque delle 4 coordinate a grado complessivamente $\geqq 2$; perciò o tutte 4 le coordinate, oppure tre di esse e queste tutte a quadrato. L'equazione della F^6 è pertanto del tipo:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 f(x) + a_1 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 x_4^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 + a_4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0$$

dove $f(x)$ è una forma quadratica generica nelle x_i. Per un dato tetraedro di rette doppie, queste superficie sono in numero di ∞^{13}; e poichè le ∞^3 omografie $x_i' = k_i x_i$ (dove le k_i sono costanti non nulle) mutano ciascuna di esse in altre proiettivamente identiche, tali superficie, se del tipo più generale, dipendono da $13 - 3 = 10$ moduli. Non

[5] In ciò appunto queste superficie si differenziano da quelle di genere maggiore di zero. Indicato con ρ_0 il numero degli integrali doppi di 2ª specie indipendenti, la somma $\rho_0 + \rho = \mathrm{I} + 4q + 2$, dove $q = p_g - p_a$ è l'irregolarità della superficie, si mantiene costante finchè la superficie non contiene curve eccezionali; e una specializzazione di questa si rispecchia generalmente, per le superficie di genere geometrico maggiore di zero, in una diminuzione di ρ_0 e in un corrispondente aumento di ρ. Ciò non può invece accadere nel caso presente, essendo $\rho_0 = 0$.

essendovi su di esse un insieme continuo di sistemi lineari completi di caratteri assegnati, è anche escluso che vi sia fra esse un maggior numero di superficie birazionalmente identiche. Per una superficie irriducibile i 4 coefficienti a_i sono tutti diversi da zero, e con una scelta opportuna del punto unità possono rendersi tutti eguali a uno; l'equazione scritta assume allora la forma:

$$x_1x_2x_3x_4f(x) + x_2^2x_3^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 = 0, \qquad (1)$$

e possono considerarsi come moduli i 10 coefficienti del polinomio $f(x)$.

Le ∞^{13} superficie F^6 aventi le stesse rette doppie segano su una generica fra esse un sistema lineare completo ∞^{12} di curve C_{13}^{12} (di ordine 12, genere 13) e di grado 24. Questo sistema e quello, di eguali caratteri, segato dalle superficie del 4° ordine passanti semplicemente per gli spigoli del tetraedro fondamentale sono mutuamente aggiunti.

Sulla F^6 generale esistono sempre sistemi lineari ∞^5 di genere 6 e grado 10. Esistono infatti in S_3 ∞^{10} curve ellittiche di 5° ordine appoggiate (semplicemente) a due spigoli opposti del tetraedro fondamentale e aventi per corde gli altri 4 spigoli. Ciascuna di esse impone a una F^6 obbligata a contenerla precisamente 10 condizioni: non più certamente, e neanche di meno, perchè il sistema residuo $|C_3^7|$, di ordine 7 e genere $\pi = 3$, segatovi dalle F^6 col dato tetraedro fondamentale non può avere dimensione superiore a $\pi - 1 = 2$. Nè è possibile che una F^6 contenente una delle anzidette C_1^5 ne contenga tutto un fascio, del quale non esisterebbe alcuna curva aggiunta [6]. Concludiamo pertanto che ciascuna delle F^6 aventi il detto tetraedro fondamentale contiene un numero finito non nullo di C_1^5. E il sistema lineare somma di una di queste C_1^5 e di due rette doppie della F^6 fra loro incidenti e entrambe corde della C_1^5 è di genere 6 e grado 10; conduce perciò a rappresentare la F^6 su una F^{10} di S_5, sulla quale alle 6 rette doppie di F^6 corrispondono altrettante cubiche piane. Le sezioni iperpiane di F^{10} sono curve normali non speciali; la serie canonica g_{10}^5 è segata su di esse dal sistema aggiunto, distinto da questo e composto di curve canoniche di genere 6 dello spazio S_5 [7].

[6] Tale curva dovrebbe essere composta di due parti dello stesso ordine, metà di 5; il che è ovviamente impossibile.

