GINO FANO

Superficie del 4° ordine contenenti una rete di curve di genere 2

Comment. Pont. Acad. Sci., Vol. **7** (1943), p. 185–205

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1943_2>

Commentationes
Vol. VII .. N. 9

SUPERFICIE DEL 4° ORDINE CONTENENTI UNA RETE DI CURVE DI GENERE 2 (*)

GINO FANO

SVMMARIVM. — Classis transformationum birationalium, quae pertinent ad superficies quarti ordinis rete curvarum secundi generis continentes, determinatur. Haec autem classis est infinita, si curvae secundi generis sint ordinis paris nec minoris quam sex; si vero curvae sint ordinis disparis, classis tunc tantum est infinita, cum quaedam correspondens aequatio secundi gradus inter duo variabilia nullam solutionem integram patitur.

Nel 1910 F. SEVERI (1), riprendendo, come applicazione della sua teoria generale della base, lo studio, già avviato da me (2), della più generale superficie del 4° ordine F^4 contenente una sestica di genere due (e, per conseguenza, due reti di sestiche mutuamente residue rispetto alle intersezioni della F^4 con superficie del 3° ordine), ha determinato il gruppo completo, infinito, discontinuo delle trasformazioni birazionali appartenenti a questa superficie: primo esempio di un tale gruppo per una superficie non contenente un fascio di curve ellittiche, e avente per conseguenza tutti i generi eguali all'unità (3).

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi, nella Tornata del 21 febbraio 1943.

(1) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.* « Rend. Circolo Matem. di Palermo », vol. 30 (2° sem. 1910), pag. 265, § 3.

(2) *Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio.* « Rend. R. Ist. Lombardo » (2), vol. 39 (1905-1906), pag. 1071.

(3) F. ENRIQUES ha appunto dimostrato che una superficie la quale ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, ma non una serie continua di tali trasformazioni, contiene un fascio di curve ellittiche, oppure ha tutti i generi eguali all'unità (*Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* « Rend. Accad. Lincei » (5), vol. 15, 2° sem., 1906, pag. 665).

Questo risultato si estende facilmente alle F^4 contenenti una curva di genere due e di ordine pari qualsiasi $2n$ ($n \geqq 3$), e per conseguenza due reti di curve cosi fatte, mutuamente residue rispetto alle intersezioni con superficie di ordine n.

Più curioso è il caso di una F^4 condotta genericamente per una curva anche di genere due e di ordine dispari $2n+1$ ($n \geqq 2$).

Questa superficie contiene una rete di genere due, alla quale appartiene la curva precedente; ma può avvenire che questa rete sia l'unica (di genere 2) sulla superficie, e l'involuzione cui essa appartiene l'unica trasformazione birazionale della F^4; e può darsi invece che la F^4 contenga infinite reti di genere 2, e ammetta perciò un gruppo infinito discontinuo di formazioni birazionali. Il verificarsi dell'uno o dell'altro fatto dipende dall'esistenza o meno di soluzioni intere dell'equazione di Fermat-Pell (1):

$$t^2 - \{(2n+1)^2 - 8\} u^2 = -1 ;$$

questione alla quale, per quanto mi consta, non siamo attualmente in grado di dare una risposta generale, valevole per ogni n. Nel primo caso, cioè se la detta equazione ammette soluzioni intere, la F^4 contiene curve razionali prive di punti multipli; e gli ulteriori sistemi lineari di curve della F^4 di grado virtuale 2, anzichè reti di genere 2, sono sistemi riducibili, costituiti da una delle curve razionali suddette, generalmente multipla, come parte fissa (di grado negativo) e da un sistema residuo di grado e di genere superiori a 2.

Questi risultati potrebbero estendersi facilmente alle superficie di spazi a più dimensioni con curve-sezioni canoniche. Risulta così anche accertato che la classe delle superficie con infinite trasformazioni birazionali in sè e aventi tutti i generi eguali all'unità, senza contenere fasci di curve ellittiche, è alquanto più estesa di quello che finora era noto.

1. – Consideriamo la superficie di 4° ordine più generale F^4 contenente una curva γ_2^{2n} di ordine pari $2n$ ($n \geqq 3$) e genere (virtuale = ef-

(1) L'equazione comunemente chiamata di Fermat–Pell (o anche, ma erroneamente, equazione di Pell) ha come secondo membro $+1$, anzichè -1; e in tal caso ha sempre infinite soluzioni intere.

fettivo) due, priva di punti multipli; superficie dipendente da 18 moduli. La γ_2^{2n} sarà curva generica di una rete di grado 2 sulla F^4. Fra le superficie di ordine n passanti per γ_2^{2n} vi sono infiniti sistemi lineari ∞^2, entro i quali nessuna superficie contiene (se $n \geqq 4$) la F^4 come parte; questi segano su F^4 una seconda rete di curve pure di ordine $2n$ e genere e grado 2, incontranti le prime in $2(n^2-1)$ punti. Designando d'ora in poi le γ_2^{2n} con C_1 e le sezioni piane di F^4 con C_2, questa seconda rete potrà indicarsi con $|n\, C_2 - C_1|$.

Poichè la superficie del 4° ordine più generale non contiene altre curve all'infuori delle sezioni piane e dei loro multipli, la presente F^4 conterrà soltanto curve composte mediante C_1 e C_2; cioè C_1 e C_2 costituiranno su di essa una base (1). I gradi di C_1 e C_2 essendo rispett. 2 e 4, il determinante di questa base è:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2n \\ 2n & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4n^2 = -4(n^2-2) ;$$

e se questa base non fosse minima, il determinante comune Δ di ogni base minima dovrebbe essere un divisore (negativo) di D, tale che il quoziente $\frac{D}{\Delta}$ sia un quadrato perfetto (2). Questo quoziente non può essere 4; perchè in tal caso, essendo Δ del tipo $\nu_{11}\, \nu_{22} - \nu_{12}^2$ colle ν numeri interi e le prime due pari, sarebbe:

$$\nu_{11}\, \nu_{22} - \nu_{12}^2 = -(n^2-2) \quad \text{ossia:} \ \nu_{12}^2 = \nu_{11}\, \nu_{22} + n^2 - 2 ;$$

relazione assurda, poichè il primo membro diviso per 4 deve dare per resto 0 oppure 1, e il secondo membro 2 o 3. D'altra parte n^2-2 solo per valori particolari di n è divisibile per un quadrato, e anche in questi casi è facile convincersi che, se la F^4 è condotta in modo generale per la curva $\gamma_2^{2n} \equiv C_1$, le C_1, C_2 costituiscono su di essa una base minima. Invero, se così non fosse, vi sarebbe su di essa un

(1) Cfr. la Nota già citata di SEVERI, e i suoi lavori ulteriori elencati nella nota (1) a pag. 185.

