Gino Fano

Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche

Comment. Math. Helv., Vol. **14** (1942), p. 202–211

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1942_2>

Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche

Di Gino Fano, Lausanne

1. Nella mia Memoria „Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche“[1]) ho dimostrato che queste varietà (M_3^{2p-2} di S_{p+1}, p essendo il genere delle curve-sezioni) per $p > 10$ sono tutte razionali, all'infuori forse della M_3^{24} di $S_{14} (p = 13)$ le cui superficie sezioni sono riferibili al sistema delle intersezioni di una forma cubica generale di S_4[2]) colle quadriche. Mostrerò ora che queste varietà, se contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme del loro spazio, sono pure razionali nei due casi $p = 9$ e $p = 10$. Il fatto di contenere soltanto superficie intersezioni complete implica che la superficie F^{2p-2} sezione sia di 1ª specie, a sensi del n. 6 della mia Mem. cit., e che perciò la M_3^{2p-2} contenga ∞^1 rette; mentre per $p = 9$, come vedremo, la F^{2p-2} può anche essere di 2ª specie (come nel caso $p = 13$ suindicato) e la M_3^{2p-2} in tal caso probabilmente non razionale. Le M_3^{2p-2} contenenti soltanto superficie intersezioni complete, e per conseguenza rette, sono pertanto tutte razionali per $p > 8$.

In altra mia Memoria[3]) ho dimostrato altresì che la M^{2p-2} di S_{p+1}[4]) contenente del pari soltanto superficie intersezioni complete è pure razionale nel caso $p = 7$ (mentre è tuttora dubbio, con probabilità negativa, il caso $p = 8$); e ne ho data una rappresentazione sullo spazio S_3. A questa rappresentazione sono pervenuto proiettando la M^{12} di S_8 da una sua retta r in una M^8 di S_6 contenente una rigata cubica R^3, e poi ancora questa M^8 da una generatrice di R^3 in una M^4 di S_4; il che equivale a proiettare direttamente la M^{12} dallo spazio S_3 tangente ad essa in un punto della r. Il procedimento riesce però più semplice e chiaro proiettando la M^{12} dallo spazio S_3 tangente ad essa in un punto generico.

---

[1]) Mem. R. Accad. d'Italia, Classe di scienze mat. fis. e nat., vol. VIII (1937 — XV), n° 2.

[2]) Col nome di „forme“ di uno spazio S_k designo le varietà algebriche a $k-1$ dimensioni di questo spazio (dette anche „ipersuperficie“).

[3]) Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve-sezioni canoniche (Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936), n. 5—6.

[4]) Indicando con M, nel presente lavoro, esclusivamente varietà a tre dimensioni, sopprimerò d'ora in poi l'indice 3, mantenendo solo l'indice superiore dell'ordine. Così F^n, φ^n, ψ^n, ... R^n indicheranno superficie, in particolare superficie rigate di ordine n. Il fatto che la M abbia un punto P, o una retta r, o una linea γ come multiplo di ordine k verrà indicato con $M(P^k)$, $M(r^k)$ $M(\gamma^k)$; e analogamente per le superficie.

Comincio pertanto coll'esporre quest'ultimo procedimento, insieme a due altre rappresentazioni della stessa M^{12}, non prive d'interesse (n. 2—4).

2. Ricordiamo dalla Memoria[3]) che la M^8 di S_6, proiezione della nostra M^{12} da una sua retta r, contiene tre rigate: la R^3 immagine di r; una R^{74} proiezione dell'unica rigata R^{84} contenuta in M^{12}; e una R^{51}, proiezione della superficie $F^{9.12}(r^{16})$ luogo delle coniche di M^{12} appoggiate a r [5]). Vediamo così che per ogni punto di r passano 16 coniche generalmente irriducibili contenute in M^{12}, più le altre 8, riducibili, composte di r e di una seconda retta incidente a r. *La congruenza delle coniche contenute in M^{12} è dunque di ordine* 24[6]).