[7] Una F^6 generale può anche riferirsi a una F^{10} di S_5, rappresentante il sistema lineare somma di 4 fra le sue rette doppie, delle quali tre contenute in un piano. Questa F^{10} ha allora anch'essa due rette doppie, corrispondenti a due spigoli opposti del tetraedro della F^6, e sta su un fascio di quadriche.

2. Superficie F^6 particolari, dipendenti da un minor numero di moduli, possono aversi soltanto quando curve virtuali del caso generale diventino effettive; e queste saranno in ogni caso curve razionali. Non è infatti possibile altra specializzazione, se devono rimanere invariati il bigenere e il numero base ρ.

Dato nello spazio S_3 un sistema lineare ∞^3 di quadriche, Σ, privo di punti basi, le ∞^2 rette dello spazio che appartengono a un intero fascio di quadriche del sistema Σ anzichè a una quadrica sola — rette generalmente chiamate «speciali» o «principali» — formano una congruenza (7,3) cioè di ordine 7 e classe 3, avente per immagine nella quadrica delle rette M_4^2 di S_5 una superficie F^{10}, riferibile a una F^6 del tipo anzidetto [8]. Questa dipende però soltanto da 9 moduli; i sistemi Σ in S_3 sono infatti ∞^{24}, dei quali ∞^{15} proiettivamente identici. Si tratta dunque di una F^6 particolare, ma appartenente allo stesso sistema continuo considerato al n° prec. La superficie F^{10} anzidetta contiene infatti 20 cubiche piane ellittiche, a coppie mutuamente aggiunte γ_i, γ_i' ($i = 1, 2,\ldots 10$), aventi a due a due un (solo) punto comune, oppure nessuno, secondo che non sono oppure sono fra loro aggiunte; e il sistema somma di tre fra esse a due a due non aggiunte, p. es. $|\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3|$, conduce appunto a rappresentare la F^{10} su una F^6 con 6 rette doppie, immagini di quelle tre cubiche e delle loro aggiunte. Indicando con C_6^{10} le sezioni iperpiane della F^{10}, le curve residue $C_6^{10} - (\gamma_1 + \gamma_2)$ e analoghe sono quartiche ellittiche, alle quali corrispondono su F^6 curve C_1^5, come quelle considerate al n° prec.

La differenza fra le due F^6 (quella generale del n° prec. e quella più particolare testè definita), o fra le due F^{10}, è la seguente. L'attuale F^{10} (particolare) sta per la stessa sua definizione su una quadrica, non cono, che contiene per intero i piani delle sue 20 cubiche; piani che appartengono su di essa a uno stesso dei due sistemi di ∞^3 piani. Questi piani hanno perciò a due a due un (solo) punto comune, il quale tuttavia, se le due cubiche sono mutuamente aggiunte, non appartiene a queste ultime. Le somme $\gamma_i + \gamma_i'$ sono perciò tutte contenute nel sistema delle sezioni iperpiane di F^{10}, rispetto alle quali

[8] Di questa congruenza (7,3) si trova un primo cenno in G. Darboux, *Bull. Sc. Mathem.*, vol. I (1870), p. 438. Più diffusamente fu studiata da Th. Reye (*Die Geometrie der Lage*, 3ª ediz., vol. 3° (1892)). Che essa, o più precisamente la congruenza duale (3,7), sia nello spazio rigato una F^{10} regolare di genere zero e bigenere uno, fu osservato da me (*Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare, Mem. R. Accad. di Torino* (2), vol. 51 (1901), p. 1; in part. § 14).

hanno per residue quartiche razionali (effettive) δ_i, incontranti γ_i e γ_i' in tre punti ciascuna, e le altre γ in un punto. E a queste quartiche corrispondono su F^6 curve razionali, che invece nel caso generale non esistono; p. es. sulla F^6 rappresentante il sistema $|\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3|$ alle quartiche δ_i di indici $i = 4, 5, \ldots 10$ corrispondono cubiche sghembe, appoggiate semplicemente alle 6 rette doppie, le quali invece non esistono su una F^6 generale [9].