(2) SEVERI F., *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*. « Mathem. Annalen », vol. 62 (1906), pag. 194; cfr. in particolare la relazione (19) a pag. 215, nella quale le $\lambda_1, \dots \lambda_\varrho$ devono intendersi tutte eguali in valore assoluto all'unità, e scambiate le D e Δ. Vedi anche: SEVERI, *Conferenze di geometria algebrica*, litogr., Roma, 1927; pag. 370.

sistema lineare $|\lambda C_1 + \mu C_2|$, che può supporsi semplice e con λ, μ interi positivi, divisibile per un intero $k > 1$, senza che λ, μ siano entrambi multipli di k. E questo, per la superficie rappresentante il sistema lineare $|\lambda C_1 + \mu C^2|$, quindi anche per la F^4 in parola, pur non implicando una diminuzione del numero dei moduli da cui esse dipendono, costituirebbe tuttavia una condizione ulteriore, non necessariamente soddisfatta (2).

Le curve C_1, C_2 *costituiscono pertanto in generale su* F^4 *una base minima.*

Il determinante D non essendo in valor assoluto un quadrato perfetto, la superficie F^4 non contiene curve ellittiche prive di punti multipli (1).

Essa non contiene nemmeno curve razionali prive di punti multipli. Tali curve sarebbero infatti di grado virtuale -2; e la loro determinazione dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione ottenuta eguagliando a -2 la forma quadratica fondamentale della superficie:

$$2\lambda^2 + 4n\lambda\mu + 4\mu^2 = -2\ ;$$

e sopprimendo il fattore comune 2:

$$\lambda^2 + 2n\lambda\mu + 2\mu^2 = -1\ . \qquad [1]$$

---

(1) La superficie rappresentante il sistema lineare $|\lambda C_1 + \mu C_2|$ sarebbe una $F^{k^2(2p-2)}$ di uno spazio $S_{k^2(p-1)+1}$ (per un certo valore di p), sulla quale il sistema delle sezioni iperpiane può essere, ma non è necessariamente, divisibile per k; come avviene ad es. se $k=2$, $p=3$ per la F^{16} di S_9 di 2ª specie considerata ai n. 6 e 9 della mia Memoria: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche* («Mem. R. Accad. d'Italia, Sc. fis. mat. e nat.», vol. 8, n. 2). Altro esempio: la F^4 contenente una γ_2^6 considerata da SEVERI nella Nota cit. contiene (n. 9) due reti di curve di genere 2 e ordine 90, mutuamente residue rispetto alle sue intersezioni con superficie di ordine 45. Una F^4 condotta *genericamente* per una γ_2^{90} non contiene sestiche di genere 2; il determinante della base costituita dalla γ_2^{90} e da una sezione piana vale $-4(45^2-2) = -8092 = -28.17^2$; e questa base è tuttavia minima. Soltanto se la F^4 contiene anche una γ_2^6, la base minima è data dalle sezioni piane γ^4 insieme con una $\gamma_2^6 = \frac{1}{17}(\gamma_2^{90} + 3\gamma^4)$, con determinante -28; e questa F^4, pur dipendendo da 18 moduli come la precedente, contiene dei sistemi lineari in più, e deve quindi considerarsi come soddisfacente a un'ulteriore condizione.

(2) SEVERI F., *loc. cit.*, n. 7. In altri termini, la F^4 non contiene fasci di curve ellittiche.

Quest'ultima equazione colla sostituzione:

$$\lambda = t - nu \, , \quad \mu = u \tag{2}$$

si trasforma nell'equazione di FERMAT-PELL:

$$t^2 - (n^2 - 2)\, u^2 = -1 \, .$$

Sviluppando $\sqrt{n^2 - 2}$ in frazione continua, nell'ipotesi $n \geqq 3$, si trova:

$$\sqrt{n^2 - 2} = n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2n-2} + \ldots \tag{3}$$

dove i 4 quozienti incompleti successivi al primo costituiscono il periodo. Poichè fra il primo quoziente incompleto $n - 1$ e quello doppio di esso, $2n - 2$, ne sono compresi altri tre, numero dispari, l'equazione proposta non ammette soluzioni intere; e non vi sono perciò sulla F^4 curve razionali prive di punti multipli.

2. – Le trasformazioni birazionali appartenenti alla superficie F^4 si rispecchiano in trasformazioni lineari in sè, a coefficienti interi, della forma quadratica fondamentale della superficie, cioè del primo membro della [1] (1); senza tuttavia che a ogni trasformazione di questo secondo gruppo debba corrisponderne, viceversa, una del primo.

Determiniamo anzitutto il gruppo delle trasformazioni lineari della forma $\lambda^2 + 2n\lambda\mu + 2\mu^2$ in sè. Il discriminante di questa, $n^2 - 2$, essendo positivo, il gruppo delle trasformazioni di modulo $+1$ è infinito e ciclico; composto cioè delle potenze positive e negative di

(1) SEVERI F., *loc. cit.*, n. 6.

(2) KLEIN-FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (Leipzig, 1890-1892); vol. I, pag. 256; vol. II, pag. 163. F. KLEIN, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, lez. litog., 1895-1896 (ristampa 1907, pag. 136).

Quest'ultima equazione colla sostituzione:

$$\lambda = t - n u \,, \quad \mu = u \tag{2}$$

si trasforma nell'equazione di FERMAT-PELL:

$$t^2 - (n^2 - 2)\, u^2 = -1 \,.$$

Sviluppando $\sqrt{n^2 - 2}$ in frazione continua, nell'ipotesi $n \geqq 3$, si trova:

$$\sqrt{n^2 - 2} = n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{2}{n - 2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2n - 2} + \dots \tag{3}$$

dove i 4 quozienti incompleti successivi al primo costituiscono il periodo. Poichè fra il primo quoziente incompleto $n - 1$ e quello doppio di esso, $2n - 2$, ne sono compresi altri tre, numero dispari, l'equazione proposta non ammette soluzioni intere; e non vi sono perciò sulla F^4 curve razionali prive di punti multipli.