Dallo spazio S_3 tangente in un suo punto generico P la M^{12} si proietta in una M^4 di S_4, contenente una superficie φ^4, proiezione (generica) della superficie di Veronese, immagine di P; e su questa 24 punti doppi, immagini delle coniche di M^{12} passanti per P. Le F^4 sezioni iperpiane di M^4 sono proiezioni delle $F^{12}(P^2)$. Per φ^4 passano ∞^6 forme cubiche, che incontrano ulteriormente M^4 secondo superficie razionali $F^8 = 3F^4 - \varphi^4$, a sezioni di genere 6, proiezioni di $F^{3.12}(P^7)$ [7]). Queste F^8 incontrano φ^4 secondo curve C^{14}_{15} (riferibili a C^7 piane generali) passanti per i 24 punti doppi di M^4, e aventi perciò 25 intersezioni variabili. Il sistema $| F^8 |$ ha le curve caratteristiche di ordine 10 e genere 1, e è di grado 5; rappresenta perciò una ben nota V^5_3 di S_6, razionale, a curve-sezioni ellittiche[8]). — D'altra parte la φ^4 (la cui proiezione generale su S_3 è una superficie di Steiner) ha *un* punto triplo apparente; perciò la M^4 anzidetta, e quindi la M^{12} di S_8, risultano rappresentate sul sistema ∞^3 Γ delle trisecanti di M^4, che è l'intersezione generale di tre complessi lineari di S_4 [9]); cioè

---

[5]) Le tre rigate di M^8 ne costituiscono complessivamente l'intersezione completa con una forma di ordine 16, e sono perciò proiezioni di superficie di M^{12} formanti ivi insieme una $F^{16.12}(r^{16})$. La R^3 essendo immagine di r, e la R^{74} proiezione di una $R^{84} = F^{7.12}(r)$, la R^{51} sarà appunto proiezione di una $F^{9.12}(r^{16})$. Si osservi anche, per eventuali analoghi controlli in seguito, che $F^{9.12}(r^{16}) = 9\,F^{12}(r) - 7r$; e ha quindi per proiezione su M^8 una superficie $9F^8 - 7R^3$, di ordine $9.8 - 7.3 = 51$.

[6]) Ciò è confermato da particolari M^{12} di S_8, rappresentate sullo spazio S_3 da sistemi lineari semplici di superficie; p. es. dalle F^4 passanti per una curva γ^8_7 (di ordine 8, genere 7), o per una γ^7_3. Le coniche di queste due M^{12} hanno per immagini soltanto corde, e coniche 6-secanti delle due linee; e queste formano per la γ^8_7 congruenze di ordini 14 e 10, per la γ^7_3 due congruenze di ordine 12.

[7]) Le $F^{3.12}$ generiche su M^{12} sono superficie di genere 35, e il punto 7plo ne riduce appunto il genere a zero.

[8]) *Enriques*, Math. Annalen 46 (1895), p. 179; *Scorza*, Annali di Matem. (3), vol. 15 (1908), p. 217. La V^5_3 incontrata nella Memoria [3]), n. 6, è caso particolare della presente avendo (a differenza di questa) un punto doppio. E la φ^4 di M^4 è ivi spezzata in una rigata R^3 e un piano.

[9]) *Castelnuovo*, Atti R. Ist. Veneto (7), vol. 2° (1891), p. 855; in part. n. 9.