Pertanto sulla F^{10} generale, mentre già abbiamo riscontrato l'esistenza di cubiche ellittiche γ, γ' mutuamente aggiunte, le relative curve δ sono puramente virtuali; e perciò i piani di γ e γ' sono indipendenti. Ne segue altresì che questa F^{10} generale non sta su una quadrica; poichè in caso diverso i detti due piani dovrebbero appartenere, come nel precedente caso particolare, a uno stesso sistema, e perciò incontrarsi [10].

Come caso ulteriormente particolare, il sistema Σ di quadriche può contenere un fascio di coni collo stesso vertice; le ∞^2 quadriche di esso passanti per questo vertice vi hanno allora uno stesso piano tangente, e le rette passanti per tale punto e contenute in questo piano sono tutte «speciali». La superficie F^{10} o F^6 dipende allora da soli 8 moduli [11]. Il sistema Σ può anche contenere due o più fasci di coni.

[9] Invero su una F^6 contenente una cubica così fatta le altre F^6 colle stesse rette doppie e passanti per questa cubica segano curve C_6^8 di un sistema lineare ∞^5; vi sono perciò precisamente ∞^6 F_6^6, compresa la prima, passanti per tale cubica. E poichè vi sono ∞^6 cubiche sghembe appoggiate ai 6 spigoli del tetraedro fondamentale, vi saranno in tutto ∞^{12} F^6 contenenti le 6 rette doppie e una qualsiasi cubica appoggiata a queste: dunque non tutte le ∞^{13} aventi il dato tetraedro fondamentale.

[10] Sulla F^{10} generale costruita alla fine del n° prec. e non contenuta in una quadrica esistono però, in base alla costruzione indicata, almeno due coppie di cubiche mutuamente aggiunte γ_1 e γ_1', γ_2 e γ_2'. Per i piani di queste 4 cubiche, dei quali solo i due primi e i due ultimi non si incontrano, passa certo una quadrica, che incontra ulteriormente la F^{10} in una curva ellittica C_1^8. Sulla F^{10} particolare, immagine della congruenza (7,3), questa C_1^8 è spezzata in due quartiche razionali δ con due punti comuni.

[11] In questo caso la congruenza (7,3) delle rette speciali contiene un fascio di rette; perciò la superficie F^{10} di S_5 contiene una retta r, dalla quale essa si proietta in una F^6 di S_3 con 6 rette doppie, proiezioni di altrettante cubiche piane della F^{10}. Ma poichè i piani di queste cubiche sono tutti a due a due incidenti in punti non appartenenti in generale alla r, le 6 rette doppie della F^6 saranno anche a due a due incidenti, e passeranno perciò tutte per uno stesso punto; sono dunque in questo caso gli spigoli di un angolo tetraedro completo, il cui vertice è punto quadruplo di F^6.

Si ha il caso estremo, di 10 fasci di coni, quando Σ si compone delle quadriche polari dei punti dello spazio rispetto a una superficie cubica generale; la superficie F^{10} o F^6 dipende allora da soli 4 moduli, e la F^{10} contiene 10 rette, ciascuna delle quali incidente a altre tre. Le 10 quartiche razionali $\mathfrak{z}_i$ si spezzano in queste quaderne di rette, tre delle quali sempre sghembe e incidenti alla quarta [12]. L'insieme delle 10 rette è una particolare C_6^{10} canonica.