2. – Le trasformazioni birazionali appartenenti alla superficie F^4 si rispecchiano in trasformazioni lineari in sè, a coefficienti interi, della forma quadratica fondamentale della superficie, cioè del primo membro della [1] (1); senza tuttavia che a ogni trasformazione di questo secondo gruppo debba corrisponderne, viceversa, una del primo.

Determiniamo anzitutto il gruppo delle trasformazioni lineari della forma $\lambda^2 + 2n\lambda\mu + 2\mu^2$ in sè. Il discriminante di questa, $n^2 - 2$, essendo positivo, il gruppo delle trasformazioni di modulo $+1$ è infinito e ciclico; composto cioè delle potenze positive e negative di

(1) SEVERI F., *loc. cit.*, n. 6.

(2) KLEIN-FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (Leipzig, 1890-1892); vol. I, pag. 256; vol. II, pag. 163. F. KLEIN, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, lez. litog., 1895-1896 (ristampa 1907, pag. 136).

un'unica operazione (2). Queste trasformazioni, con notazione abituale, possono tutte designarsi col simbolo:

$$\begin{pmatrix} t-nu & -2u \\ u & t+nu \end{pmatrix}$$

dove t, u è una soluzione intera dell'equazione di FERMAT-PELL:

$$t^2-(n^2-2)\,u^2=1 \tag{4}$$

e t può supporsi positivo, u positivo, negativo o nullo. Alla soluzione $t=1$, $u=0$ corrisponde la trasformazione identica.

La più piccola soluzione intera positiva della [4] si ha formando le successive ridotte della frazione continua [3] fino al quoziente incompleto precedente il $2n-2$, cioè:

$$\frac{n-1}{1};\ \frac{n}{1};\ \frac{n^2-n-1}{n-1};\ \frac{n^2-1}{n},$$

e ponendo t, u eguali rispettivamente ai due termini di quest'ultima frazione:

$$t_1=n^2-1\,,\quad u_1=n\,.$$

Ogni altra soluzione intera t_k, u_k è data dalla formola di LAGRANGE(1):

$$t_k+u_k\sqrt{n^2-2}=(t_1+u_1\sqrt{n^2-2}\,)^k$$

eguagliando fra loro i termini e somme di termini che non contengono o rispettivamente contengono il radicale. E il gruppo ciclico in parola è composto pertanto delle potenze della sostituzione ottenuta per $k=1$, cioè:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} t_1-nu_1 & -2u_1 \\ u_1 & t_1+nu_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2n \\ n & 2n^2-1 \end{pmatrix}$$

---

(1) *Solution d'un problème d'arithmétique*, «Miscell. Taurinensia», t. IV (1766-1769); Oeuvres, vol. 1 (Paris, Gauthier-Villars, 1867), pag. 671; n. 15. Vedi anche: *Additions aux Eléments d'algèbre de Euler* (1798); Oeuvres, vol. 7 (1877), pag. 5, n. 75.

D'altra parte l'involuzione $\mathbf{I}_0$ sulla F^4 a cui appartiene la rete $|C_1|$ si rispecchia in una trasformazione lineare della forma [1] anche involutoria; perciò non potenza della $\mathbf{T}$, e di modulo -1. Sulle curve della F^4 essa opera secondo equazioni:

$$C'_1 = C_1 \,, \quad C'_2 = a C_1 - C_2$$

dove a è un coefficiente positivo, tale che C'_2 risulti di grado 4. Si trova così $a = 2n$; quindi:

$$C'_1 = C_1 \,, \quad C'_2 = 2n\, C_1 - C_2 \,.$$

Alla $\mathbf{I}_0$ corrisponde perciò la trasformazione lineare della forma [1]:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

e tutte le trasformazioni lineari di modulo -1 della forma [1] in sè si otterranno moltiplicando la $\mathbf{S}$ per le singole potenze di $\mathbf{T}$. Nel gruppo totale $\mathbf{G}$ della [1] il gruppo $\mathbf{G}_0$ delle potenze di $\mathbf{T}$ sarà un sottogruppo invariante.

3. – Determiniamo ora tutte le curve di grado virtuale 2, e quindi di genere virtuale 2 esistenti sulla F^4; avremo così – mancando curve razionali che possano esserne parti fisse – le reti di genere e grado 2 che danno luogo a involuzioni sulla F^4. Dobbiamo risolvere in numeri interi λ, μ l'equazione:

$$2\lambda^2 + 4n\lambda\mu + 4\mu^2 = 2$$

ovvero:

$$\lambda^2 + 2n\lambda\mu + 2\mu^2 = 1;$$

la quale ultima colla trasformazione [2] si muta nella [4]. Troviamo così le infinite reti:

$$[k] = |(t_k - n u_k)\, C_1 + u_k\, C_2|$$

dove t_k, u_k è una qualsiasi soluzione intera della [4]. Essendo C_1, C_2 di ordini rispettivamente $2n$ e 4, queste curve saranno effettive quando sia:

$$2n\,(t_k - n u_k) + 4 u_k > 0$$

ossia:

$$t_k - \frac{n^2-2}{n}\,u_k > 0\,. \tag{5}$$

Poichè ovviamente $\dfrac{n^2-2}{n} < \sqrt{n^2-2}$, e d'altra parte in forza della [4] è $|t_k| > \sqrt{n^2-2}\,.\,|u_k|$, sarà a fortiori $|t_k| > \dfrac{n^2-2}{n}\,.\,|u_k|$; perciò nella [5] il termine t_k, prevalente in valor assoluto, deve essere positivo, mentre u_k può essere sia positivo che negativo; e le reti $[k]$ e $[-k]$ corrispondono a valori opposti di u. Per $t_0 = 1$, $u_0 = 0$ si ha la rete $[0] \equiv [C_1]$.

La superficie F^4 *contiene pertanto infinite reti di grado e genere* 2, *le quali sono tutte date da*

$$[k] = |(t_k - n u_k)\, C_1 + u_k\, C_2|$$

dove $t_k > 0$ *e* u_k *sono soluzioni intere della* [4].