appunto la V_3^5, sezione della Grassmanniana della rette di S_4 con uno spazio S_6. Le ∞^6 forme cubiche passanti per φ^4 sono luoghi di ∞^2 rette di Γ, segate a loro volta su Γ da ulteriori complessi lineari; hanno 10 punti doppi in punti variabili di φ^4 [10]), e sono generabili proiettivamente[11]). Fra le ∞^3 rette di Γ trisecanti φ^4, ∞^1 stanno su M^4, sono proiezioni di curve C^7 di M^{12} aventi P come punto triplo, e formano una rigata R^{12}, di genere 7 [12]); ad esse corrispondono su V_3^5 i punti di una curva canonica δ_7^{12}. Entro M^4, le F^8 segano su R^{12} i gruppi canonici di 12 generatrici; il sistema $|\,2F^8\,|$ contiene parzialmente la R^{12}; e il sistema residuo $|\,2F^8 - R^{12}\,|$, composto di superficie del 4° ordine, è quello delle sezioni iperpiane F^4. A queste corrispondono su V_3^5 le superficie segate da quadriche passanti per la curva δ_7^{12}.

La rappresentazione della M^{12} di S_8 sulla V_3^5 di S_6 (le cui sezioni iperpiane indicheremo con ψ^5) ha come soli elementi fondamentali su M^{12} il punto P, e su V_3^5 la curva δ_7^{12}. A quest'ultima corrisponde su M^4 la rigata $R^{12}=2F^8-F^4$, e quindi su M^{12} una superficie $2F^{3.12}(P^7)-F^{12}(P^2) = F^{5.12}(P^{12})$. La rappresentazione è perciò data dalle equazioni[13]):

$$\begin{aligned} \psi^5 &= 3F^{12} - 7P \\ \delta &= 5F^{12} - 12P \end{aligned} \qquad \text{da cui:} \qquad \begin{aligned} F^{12} &= 12\psi^5 - 7\delta \\ P &= 5\psi^5 - 3\delta\,. \end{aligned}$$

D'altra parte la V_3^5 si rappresenta su S_3 mediante le superficie cubiche passanti per una quartica razionale γ; e ciò proiettandola da una sua conica c, la cui immagine è la quadrica contenente γ[14]). Perciò, indicando con π i piani di S_3:

$$\begin{aligned} \psi^5 &= 3\pi - \gamma \\ c &= 2\pi - \gamma \end{aligned} \qquad \text{da cui:} \qquad \begin{aligned} \pi &= \psi^5 - c \\ \gamma &= 2\psi^5 - 3c\,. \end{aligned}$$

Per rappresentare infine la corrispondenza fra M^{12} e lo spazio S_3, occorre introdurre la curva δ', anche di ordine 12, corrispondente in S_3 a δ_7^{12} (e che si appoggia a γ in 24 punti) e la curva $C^{24}(P^{10})$ di M^{12} (brevemente C) che corrisponde ivi alla conica c. Si ha allora:

---

[10]) Applicazione particolare di un teorema di *F. Severi*, Mem. R. Accad. di Torino (2), vol. 52 (1902), n. 3.

[11]) *C. Segre*, Mem. R. Accad. di Torino (2), vol. 39 (1888), n. 12 e seg.; *Castelnuovo*, Atti R. Ist. Veneto (6), vol. 5 (1888).

[12]) *J. A. Todd*, Some types of birational quartic primals in four dimensions, London M. S. Proceed. vol. 42 (1937), p. 316, § 7. Ivi è data pure la rappresentazione su S_3 della M^4 di S_4 qui considerata. Questa M^4 contiene 4 rigate; la R^{12} anzidetta, una R^{84} proiezione della rigata contenuta in M^{12}, e due altre, di ordini 164 e 60, le cui generatrici sono proiezioni rispett. delle cubiche passanti per P e delle quintiche con P doppio.

[13]) Nel senso di cui alla mia Nota precedente: Osservazioni sulla rappresentazione ecc., Comm. Math. Helv., vol. 14, p. 193, n. 1—2.