3. La superficie F^6 ha un sistema lineare ∞^3 di superficie cubiche $|F^3|$ aggiunte, le quali passano semplicemente per i 6 spigoli del tetraedro fondamentale e ne hanno i vertici come punti doppi; esse la incontrano ulteriormente nelle curve C_4^6 sghembe aggiunte alle sezioni piane [13]. Per ciascuna di queste C_4^6 passa *una* quadrica, che incontra a sua volta F^6 in un'altra C_4^6 dello stesso sistema lineare, la quale sta su una nuova F^3 aggiunta. Le due C_4^6 incontrano ciascuno spigolo del tetraedro fondamentale negli stessi due punti, nei quali i piani tangenti fissi delle due F^3 lungo tale spigolo sono pure tangenti a F^6, e hanno a comune altri 6 punti (grado del sistema $|C_4^6|$). Nel sistema lineare ∞^3 delle F^3:

$$u_1 x_2 x_3 x_4 + u_2 x_1 x_3 x_4 + u_3 x_1 x_2 x_4 + u_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

e così pure nel sistema $|C_4^6|$ nasce così una corrispondenza birazionale involutoria; e nasce pure un sistema ∞^3 (non lineare) Λ di quadriche congiungenti le coppie di C_4^6 omologhe. Due F^3 omologhe (u), (u') costituiscono insieme una particolare F^6 colle stesse 6 rette doppie della F^6 data; e il fascio determinato da queste due F^6, la cui curva base si compone delle 6 rette doppie e delle due C_4^6 segate dalle superficie (u), (u'), contiene una superficie composta della quadrica contenente

[12] Da una qualunque r delle 10 rette quest'ultima F^{10} si proietta in una F^6 del tipo indicato alla nota [11], con in più tre punti doppi isolati, immagini delle rette incidenti alla r, e 6 rette lati di un esagono semplice sghembo. Le coppie di lati opposti di quest'esagono stanno nei piani diagonali dell'angolo tetraedro suindicato, e s'incontrano nei tre punti doppi isolati. Le 10 rette r sono immagini di altrettanti fasci di rette della congruenza (7,3), contenuti nei piani dei vertici e spigoli opposti del pentaedro della superficie cubica. E la congruenza (7,3) si compone delle rette congiungenti le coppie di punti della Hessiana di questa superficie, ciascuno dei quali ha per quadrica polare un cono col vertice nell'altro.

[13] Per le F^6 di cui alle note [11] e [12] queste F^3 aggiunte sono coni cubici.

le due C_4^6 e dei 4 piani del tetraedro fondamentale. In altri termini, una conveniente combinazione lineare dell'equazione (1) e della

$$(u_1 x_2 x_3 x_4 + \dots\dots)(u_1' x_2 x_3 x_4 + \dots\dots) = 0 \tag{2}$$

deve contenere il fattore $x_1 x_2 x_3 x_4$; deve cioè essere tale che scompaiano dalla (1) i 4 ultimi termini. Disponendo opportunamente dei fattori comuni ancora arbitrari nelle u e nelle u', si può fare in modo che questa combinazione lineare sia l'equazione differenza delle (1) e (2); vale a dire che l'accennata corrispondenza involutoria entro il sistema lineare $|F^3|$ sia rappresentata dalle equazioni:

$$u_i' = \frac{1}{u_i} \text{ [14]}. \tag{3}$$

Si verifica allora facilmente, sottraendo membro a membro le equazioni (1) e (2), che l'equazione generale di una quadrica del sistema $\infty^3 \Lambda$ è la seguente:

$$u_1 u_2 u_3 u_4 f(x) - (u_i^2 + u_k^2) u_l u_m x_l x_m = 0 \tag{4}$$

dove le u sono parametri omogenei, e $i\,k$, $l\,m$ sono combinazioni binarie complementari dei 4 indici 1, 2, 3, 4: la somma s'intende estesa alle 6 combinazioni $i\,k$, oppure $l\,m$.

Rileviamo in particolare i due casi di F^3 riducibili:

a) la F^3 può spezzarsi in una faccia del tetraedro fondamentale, e un cono quadrico uscente dal vertice opposto: ad es., per $u_1 = 0$, nel piano $x_1 = 0$ e nel cono $u_2 x_3 x_4 + u_3 x_4 x_2 + u_4 x_2 x_3 = 0$. La C_4^6 è allora segata da questo cono; la quadrica del sistema Λ coincide anche con questo cono; e la C_4^6 coniugata è composta dei tre spigoli del tetraedro appartenenti a questo cono, contati due volte.

b) la F^3 può anche spezzarsi in due piani del tetraedro fondamentale, p. es. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e un terzo piano arbitrario passante per lo spigolo opposto all'intersezione dei primi due (piano $u_4 x_3 + u_3 x_4 = 0$).