In particolare:

$$[0] = |C_1|;\ [1] = |-C_1 + n C_2|;\ [2] = |-(2n^2-1)\, C_1 + 2n\,(n^2-1)\, C_2|;\ \ldots$$

$$[-1] = |(2n^2-1)\, C_1 - n C_2|;\ [-2] = |(4n^4-6n^2+1)\, C_1 - 2n\,(n^2-1)\, C_2|;\ \ldots$$

L'involuzione $\mathbf{I}_k$ *a cui appartiene la rete* $[k]$ *scambia fra loro le reti* $[k+i]$ *e* $[k-i]$ *di indici simmetrici rispetto a* k. Essa si rispecchia infatti in una trasformazione lineare involutoria della forma primo membro della [1], e quindi anche della $t^2 - (n^2-2)\, u^2$; perciò in una omografia involutoria del piano (t, u), che muta in sè il reticolato dei punti di coordinate intere, in particolare l'origine, il punto (t_k, u_k), e l'iperbole $t^2 - (n^2-2)\, u^2 = 1$. Si tratta dunque della simmetria obliqua rispetto al diametro $\frac{t}{t_k} = \frac{u}{u_k}$ di quest'iperbole, secondo la direzione del diametro coniugato a questo. E scambiare le reti $[k+i]$ e $[k-i]$ vuol dire scambiare i due punti $(t_k t_i \pm u_k u_i (n^2-2),\ u_k t_i \pm u_i t_k)$, il cui punto medio $(t_k t_i,\ u_k t_i)$ appartiene precisamente al detto primo diametro (¹).

Il prodotto di due involuzioni $\mathbf{I}_k$ e $\mathbf{I}_{k'}$, muta perciò la rete $[i]$ successivamente in $[2k-i]$ e $[2(k'-k)+i]$; aumenta dunque o diminuisce l'indice i di un numero *pari* di unità, che può risultare affatto qualunque. *Sono perciò birazionalmente equivalenti su* F^4 *tutte le reti* $[k]$ *di indici pari, e così fra loro tutte quelle di indici dispari* (²). Non sono invece equivalenti due reti con indici k di parità diversa.

Si verifica facilmente *che le reti* $[k+1]$ *e* $[-k]$ *sono composte di curve dello stesso ordine, e sono mutuamente residue rispetto alle intersezioni della* F^4 *con superficie di ordine* $n t_k + (n^2-2) u_k$.

4. – Abbiamo già indicata alla fine del n° 2 la trasformazione lineare $\mathbf{S}$ della forma [1] che corrisponde all'involuzione $\mathbf{I}_0$ determinata dalla rete $|C_1| \equiv [0]$. All'involuzione determinata dalla rete [1] corrisponde la trasformazione:

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} -(2n^2-1) & -2n \\ 2n(n^2-1) & 2n^2-1 \end{pmatrix}$$

Invero i due coefficienti di sinistra risultano del fatto che quest'involuzione scambia le reti $|C_1| = [0]$ e $[2]$; di più, trattandosi di involuzione, i due elementi della diagonale principale sono opposti; dopo

(¹) L'involuzione $\mathbf{I}_k$, scambiando le reti $[k+i]$ e $[k-i]$, trasforma in sè il sistema lineare loro somma, che si riconosce facilmente essere $|2t_i(t_k - nu_k) C_1 + 2t_i u_k C_2|$; e quindi, per ogni valore di i, un multiplo delle rete $[k]$.

(²) Le reti $[k]$ con indici di una stessa parità hanno perciò anche curve di punti uniti birazionalmente equivalenti, e conducono ad altrettante diverse rappresentazioni di F^4 su uno stesso piano doppio colla stessa C^6 di diramazione. Due qualunque di queste reti, per es. $[k-i]$ e $[k+i]$, devono perciò essere mutate l'una nell'altra da due diverse corrispondenze birazionali su F^4; una è l'involuzione $\mathbf{I}_k$, che le scambia; l'altra, non involutoria, è la $\mathbf{T}^{2i}$ o risp. $\mathbf{T}^{-2i}$ (cfr. n. 4), che aumenta o diminuisce l'indice k di ogni rete di $2i$ unità.

di che l'ulteriore coefficiente $-2n$ risulta determinato dal fatto che il determinante della sostituzione deve essere eguale a -1. Ne segue:

$$S'S = \begin{pmatrix} -(2n^2-1) & -4n(n^2-1) \\ 2n(n^2-1) & 4n^4-6n^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 - nu_2 & -2u_2 \\ u_2 & t_2+nu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^2$$

Come prodotti delle involuzioni **S**, **S'**, anche ripetute, e che ovviamente, come fattori, basta alternare, si ottengono dunque tutte le potenze pari di **T**, le quali corrisponderanno pertanto a effettive trasformazioni birazionali di F^4. Invece alla **T**, e perciò anche alle sue potenze dispari, non corrispondono trasformazioni birazionali di F^4.

Invero l'eventuale trasformazione corrispondente alla **T** dovrebbe operare sulle curve di F^4 secondo le equazioni:

$$C'_1 = -C_1 + nC_2$$

$$C'_2 = -2nC_1 + (2n^2-1)\,C_2\ ;$$

e dovrebbe quindi mutare ogni rete $[k]$ nella $[k+1]$. Il prodotto delle trasformazioni **S** e **T**, in quest'ordine, dovrebbe perciò scambiare le reti [0] e [1], e lasciare invariato il sistema lineare loro somma $|nC_2|$; quindi anche il sistema $|C_2|$; sarebbe cioè un'omografia involutoria. Ora una superficie del 4° ordine trasformata in sè da un'omografia involutoria dipende al più da 12 moduli [1]; mentre la F^4 qui considerata dipende da 18 moduli.

La F^4 non può ammettere altre trasformazioni birazionali, oltre quelle già incontrate. Queste trasformazioni lineari devono infatti rispecchiarsi in trasformazioni lineari della forma quadratica [1], di modulo ± 1. Quelle di modulo $+1$ sono le potenze di **T**, fra le quali le sole potenze pari sono immagini di trasformazioni birazionali di F^4. Quelle di modulo -1 sono i prodotti di una arbitraria fra esse, per esempio della **S**, per le precedenti. E il prodotto di **S** per $\mathbf{T}^{2k}$, in quest'ordine, è appunto l'involuzione definita dalla rete $[k]$.

---

(1) SEVERI F., *loc. cit.*, n. 12, *b*. Questo numero massimo di moduli è 12 e non 11, perchè nell'equazione cartesiana di una superficie F^4 i termini di grado dispari in z, che devono mancare se $z=0$ è piano di simmetria, sono 13 (10 con z a primo grado, e 3 contenenti z^3) e non 14: lieve rettifica, senza alcun riflesso sull'applicazione di questa proprietà che è fatta sia *loc. cit.* che qui.