[14]) *Enriques*, lav. cit. in [8]), n. 13—16.

$$
\begin{aligned}
F^{12} &= 36\pi - 7\delta' - 12\gamma & \pi &= 3F^{12} - 7P - C \\
P &= 15\pi - 3\delta' - 5\gamma\,; & \delta' &= 5F^{12} - 12P \\
C &= 2\pi \qquad\quad - \gamma & \gamma &= 6F^{12} - 14P - 3C
\end{aligned}
$$

Alle superficie sezioni iperpiane di M^{12} corrispondono dunque in S_3 superficie di ordine 36 aventi le curve δ' e γ come multiple di ordini risp. 7 e 12. La loro aggiunta (unica) è composta della superficie di ordine 15 corrispondente al punto P, contata due volte, e della quadrica passante per γ[15]). Alle sezioni iperpiane di $M^4(F^4 = F^{12}(P^2) = F^{12} - 2P)$ corrispondono in S_3 superficie di 6^0 ordine, passanti doppiamente per γ e semplicemente per δ'[16]).

3. La stessa M^{12} di S_3 si può rappresentare più semplicemente sullo spazio S_3 proiettandola, anche in una M^4 di S_4, dallo spazio S_3 di una sua cubica sghemba γ.

Questa M^4 contiene una rigata razionale R^5, immagine di γ; ha 21 punti doppi, semplici per R^5, immagini delle 3.7 rette di M^{12} (generatrici della sua R^{84}) incidenti a γ, più altri 3, doppi anche per R^5, immagini di coniche bisecanti γ [17]). Il piano α di questi ultimi 3 punti incontra R^5 secondo una direttrice di 4^0 ordine, cogli stessi 3 punti doppi; la R^5 ha inoltre (come la φ^4 del n^0 prec.) *un* punto triplo apparente[18]), dal che si trae facilmente la rappresentazione della nuova M^4 e di M^{12} su S_3. — Per la rigata R^5 passano ∞^3 forme cubiche, che contengono di conseguenza il piano α e sono luoghi di trisecanti di R^5. Esse segano ulteriormente M^4 in superficie F^7 a sezioni di genere 3, incontranti R^5 secondo curve C^{17}, quadrisecanti le generatrici; e questo sistema $|F^7|$ ha curve caratteristiche di 4^0 ordine ed è omaloidico. Riferendo le F^7 ai piani di S_3, alle F^4 sezioni di M^4 corrispondono anche F^4 passanti per una C^9_7 (perciò con intersezioni variabili C^7_3) [19]); e le F^7 risultano rappresentate sui piani omologhi mediante le quartiche passanti per le intersezioni colla C^9_7. Alla R^5 cor-

---

[15]) Nella Memoria [3]) cit., la quartica γ è spezzata in una cubica e una retta. La differenza, rispetto alla detta Memoria, nell'ordine del sistema rappresentativo della M^{12} e nelle multiplicità delle due curve basi è dovuta a un errore incorso alla fine del n. 6 della Mem. cit., computando la superficie immagine di P come parte semplice dell'aggiunta, anzichè doppia.

[16]) *Todd*, l. c.

[17]) Una rigata R^n_p di S_4 ha $\binom{n-2}{2} - 3p$ punti doppi. V. *C. Segre*, art. III C 7 della „Encykl. d. Mathem. Wiss.", vol. III 2.2. A, nota [434]) a p. 913.

[18]) *Ascione*, Rend. R. Accad. Lincei (5), vol. 6_1 (1^0 sem. 1897), p. 162; *Severi*, Rend. Palermo 15 (1901), p. 33; *Todd*, Mem. cit. [12]), § 6.

[19]) *Todd*, l. c., § 6; *Babbage*, Cambridge Phil. Soc. Proceed. 32 (1936), p. 13. Le forme cubiche passanti per R^5 hanno 7 punti doppi, dei quali 3 fissi nei punti doppi di R^5 e 4 variabili in punti semplici di R^5.