[14] Nello spazio S_3 delle coordinate proiettive u_i, questa è una corrispondenza birazionale involutoria ben nota, che muta i piani in superficie cubiche passanti per i 6 spigoli del tetraedro fondamentale. Le coppie di punti omologhi sono quelle dei punti reciproci rispetto a tutte le quadriche della rete $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i^2 = 0$ con $\Sigma \lambda_i = 0$.

La relativa C_4^6 si compone dello spigolo $x_1 = x_2 = 0$ contato due volte, e della C_2^4 intersezione ulteriore col terzo piano suddetto; e per essa passano ∞^1 quadriche, composte dello stesso piano $u_4 x_3 + u_3 x_4 = 0$ e di un piano arbitrario per la retta $x_1 = x_2 = 0$. Per la corrispondenza birazionale (3) nel sistema lineare $|F^3|$ i fasci di piani aventi per assi spigoli opposti del tetraedro sono fasci fondamentali di 2ª specie, tali cioè che ogni elemento di ciascuno dei due corrisponde a tutti gli ∞^1 elementi dell'altro. Analiticamente, è il caso dei valori $u_1 = u_2 = 0$ dei parametri; l'equazione (4) è allora identica, ma tenendo conto dei soli termini infinitesimi di 1° ordine (contenenti cioè un solo fattore u_1 o u_2) e ponendo $\frac{u_2}{u_1} = k$ (in generale finito) si hanno le coppie di piani $(x_1 + kx_2)(u_4 x_3 + u_3 x_4) = 0$.

4. Il sistema ∞^3 di quadriche Λ_0 (4) contiene le 4 reti di coni *a*), e le tre ∞^2 quadratiche di coppie di piani *b*) passanti rispett. per le coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Esso appartiene a un sistema lineare ∞^6, contenente a sua volta il sistema lineare ∞^5 $|L|$ di tutte le quadriche circoscritte al tetraedro fondamentale. E le quadriche del sistema Λ contenute in $|L|$ sono precisamente quelle che segano su F^6 coppie di C_4^6 passanti pei 4 vertici del tetraedro, cioè contenute in F^3 riducibili. Le 4 reti *a*) e le tre ∞^2 quadratiche *b*) costituiscono pertanto la completa intersezione del sistema di quadriche Λ col sistema lineare $|L|$; vale a dire il sistema Λ, come sistema ∞^3 di quadriche, è una varietà di ordine 10, cioè una V_3^{10} di S_6.

D'altra parte quest'ordine è il numero delle quadriche del sistema Λ passanti per tre punti generici di F^6, ossia delle coppie di C_4^6 coniugate passanti complessivamente per questi tre punti. Per tali punti passa anzitutto *una* C_4^6 (trattandosi di curve di un sistema lineare ∞^3), la quale colla sua coniugata sta su una delle quadriche cercate. Le altre coppie si comporranno di una C_4^6 passante per due dei tre punti, e della sua coniugata vincolata a passare per il terzo punto. Per i primi due punti passa un fascio di C_4^6, le cui coniugate, in forza delle (3), costituiscono una ∞^1 cubica, di cui 3 curve passano per il terzo punto residuo; inoltre la ripartizione dei 3 punti in $2 + 1$ dà luogo a 3 casi. Si hanno pertanto in tutto $1 + 3 . 3 = 10$ soluzioni.

Questa V_3^{10}, di cui una sezione iperpiana (immagine del sistema complessivo ∞^2 di quadriche comune a Λ e $|L|$) è composta di 4 piani e tre quadriche, fu già incontrata da L. Godeaux e da me in passati lavori [15]. Le 8 superficie F^3 ottenute pei valori $u_i = \pm 1$ sono elementi uniti della corrispondenza (3), e segano su F^6 curve C_4^6 lungo ciascuna delle quali la F^6 è tangente a una quadrica del sistema Λ. Queste 8 quadriche sono elementi quadrupli del sistema Λ, il quale contiene per intero i 28 fasci determinati da esse a due a due.