Concludiamo pertanto: *Il gruppo infinito discontinuo di tutte le trasformazioni birazionali della superficie* F^4 *si compone:*

1) *del gruppo ciclico infinito (sottogruppo invariante del gruppo totale) delle potenze positive e negative delle trasformazione di immagine* $\mathbf{T}^2$*;*

2) *delle involuzioni determinate dalle infinite reti di genere 2 esistenti su* F^4.

Operazioni generatrici di questo gruppo sono $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}^2$, o anche $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}' = \mathbf{T}^2\mathbf{S}$.

5. – Abbiamo finora considerate le F^4 contenenti una rete di curve di genere 2 e di ordine pari $2n$, con $n \geqq 3$. Per $n=2$, la F^4, contenendo una rete di quartiche di genere 2, necessariamente piane, ha un punto doppio P; e le quartiche suddette sono segate dai piani passanti per questo punto. Una base sulla superficie è costituita dalle quartiche C_1 di genere 2 e dalle sezioni piane generiche C_2; la differenza $C_2 - C_1$, di grado -2, è l'intorno infinitesimo del punto doppio P. La forma quadratica fondamentale relativa a questa base è:

$$2\lambda^2 + 8\lambda\mu + 4\mu^2$$

col determinante $D = -8$; e la base assunta è minima. La determinazione su F^4 delle curve razionali prive di punti multipli, di grado -2, e delle reti di genere 2 e di grado 2 dipende perciò della risoluzione in numeri interi delle equazioni:

$$2\lambda^2 + 8\lambda\mu + 4\mu^2 = \mp 2$$

ovvero:

$$\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2 = \mp 1 .$$

Quest'ultima, colla sostituzione:

$$\lambda = t - 2u , \ \mu = u$$

si muta nell'equazione di Fermat-Pell:

$$t^2 - 2u^2 = \mp 1 . \qquad [1]$$

Le curve razionali e le reti di genere 2 cercate sono dunque date da:

$$[2] \qquad |(t-2u)\,C_1 + u\,C_2|$$

dove t, u sono soluzioni intere dell'equazione [1]. Sviluppando $\sqrt{2}$ in frazione continua, si ha:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{2\,+}\,\frac{1}{2\,+\ldots}\,;$$

e le successive ridotte:

$$\frac{1}{1}\,;\ \frac{3}{2}\,;\ \frac{7}{5}\,;\ \frac{17}{12}\,;\ \frac{41}{29}\,;\ \frac{99}{70}\,;\ldots$$

danno coi loro termini tutte le soluzioni intere positive della [1], alternativamente coi segni $-$ e $+$. Per $t=u=1$ si ha l'intorno C_2-C_1 del punto doppio; mentre la rete $|C_1|$ si ha per $t=1, u=0$. D'altra parte la curva [2] è di ordine $4(t-u)$; quest'ordine per una curva effettiva, non infinitesima, deve essere >0; e per tutte le soluzioni della [1] di modulo >1 è $|t|>|u|$. Dovrà perciò assumersi t positivo, mentre u potrà essere sia positivo che negativo. Inoltre:

$$(t-2u)\,C_1 + u\,C_2 = (t-u)\,C_2 + (2u-t)\,(C_2-C_1)$$

dove, per u positivo, i due coefficienti a 2° membro sono anche positivi. In questo caso le curve [2] risultano tutte dalla somma di un multiplo (positivo) delle sezioni piane e dell'intorno del punto doppio P, contato un certo numero anche positivo di volte. Poichè le sezioni piane generiche non passano per P, si tratta sempre di curve riducibili di grado virtuale bensì ∓ 2, ma non di effettive curve razionali o di reti di genere 2.

Quanto al caso di u negativo, basta osservare che la proiezione doppia della F^4 dal punto doppio P, ossia l'involuzione cui appartiene la rete $|C_1|$, determina sulle curve di F^4 la trasformazione:

$$C'_1 = C_1,\ \ C'_2 = 3\,C_2 - 4\,P = 4\,C_1 - C_2\ ;$$

e perciò scambia le curve [2] ottenute per valori opposti di u. Si giunge quindi, per u negativo, a analogo risultato, sostituendo alle sezioni piane il sistema $|C'_2|$, e all'intorno di P la curva $3C_1 - C_2 = 2C_2 - 3P$, intersezione di F^4 col cono quadrico ad essa tangente in P.

Non contenendo la F^4 altre reti di genere 2 all'infuori della $|C_1|$, sulla superficie generale del 4° ordine con punto doppio la proiezione doppia da questo punto è l'unica trasformazione birazionale.

6. – Consideriamo ora una superficie di 4° ordine F^4 contenente una rete di curve di genere 2 e di ordine dispari; e cominciamo dal caso più semplice, di una rete di curve di 5° ordine. Per queste curve passano altrettante quadriche, incontranti ulteriormente F^4 secondo una stessa cubica sghemba γ^3. Sulla F^4 una base è costituita dalle quintiche suddette C_1 e dalle sezioni piane C_2; e $\gamma^3 = 2C_2 - C_1$. L'involuzione **I** a cui appartiene la rete $|C_1|$ è segata su F^4 dalle corde della cubica γ^3; essa opera sulle curve di F^4 secondo le equazioni:

$$C'_1 = C_1 \,; \quad C'_2 = 5C_1 - C_2 \,.$$

La forma fondamentale relativa alla base (C_1, C_2) è:

$$2\lambda^2 + 10\lambda\mu + 4\mu^2$$

di discriminamente $D = 17$; la base è perciò minima. La determinazione delle curve razionali prive di punti multipli e delle eventuali ulteriori reti di genere 2 dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione (sopprimendovi il fattore 2):

$$\lambda^2 + 5\lambda\mu + 2\mu^2 = \mp 1 \;;$$

la quale colla sostituzione:

$$\lambda = t - 5u \,, \quad \mu = 2u$$

si muta nell'equazione di Fermat-Pell:

[1] $$t^2 - 17u^2 = \mp 1 \,.$$

Si ha poi:

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{8+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{8+}\cdots$$

colle successive ridotte:

$$\frac{4}{1};\ \frac{33}{8};\ \frac{268}{65};\ \frac{2177}{528};\ \ldots$$

i cui termini danno, alternativamente, le soluzioni intere positive dell'equazione [1], coll'uno o l'altro segno al 2° membro. Pertanto le curve razionali prive di punti multipli e le reti di genere 2 contenute in F^4 sarebbero date da:

$$[2] \qquad |(t-5u)\,C_1 + 2u\,C_2|$$

dove t, u sono soluzioni intere della [1], inclusa la soluzione $t=1$, $u=0$ che conduce alla rete $|C_1|$.