risponde in S_3 una superficie φ^{11} colla C_7^9 tripla; ai $21 + 3$ punti doppi di M^4, le 21 quadrisecanti e le 3 coniche 8-secanti di C_7^9, linee rispett. semplici e doppie per φ^{11}; alle sezioni iperpiane di M^{12}, superficie aventi la φ^{11} come aggiunta, perciò di ordine 15, colla C_7^9 quadrupla. Si ha quindi (indicando di nuovo con π i piani di S_3):

$$\begin{aligned} F^{12} &= 15\pi - 4C_7^9 \\ \gamma &= 11\pi - 3C_7^9 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} \pi &= 3F^{12} - 4\gamma \text{ [20]} \\ C_7^9 &= 11F^{12} - 15\gamma \text{ [21]} \end{aligned}$$

4. La proiezione della M^{12} dal piano di una sua conica ε conduce invece direttamente a rappresentarla su di una quadrica di S_4. Questa proiezione è una M^6 di S_5, contenente una rigata R^4 razionale normale[22]) e 14 punti doppi, semplici per R^4, immagini delle rette di M^{12} incidenti a ε. Le ∞^5 quadriche passanti per R^4 segnano su M^6 un sistema lineare ∞^4 di F^8 a sezioni di genere 4, che incontrano R^4 secondo curve canoniche C_6^{10}, trisecanti le sue generatrici, passanti tutte pei 14 punti doppi di M^4, e perciò con 10 intersezioni variabili[23]). Il sistema $|F^8|$ ha pertanto curve caratteristiche razionali di ordine 6, è di grado 2, e conduce senz'altro

---

[20]) È dunque omaloidico il sistema formato su M^{12} dalle $F^{3\cdot 12}$ colla cubica γ quadrupla. L'intersezione di due di queste superficie è infatti di ordine $3.3.12 = 108$. Togliendone la cubica γ ($3.4.4 = 48$ unità) e le linee fondamentali di 2ª specie contenute di conseguenza nelle dette $F^{3\cdot 12}$, cioè le 21 rette di M^{12} incidenti a γ, e le 3 coniche bisecanti γ che ne sono linee doppie (8 unità per ciascuna), rimane una curva di ordine 15, immagine di una retta di S_3, e perciò appoggiata a γ (immagine di φ^{11}) in 11 punti. E $15.3 - 11.4 = 1$.

[21]) Le rette contenute in una M^4 di S_4 formano complessivamente una rigata R^{320}, di cui ogni generatrice si appoggia a altre 81 (*Marletta*, Sulla varietà delle rette..., Atti Accad. Gioenia di Catania (4), vol. 16 (1902)). — Nella M^4 considerata nel presente nº, la R^{320} è composta di 5 rigate parziali, per ciascuna delle quali indichiamo qui sotto la superficie di M^{12} di cui è proiezione: i numeri fra parentesi indicano, per le generatrici di ogni singola rigata, a quante generatrici di ciascuna delle altre o di sè stessa — nel medesimo ordine — esse si appoggiano. Il totale, per ogni parentesi, è sempre 81.

Una R^5, immagine di γ (0, 0, 24, 42, 15).
„ R^{63}, proiezione della R^{84} di M^{12} (0, 8, 27, 35, 11).
„ R^{123}, proiezione di una $F^{27\cdot 12}$ (γ^{24}) luogo delle coniche incidenti a γ (1, 14, 31, 28, 7).
„ R^{105}, proiezione di una $F^{35\cdot 12}$(γ^{42}) luogo delle cubiche bisecanti γ (2, 21, 33, 22, 3).
„ R^{24}, proiezione di una $F^{11\cdot 12}$ (γ^{15}) luogo delle quartiche trisecanti γ (3, 28, 36, 14, 0).

Nello spazio S_3, le generatrici di queste rigate hanno per immagini ordinatamente le quartiche 15-secanti la C_7^9, le cubiche 11-secanti, le coniche 7-secanti, le rette trisecanti, e i punti della detta C_7^9. Le linee anzidette hanno per luoghi superficie di ordini 11 (la φ^{11}), 105, 141, 63, colla C_7^9 multipla degli ordini indicati dai numeri contenuti nell'ultima parentesi.