5. Il sistema di quadriche Λ contiene, all'infuori delle tre ∞^2 di coppie di piani già incontrate, anche un numero finito di ulteriori coppie di piani isolate. La determinazione del numero di queste coppie presenta interesse poichè, la superficie F^6 non contenendo in generale rette, all'infuori delle rette doppie, nè coniche, sono questi precisamente i piani che l'incontrano in coppie di cubiche (e in pari tempo piani tritangenti di F^6). I due piani di una stessa coppia appartenente al sistema Λ incontrano complessivamente F^6 in 4 cubiche, ciascuna delle quali ha a comune 3 punti con una delle due dell'altro piano e forma insieme con essa una C_4^6 sghemba del sistema già considerato, e non incontra affatto la rimanente cubica di questo stesso piano, chè è la sua aggiunta. Viceversa, due cubiche piane contenute in F^6 e in piani diversi, se hanno 3 punti comuni (necessariamente sulla retta intersezione dei due piani), stanno su una stessa F^3 aggiunta; e questa coppia di piani appartiene al sistema Λ. Considerati invece due piani qualunque facenti parte di coppie isolate distinte del sistema Λ, ciascuna delle cubiche in essi contenute incontrerà entrambe le cubiche dell'altro piano, una in un solo punto, l'altra in due [16].

Il numero delle coppie di piani isolate contenute nel sistema Λ può valutarsi, anzichè sulla F^6 generale, sulla superficie più particolare

[15] L. Godeaux, *Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace, Bull. Acad. Belgique,* Classe des Sciences (5), vol. XVI (1930), p. 907. Le coppie di punti inversi sono quelle qui accennate alla fine della nota [14]. Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno, Mem. Soc. Ital. delle Scienze* (detta dei XL) (3), vol. 24 (1938); in part. n° 3.

[16] Più generalmente, due curve ellittiche irriducibili γ e δ di F^6, se non sono mutuamente aggiunte, nè una è parte dell'aggiunta dell'altra, hanno sempre qualche punto comune. Invero, in caso contrario, esse e le loro aggiunte γ' e δ' non avrebbero a due a due, nei vari modi, alcun punto comune. D'altra parte la curva $\gamma + \delta$ ad. es. avrebbe come sistema aggiunto l'intero fascio (sovrabbondante) $|\gamma + \delta'| = |\gamma' + \delta|$; e una curva di questo fascio, curva generalmente irriducibile, non può spezzarsi in due che non si incontrino (cioè senza acquistare un punto doppio).

(dipendente da un modulo di meno) riferibile alla congruenza di rette (7,3) generale, cioè alla superficie F^{10} di S_5 considerata al n° 2 (escluso l'ultimo capoverso). La superficie appartiene infatti in ambo i casi a uno stesso sistema continuo; e il sistema Λ contiene egualmente nei due casi tre ∞^2 quadratiche di coppie di piani e non altri sistemi continui di tali coppie.

Considerata una F^{10} del n° 2 e su di essa tre cubiche piane $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ a due a due non aggiunte e aventi perciò a coppie un (solo) punto comune, il sistema lineare $|\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3|$ conduce a rappresentare tale F^{10} su una F^6 le cui rette doppie corrispondono alle dette cubiche e alle loro aggiunte. Poichè alle sezioni piane di F^6 corrispondono su F^{10} curve di ordine 9, ogni qualvolta una sezione di F^6 si spezza in due cubiche le due curve corrispondenti su F^{10} saranno di ordini 3 e 6, oppure 4 e 5; e viceversa. Basterà pertanto determinare su F^{10} le curve ellittiche di ordini 3 e 4 (oppure le loro residue rispetto al sistema $|\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3|$).