Queste curve sono di ordine $5(t-5u)+4\cdot 2u = 5t-17u$. Esclusa la soluzione $t=1, u=0$, è sempre $4|u| \leqq |t| < 5|u|$; perciò a fortiori $5|t| > 17|u|$. Nell'ordine $5t-17u$, che per una curva effettiva deve essere positivo, il termine $5t$, di maggior valore assoluto, deve essere anche positivo; perciò t positivo, mentre u potrà ricevere sia l'uno che l'altro segno. L'involuzione **I** scambia le curve [2] ottenute per uno stesso valore di t e valori opposti di u.

Le intersezioni delle linee [2] colla cubica γ^3 sono in numero di $8(t-5u)+6u = 8t-34u$. Ora $\frac{34}{8}$ è un numero già superiore alla seconda ridotta di $\sqrt{17}$, la quale a sua volta è $> \sqrt{17}$; perciò $\frac{34}{8}$ è maggiore di tutte le ridotte $\frac{t}{u}$ di $\sqrt{17}$, dalla seconda in poi, e è quindi negativa la differenza $\frac{t}{u} - \frac{34}{8}$, nonchè il suo numeratore $8t-34u$; questo anche per $t=4$, $u=1$. Le linee [2], per $u>0$, incontrano dunque la cubica γ^3 in un numero di punti negativo; il che, per curve effettive, non può verificarsi se non quando tali curve contengano come parte la γ^3 stessa, che è appunto di grado negativo, una o più volte. Le [2] non sono dunque, per $u>0$, curve razionali irriducibili, nè reti di genere 2; bensì sistemi riducibili, composti della cubica razionale γ^3 generalmente multipla, parte fissa, e di un sistema residuo di genere e grado più elevati. Così per esempio per $t=33$, $u=8$ si ha il sistema $|16\,C_2-7\,C_1|=|C_1+8\gamma^3|=|(C_1+4\gamma^3)+4\gamma^3|$; il sistema lineare $|C_1+4\gamma^3|$ è di genere 18 e grado 34, e ha γ^3 come curva fondamentale; il sistema $|16\,C_2-7\,C_1|$ è somma del precedente e della cubica γ^3 contata 4 volte, parte fissa.

Pei valori negativi di u si ha un risultato analogo, sostituendo alla cubica γ^3 la curva (di ordine 37) sua coniugata nell'involuzione **I**.

Una superficie del 4° ordine condotta genericamente per una quintica di genere 2 non ammette altre trasformazioni birazionali all'infuori dell'involuzione cui appartiene la rete che contiene questa quintica.

7. – Cercando di estendere le considerazioni del numero precedente a una superficie del 4° ordine F^4 condotta genericamente per una curva di genere 2 e di ordine dispari qualunque $2n+1$ ($n\geq 3$), si perviene, secondo il valore di n, alla stessa conclusione o anche a conclusione opposta.

Per la curva γ_2^{2n+1} passano certo superficie di ordine $n+1$ non contenenti la F^4 come parte; esse incontrano ulteriormente F^4 secondo curve di ordine $2n+3$ e genere $n+3$, formanti un sistema lineare di dimensione anche $n+3$. Sulla F^4 la $\gamma_2^{2n+1}\equiv C_1$ e le sezioni piane C_2 costituiscono una base, in generale anche minima; l'involuzione **I** cui appartiene la rete $|C_1|$ opera sulle curve di F^4 secondo la trasformazione:

$$C'_1=C_1\,;\quad C'_2=(2n+1)\,C_1-C_2\,.$$

La forma quadratica fondamentale relativa alla base (C_1, C_2) è:

$$2\lambda^2+2(2n+1)\lambda\mu+4\mu^2$$

e ha il discriminante $D=(2n+1)^2-8$. La determinazione delle eventuali curve razionali prive di punti multipli e delle ulteriori reti di genere 2 dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione (sopprimendovi il fattore 2):

$$\lambda^2+(2n+1)\lambda\mu+2\mu^2=\mp 1\;;$$

la quale colla sostituzione:

$$\lambda = t - (2n+1)u \ , \ \mu = 2u$$

si muta nell'equazione di FERMAT-PELL:

$$[1] \qquad t^2 - Du^2 = \mp 1 \ (^1) \, .$$

Le eventuali curve razionali e reti cercate saranno pertanto del tipo:

$$[2] \qquad \left| \{ t - (2n+1)u \} C_1 + 2u C_2 \right| \, .$$

L'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ può avere o anche non avere soluzioni intere, secondo il valore di n e il conseguente sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua, che, a differenza del $\sqrt{n^2-2}$ al n. 1, non è suscettibile di una forma valida per ogni n.

Se essa *non* ha soluzioni intere (²), la F^4 non contiene curve razionali prive di punti multipli, nè fasci di curve ellittiche (poichè D certo non è quadrato perfetto). In tal caso le soluzioni intere, certo esistenti e in numero infinito, dell'equazione $t^2 - Du^2 = +1$ conducono a effettive reti di genere 2, appartenenti a altrettante involuzioni su F^4; e perciò questa superficie ammette infinite trasformazioni birazionali.

Supponiamo invece che anche l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ abbia una e quindi infinite soluzioni intere. Si riconosce facilmente, come al numero precedente, che per avere curve effettive del tipo [2] occorre assumere t positivo, mentre u può essere positivo o negativo. Riferiamoci pel momento a valori anche positivi di u. Sia t_0, u_0 la più

(¹) Valori interi di λ, μ si avrebbero anche per valori di t, u entrambi fratti, di denominatore 2, e numeratori dispari t', u' soddisfacenti all'equazione $t'^2 - Du'^2 = \mp 4$. Ma poichè il quadrato di un numero dispari è sempre $\equiv 1 \pmod{8}$ (invero $(2n+1)^2 = 4n(n+1)+1$), e nel caso presente è pure $D \equiv 1 \pmod{8}$, la differenza $t'^2 - Du'^2$ è multipla di 8, e non mai eguale à ∓ 4. Non sono dunque possibili soluzioni del tipo suindicato; e quest'osservazione vale anche per il prec. n. 6. La conclusione sarebbe invece diversa se fosse $D \equiv 5 \pmod{8}$. Cfr. la *Encycl. des Sc. Mathém. pures et appliquées* (ediz. francese), tome I, vol. III (Théorie des nombres), pag. 113 (art. VAHLEN-CAHEN).