[22]) Se non fosse normale, dovrebbe avere un punto doppio, tale anche per M^6, e immagine di una conica bisecante la ε, la quale insieme con ε costituirebbe una γ_1^4: mentre sulla M^{12} non esistono γ_1^4 (cfr. la mia Memoria [3]), nº 11).

[23]) Rappresentando R^4 col sistema delle cubiche piane aventi un punto base doppio A e uno semplice B, al sistema delle C_6^{10} corrisponde un sistema ∞^4 di C^7 (A^4B^3) e con 14 punti basi semplici, perciò di grado 10, colle cubiche anzidette come aggiunte pure.

alla rappresentazione voluta; alla rigata R^4 di M^4, cioè alla conica ε di M^{12}, corrisponde sulla quadrica una superficie di ordine 10, a sezioni di genere 6, perciò con curva doppia C anche di ordine 10 e genere 7. Questa curva è immagine di una rigata R^{18} di M^6, proiezione di una superficie $F^{5.12}$ (ε^8) di M^{12}. La rappresentazione di M^{12} sulla quadrica di S_4, le cui sezioni indicheremo con q, è data dalle equazioni:

$$\begin{aligned} q &= 2F^{12} - 3\varepsilon \\ C_7^{10} &= 5F^{12} - 8\varepsilon \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} F^{12} &= 8q - 3C_7^{10} \\ \varepsilon &= 5q - 2C_7^{10} \end{aligned}$$ [24])

Osservazione. Abbiamo così rappresentata la M^{12} di S_8 in modo molto semplice sullo spazio S_3 (n. 3), su una quadrica di S_4, e su una V_3^5 di S_6 a curve-sezioni ellittiche: tutte tre varietà razionali, per le quali l'invariante relativo I di Zeuthen-Segre vale *due* [25]). Volendo calcolare questo stesso invariante per la M^{12}, si può osservare che essa si proietta dallo spazio tangente in un suo punto, o da una sua curva razionale (n. 2, 3), in una M^4 di S_4 con 24 punti doppi ordinari, perciò di classe $4.3^3 - 2.24 = 60$, e (riferendosi a un fascio di superficie sue sezioni iperpiane) di invariante $I = 60 - 2.3 - 2.20 = 14$[26]). Per la M^{12} (sulla quale la proiezione aveva un solo punto, o una sola curva razionale fondamentale) è pertanto $I = 16$. La semidifferenza degli invarianti 16 e 2 vale 7; e infatti in ciascuna delle tre varietà su cui abbiamo rappresentata la M^{12} abbiamo trovata un'unica curva fondamentale di genere 7 (mentre le curve razionali su M^{12} non vi influiscono).

5. Una M^{16} di $S_{10}(p = 9)$ con sole superficie intersezioni complete, e perciò contenente rette, si proietta da una di queste r in una M^{12} di S_8 contenente una R^3, immagine di r[27]). Gli ∞^3 iperpiani passanti per R^3

---

[24]) Le rigate contenute in M^6 devono avere ordini di somma 180, e ogni loro generatrice deve incontrarne complessivamente altre 31 (*Marletta*, l. c. in [21])). Esse sono (colla stessa convenzione della nota [21]) per i numeri in parentesi):

La R^4, immagine di ε (0, 0, 23, 8).
Una R^{70}, proiezione della R^{84} di M^{12} (0, 8, 18, 5).
Una R^{88}, proiezione di una $F^{18.12}$ (ε^{23}) luogo delle coniche incidenti a ε (1, 14, 14, 2).
La R^{18}, proiezione di una $F^{5.12}$ (ε^8) luogo delle cubiche bisecanti ε (2, 21, 8, 0).

[25]) Per l'invariante I, come anche per l'invariante i (pure di Zeuthen-Segre) di una superficie, v. le note [8]) e [9]) del mio lavoro preced., e l'enunciato 2) del n. 2 dello stesso lavoro. Per lo spazio S_3 e per la quadrica il calcolo di I è immediato. Per la V_3^5 questo invariante deve avere lo stesso valore che per lo spazio S_3, potendosi queste due varietà rappresentare l'una sull'altra (come qui al n. 2) con una sola curva fondamentale razionale su ciascuna di esse.