Sappiamo già che la superficie F^{10} contiene 20 cubiche piane. Tolte le 6 corrispondenti alle rette doppie di F^6, ne rimangono 14, a due a due aggiunte, alle quali corrispondono su F^6 anche cubiche piane. Queste appartengono a altrettanti piani diversi costituenti, a coppie, 7 quadriche del sistema Λ; alle cubiche intersezioni ulteriori di tali piani colla F^6 corrispondono su F^{10} curve di 6° ordine.

D'altra parte una quartica ellittica (qui necessariamente sghemba) appartiene a uno spazio S_3; e su F^{10} si possono prendere in vari modi 10 cubiche piane, a due a due non aggiunte, la cui somma equivale al triplo di una sezione iperpiana [17], e incontra perciò quella quartica in $3.4 = 12$ punti. Ne segue che due di quelle 10 cubiche incontreranno questa quartica in due punti ciascuna, e costituiranno insieme con essa una sezione iperpiana; ossia la quartica è residua di una sezione iperpiana rispetto a una coppia di cubiche aventi un punto comune. Escludendo da queste cubiche le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e loro aggiunte, perchè alla curva residua corrisponde su F^6 una curva di ordine maggiore di 3; e tenendo presente che la quartica residua di due cubiche di F^{10} è anche residua delle loro aggiunte, rimangono $\frac{14.12}{2.2} = 42$ casi; quindi altre 21 coppie di piani appartenenti al sistema Λ.

[17] Cfr. il mio lavoro cit. nei *Rend. Circolo Matem. di Palermo,* vol. 29 (1910). La somma di 10 cubiche a due a due non aggiunte è sempre equivalente al triplo di una sezione iperpiana o delle curve aggiunte a questa.

Il sistema di quadriche Λ contiene, all'infuori delle tre ∞^2 *quadratiche di coppie di piani, 28 coppie di piani isolate*[18]. *Vi sono perciò 56 piani che incontrano la* F^6 *in coppie di cubiche.*

Considerata una cualunque di queste cubiche, e tolte le tre contenute nella stessa coppia di piani del sistema Λ, rimangono ancora su F^6 108 cubiche, delle quali ovviamente 54 incontreranno la prima in un solo punto, e 54 in due punti. Tre cubiche incontrantisi a due a due in un (solo) punto hanno come somma un sistema di genere 4 e grado 6, che conduce a rappresentare la superficie su una nuova F^6 con 6 rette doppie. Invece due di queste stesse cubiche sommate coll'altra contenuta nello stesso piano della terza, aventi perciò a coppie (1, 2, 2) intersezioni, hanno per somma un sistema rappresentante una F^{10} di S_5, certamente priva di rette doppie. Invero questa eventuale retta doppia dovrebbe incontrare le sezioni iperpiane della F^{10} in due punti; mentre invece queste intersezioni sono sempre almeno 3, sia che si tratti di una delle tre curve sommate, della aggiunta di una di esse, o di un'altra linea qualsiasi.

Ritenuto, in quest'ultimo caso, che il numero delle cubiche piane incontranti in un (solo) punto ciascuna delle tre che si sono sommate deve essere lo stesso sulla F^6 generale del n° 1 e su quella piú particolare (dipendente da 9 moduli) del n° 2, si può concludere che anche la F^{10} generale deve contenere 20 cubiche piane a due a due aggiunte[19]; soltanto i piani di queste cubiche mutuamente aggiunte non sono in tal caso incidenti.

[18] Mi sembra tuttavia che questo numero nulla abbia a che vedere collo stesso numero 28 incontrato in altra questione alla fine del n° 4.

[19] Il che è pure confermato dal fatto che la curva C_6^{10} di S_4 sezione iperpiana della F^{10} ha 20 trisecanti (Berzolari, *Rend. Circ. Matem. di Palermo,* vol. 9 (1895), p. 186 ; C. Segre, *Encykl. d. Mathem. Wiss.*, art. III, C. 7, n° 25, nota 345).