(²) Il valore minimo di n per cui ciò avviene è $n = 6$; è allora $D = 161 = 7.23$.

piccola soluzione intera positiva dell'equazione anzidetta, la quale condurrà a un'effettiva curva razionale $\delta = \{t_0 - (2n+1)u_0\} C_1 + 2u_0 C_2$; e t, u sia una soluzione positiva qualunque dell'equazione $t^2 - Du^2 = +1$. Saranno $\frac{t_0}{u_0}, \frac{t}{u}$ entrambe ridotte della frazione continua sviluppo di $\sqrt{D}$; la prima di posto dispari, perciò $= \sqrt{D} - \varepsilon_0$; la seconda di posto pari, perciò $= \sqrt{D} + \varepsilon$, con $\varepsilon_0, \varepsilon$ entrambi positivi e $\varepsilon < \varepsilon_0$. Segue $\frac{t_0}{u_0} \cdot \frac{t}{u} = D - (\varepsilon_0 - \varepsilon)\sqrt{D} - \varepsilon_0 \varepsilon < D$; quindi $t_0 t - D u_0 u$ numero intero negativo. D'altra parte le intersezioni di una curva [2] colla curva razionale δ sono in numero di

$$2\{t_0 - (2n+1)u_0\}\{t - (2n+1)u\} + 16u_0 u +$$
$$+ (2n+1)\{2u_0[t - (2n+1)u] + 2u[t_0 - (2n+1)u_0]\};$$

numero che si riduce a $2(t_0 t - D u_0 u)$, ed è quindi negativo. Perciò i sistemi [2] di grado virtuale (o numerico) 2 contengono tutti la curva razionale δ come parte fissa un certo numero di volte; e non sono effettive reti di genere 2.

Indicando ora con t, u una soluzione positiva qualsiasi di $t^2 - Du^2 = -1$ distinta da t_0, u_0, sarà $\frac{t_0}{u_0} < \sqrt{D}$, $\frac{t}{u} < \sqrt{D}$; quindi di nuovo $t_0 t - D u_0 u$ negativo; sicchè anche queste soluzioni conducono a sistemi di curve [2] dello stesso tipo dei precedenti.

Infine le curve e sistemi [2] corrispondenti a valori negativi di u sono trasformati dall'involuzione **I** nelle curve e sistemi corrispondenti alla stessa t e al valore opposto di u; sono dunque dello stesso tipo dei precedenti, scambiata la curva δ con quella che le corrisponde nella **I**.

Concludendo: *Se l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ ha soluzioni intere, la superficie F^4 ha in generale come unica trasformazione birazionale l'involuzione **I** cui appartiene la rete $|C_1|$; e contiene due (sole) curve razionali prive di punti multipli, che si corrispondono in questa involuzione.*

In caso diverso, la F^4 non contiene curve razionali prive di punti multipli, e ammette infinite trasformazioni birazionali.

8. – Non esiste però, per quanto mi consta, un criterio generale, valido per ogni caso e di applicazione semplice, in base al quale si possa stabilire per quali valori di D, o rispett. di n, l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ ha o non ha soluzioni intere (¹).

Lo sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua permette di rispondere in modo preciso alla questione, ma solo caso per caso, e con operazioni che possono essere lunghe. Si trova una frazione continua periodica del tipo:

$$\sqrt{D} = p_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{2p_0} + \frac{1}{q_1} + \ldots$$

Il periodo è costituito dai quozienti incompleti compresi fra il primo q_1 e il $2p_0$ (questi inclusi); e, entro il periodo stesso, i quozienti che precedono $2p_0$, cioè i q, si ripetono, dopo la metà, in ordine inverso. Secondo che le q sono in numero pari o dispari – non hanno cioè, oppure hanno termine medio – l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ ha o non ha soluzioni intere (²); e la ridotta corrispondente al quoziente incompleto che precede il $2p_0$ (cioè al secondo q_1, se vi sono almeno due q) fornisce coi suoi termini la più piccola soluzione intera positiva dell'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ o risp. $+1$, dalla quale colla formula di LAGRANGE

(¹) PERRON O., (*Die Lehre von den Kettenbrüchen*; Leipzig-Berlin, 1913; pag. 106) dice appunto che non è noto un criterio così fatto, senza ricorrere allo sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua; nè mi risulta che più recentemente ne sia stato dato alcuno. Non ne ho trovata indicazione nemmeno nei tre volumi di L. E. DICKSON, *History of the theory of numers* (Washington, 1919-1923), dove il Cap. XII del vol. II è appunto dedicato all'equazione di FERMAT-PELL. I valori di D pei quali l'equazione in parola ammette soluzioni intere sono però «relativamente rari» (PERRON, *loc. cit.*). DEGEN (*Canon Pellianus*, Kopenhagen 1817), LEGENDRE (*Théorie des nombres*, 3ème edit., 1830), SEELING («Archiv. Math. Phys.», vol. 52, 1871) hanno date tabelle contenenti, per valori di D fino a un certo massimo (SEELING, fino a $D = 7000$), la più piccola soluzione positiva dell'equazione $t^2 - Du^2 = +1$, e, quando ve ne siano, anche di $t^2 - Du^2 = -1$. La questione di un criterio generale circa l'esistenza o meno di soluzioni intere di quest'ultima equazione è stata proposta nell'«Intermédiaire des mathématiciens» (vol. 10, 1903, pag. 102), e ha dato luogo a risposte e repliche, fino al vol. 13 (1906); ma senza conclusione definita.

(²) Proprietà dovuta a LAGRANGE, *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré*. «Mém. Acad. Berlin», t. 23 (1769), n. 48; Oeuvres, vol. 2 (1868), pag. 377. Più dettagliatamente in LEGENDRE, *Op. cit.*, vol. I, § 7.

(cfr. n. 2) si ricavano tutte le altre; nel primo caso anzi tutte quelle di entrambe le equazioni.

Se l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ ha soluzioni intere, e pertanto le q sono in numero pari $(q_1, q_2, \dots q_h, q_h, \dots q_2, q_1)$, D è somma di due quadrati; e se il *quoziente completo* corrispondente al secondo q_h è $\frac{\sqrt{D}+A}{B}$, è $D = A^2 + B^2$ (¹). Per esempio per $n=3$, $D=41$ si ha:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \dots ;$$

e posto $\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$, è $x = \frac{\sqrt{41}+4}{5}$, e $41 = 4^2 + 5^2$.