[26]) Per una F^4 di S_3 priva di linee eccezionali, quale è la sezione iperpiana di M^4, l'invariante i vale 20.

[27]) Questa M^{12} è caso particolare di quella considerata qui ai n. 2—4. Cfr. la mia Memoria [3]), n. 11, p. 345.

segano ulteriormente su M^{12} superficie F^9 a sezioni di genere 3, che incontrano la R^3 in curve C_1^5, hanno come mutue intersezioni quartiche razionali, e formano un sistema omaloidico. Da ciò appare senz'altro la razionalità della M^{16}, e ovvia ne risulta la rappresentazione su S_3. Alla R^3 corrisponde una superficie cubica (generale) φ^3; alle sezioni iperpiane di R^3, un sistema ∞^4 di quintiche su φ^3; alle sezioni iperpiane di M^{12}, cioè superficie $F^{12} = R^3 + F^9$, superficie F^4 passanti per una γ_3^7 contenuta in φ^3 (curva residua delle anzidette quintiche nell'intersezione $\varphi^3 . F^4$). Infine, alle sezioni iperpiane di M^{16} (le cui proiezioni su M^{12} sono equivalenti alla somma $F^{12} + R^3$), corrisponderanno in S_3 superficie F^{4+3}, cioè F^7 colla γ_3^7 doppia e la φ^3 come unica aggiunta.

Indicando al solito con π i piani di S_3, si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} F^{16} &= 7\pi - 2\gamma_3^7 \\ r &= 3\pi - \gamma_3^7 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} \pi &= F^{16} - 2r \\ \gamma_3^7 &= 3F^{16} - 7r \end{aligned}$$

dalle quali risulta altresì provata l'effettiva esistenza della M^{16} suddetta.

Alla rigata R^{25} delle trisecanti di γ_3^7 (con tale curva come 7^{pla}), congiunta colla φ^3 immagine di r, corrisponde su M^{16} l'unica rigata R^{64}, intersezione con una forma di 4° ordine, e di cui ogni generatrice ne incontra altre 5. La M^{12} proiezione di M^{16} ha pertanto 5 punti doppi, semplici per R^3, aventi per immagini in S_3 le 5 quadrisecanti di γ_3^7. La M^{12} contiene tre rigate (l. c. in[27]): la R^3; la R^{57} proiezione della R^{64} anzidetta; e una R^{24}, proiezione della $F^{3\cdot 16}(r^7)$ luogo delle coniche di M^{16} appoggiate a r, e alla quale corrisponde in S_3 la γ_3^7 [28]). La somma dei 3 ordini è appunto 84; e l'ordine della congruenza delle coniche contenute in M^{16} è 12 [29]).

L'invariante I della M^{16} vale 8; la rappresentazione su S_3 ha infatti su M^{16} una sola retta fondamentale, e in S_3 una curva di genere $3 = \dfrac{8-2}{2}$.

6. Al n. 10 della mia Memoria[1]) ho incontrato un'altra M^{16} di S_{10} a curve-sezioni canoniche, priva di rette (con superficie sezioni „di 2ª specie"), ottenuta come intersezione di una quadrica col cono Γ proiettante una M^8 di S_9 le cui sezioni sono riferibili alle quadriche di S_3. Questa M^{16} è rappresentabile sul più generale spazio S_3 doppio con superficie di diramazione del 4° ordine (φ^4); contiene un sistema lineare ∞^3 di F^8 (rappresentabili sul piano mediante sestiche con 7 punti doppi) e aventi

[28]) Nelle tre rigate R^3, R^{57}, R^{24} ciascuna generatrice ne incontra ordinatamente — con notazione conforme alla nota [21]) — altre (0, 1, 7), (0, 5, 3), (1, 7, 0), con somma costante 8.