Perchè l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ *abbia soluzioni, è dunque necessario che* D *sia somma di due quadrati*; e anzi *che sia la somma dei quadrati di due numeri primi tra loro* (²). Ma queste condizioni non sono sufficienti; se D è somma di due quadrati, l'equazione in parola può avere, e anche non avere soluzioni.

Affinchè D sia somma di due quadrati è sufficiente che esso sia numero primo e (come nel caso precedente) $\equiv 1 \pmod{4}$, ovvero potenza, escluso il quadrato, di un numero così fatto (³). Inoltre, sempre perchè D sia somma di due quadrati, è necessario e sufficiente che gli eventuali suoi fattori primi $\equiv 3 \pmod{4}$ vi entrino tutti a potenza pari (⁴).

I valori più piccoli di n pei quali ho verificato che l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ $(D = \{2n+1\}^2 - 8)$ non ha soluzioni intere, e perciò la F^4

(¹) LEGENDRE, *Op. cit.*, vol. I, pag. 71. Le indicazioni contenute a questo riguardo nell'Enciclopedia Matematica sono in parte poco chiare, in parte inesatte. È frase poco precisa quella dell'Edizione tedesca (vol. I_2, pag. 669, art. BACHMANN), che lo sviluppo di $\sqrt{D}$ « fino al primo q_h » dia la scomposizione di D nella somma di due quadrati; erronea l'affermazione dell'edizione francese (tome I, vol. 3, pag. 368-369; art. BACHMANN–HADAMARD–MALLET) che, se $\frac{x}{y}$ è la ridotta corrispondente al primo q_h, sia $D = x^2 + y^2$.

(²) PERRON, *loc. cit.*, pag. 106 (Cap. III, teor. 19).

(³) PERRON, *loc. cit.*, pag. 108 (Cap. III, teor. 22).

(⁴) HARDY–WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers* (Oxford, 1938), pag. 297, teor. 366.

contenente una γ_2^{2n+1} ammette infinite trasformazioni birazionali, sono i seguenti:

$n = 6$, $D = 161 = 7.23$ (non somma di due quadrati).
$n = 7$, $D = 217 = 7.31$ (idem).
$n = 13$, $D = 721 = 7.103$ (idem).
$n = 14$, $D = 833 = 7^2.17 = 7^2 + 28^2$ (quadrati di numeri non primi fra loro).
$n = 16$, $D = 1081 = 23.47$ (non somma di due quadrati).
$n = 19$, $D = 1513 = 17.89 = 27^2 + 28^2 = 37^2 + 12^2$ (¹).
$n = 20$, $D = 1673 = 7.239$ (non somma di due quadrati).
$n = 21$, $D = 1841 = 7.263$ (idem).
$n = 23$, $D = 2201 = 31.71$ (idem).
$n = 27$, $D = 3017 = 7.431$ (idem).
$n = 28$, $D = 3241 = 7.463$ (idem).
$n = 29$, $D = 3473 = 23.151$ (idem).
$n = 30$, $D = 3713 = 47.79$ (idem).
$n = 31$, $D = 3961 = 17.233 = 19^2 + 60^2 = 44^2 + 45^2$ (¹).

Per gli altri valori di $n < 31$, che corrispondono a equazioni $t^2 - Du^2 = -1$ con soluzioni intere, D è sempre numero primo.

9. - Supposto n tale che l'equazione $t^2 - \{(2n+1)^2 - 8\} u^2 = -1$ non abbia soluzioni intere, e che perciò la corrispondente F^4 ammetta infinite trasformazioni birazionali, il gruppo di queste sarà costituito come per le F^4 contenenti curve di genere 2 e ordine pari ≥ 6 (n¹·2 — 4). Indicando con t_1, u_1 la più piccola soluzione intera positiva della stessa equazione col 2° membro cambiato in +1, le altre soluzioni intere t_k, u_k saranno date di nuovo dalla formola di Lagrange (ove $D = (2n+1)^2 - 8$):

$$t_k + u_k \sqrt{D} = (t_1 + u_1 \sqrt{D})^k$$

(¹) Prodotto di due numeri primi entrambi $\equiv 1 \pmod{4}$, e perciò somma di due quadrati in due modi diversi.

per k intero qualunque; e ai diversi valori di k corrisponderanno altrettante reti [2] (n. 7). L'involuzione determinata dalla rete

$$[k] = | \} t_k - (2n+1) u_k \{ C_1 + 2 u_k C_2 |$$

scambia le reti $[k+i]$ e $[k-i]$. E il prodotto di due fra queste involuzioni muta ciascuna rete in altra, il cui indice k differisce dal precedente di un numero pari costante di unità. Il gruppo totale della F^4 è composto delle dette involuzioni e dei loro prodotti.

Le trasformazioni lineari in sè, di modulo $+1$, della forma fondamentale della superficie sono date dalle potenze positive e negative di

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_1 - (2n+1) u_1 & -4u_1 \\ 2u_1 & t_1 + (2n+1) u_1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso $\mathbf{T}$ e le sue potenze dispari non corrispondono però a trasformazioni birazionali di F^4. A queste corrispondono solo le potenze pari di $\mathbf{T}$, e i loro prodotti per la sostituzione immagine di una (qualunque) delle involuzioni suddette; per esempio la

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

immagine dell'involuzione cui appartiene la rete $[0] = |C_1|$. Invero, se alla sostituzione lineare $\mathbf{T}$ corrispondesse su F^4 una trasformazione birazionale, questa dovrebbe mutare ogni rete $[k]$ nella $[k+1]$; e il prodotto $\mathbf{TS}$ sarebbe un'involuzione, che scambia le reti [0] e [1], e più generalmente ogni $[k]$ colla $[-k+1]$ (1). Le [0] e [1] ad esempio condurrebbero pertanto a rappresentare F^4, in due modi diversi, sopra uno stesso piano doppio, colla stessa sestica di diramazione; e su questo piano doppio colla medesima sestica dovrebbe rappresentarsi anche l'involuzione $\mathbf{TS}$. Anche a questa dovrebbe allora appartenere una delle reti di genere 2 di F^4, cioè una delle $[k]$; il che invece non avviene, nessuna delle $[k]$ essendo mutata in sè da questa nuova involuzione.

---

(1) Le reti $[k]$ sarebbero perciò tutte quante equivalenti, e così le loro curve di punti uniti.