[29]) Per un punto di r passano 7 coniche generalmente irriducibili, e 5 spezzate in r e una retta incidente a questa.

per immagini in S_3 i piani doppi. Il sistema $| F^8 |$ appartiene all'involuzione J_2 le cui coppie stanno sulle generatrici del cono Γ; e ha come sistema lineare doppio il sistema $| F^{16} |$ delle sezioni iperpiane. Questa M^{16} contiene ∞^4 curve γ_1^4, corrispondenti alle rette doppie dello spazio S_3, delle quali ∞^2, corrispondenti alle tangenti doppie di φ^4, si spezzano in coppie di coniche. Da una ε di queste coniche la M^{16} si proietta in una M^{10} di S_7 (sempre della serie M^{2p-2} di S_{p+1}, con $p = 6$) contenente una rigata R^4 immagine di ε, e su questa un punto doppio D, tale anche per M^{10}, immagine della conica bisecante (che forma cioè coppia con) ε; sicchè la R^4 non sarà normale, ma starà in un S_4. Le F^8 generiche si proiettano in F^7; quelle ∞^1 che passano per ε, in superficie cubiche; le une e le altre passanti (semplicemente) per D. Questa M^{10} è quella già considerata nella mia Memoria[3]), al n° 10, 2° capoverso di p. 344; D è il vertice dell' S_0 -cono che la contiene.

L'invariante di Zeuthen-Segre ha per questa M^{16} lo stesso valore che per l' S_3 doppio con φ^4 di diramazione, la corrispondenza fra essi essendo priva di elementi fondamentali. Calcolandolo per l' S_3 doppio mediante un fascio di piani doppi, e poichè la superficie φ^4 è di classe 36, si ha $I = 36 - 2.1 - 2.6 = 20$ [30]).

Questa M^{16} presumibilmente *non* è razionale; come probabilmente non lo è la forma cubica generale di S_4, che dal punto di vista birazionale può considerarsi caso particolare della detta M^{16}, in quanto da un suo punto si proietta anche in un S_3 doppio con una particolare φ^4 di diramazione (avente un piano tangente lungo una conica). Pertanto le M^{2p-2} a curve-sezioni canoniche e contenenti soltanto superficie intersezioni complete diventano razionali già per valori minori di $p (p \geqq 9)$, che — presumibilmente — le altre (ancora non razionali, probabilmente, per $p = 9$ e $p = 13$).

7. Passiamo ora alla M^{18} di S_{11} ($p = 10$), sempre contenente soltanto superficie intersezioni complete. Da una sua retta r, certo esistente, questa si proietta in una M^{14} di S_9, contenente una rigata R^3, e sulla quale gli iperpiani passanti per R^3 segano un sistema lineare ∞^4 di F^{11}, a sezioni di genere 4, incontranti R^3 in curve C_1^5. Si vede facilmente che queste C_1^5 hanno a comune 4 punti fissi, doppi per M^{14} e immagini di altrettante rette di M^{18} incidenti a r. Il sistema $| F^{11} |$ ha le curve caratteristiche di ordine 6 e razionali, e è di grado 2; conduce quindi a rappresentare la M^{18} sopra una quadrica Q di S_4, sulla quale a R^3 cor-

[30]) L'invariante i del piano doppio con C^4 generale di diramazione si può calcolare con un fascio di rette doppie: si trova $i = 12 - 2 - 4.1 = 6$.

risponde una superficie φ^4 (intersezione con altra quadrica). Alle sezioni iperpiane di M^{14} (equivalenti alla somma $R^3 + F^{11}$) corrispondono su Q superficie φ^6, segate da forme cubiche, vincolate a segare φ^4 in curve razionali di 5° ordine, e perciò a passare per una γ_2^7 fissa (contenuta in φ^4); e alle sezioni iperpiane di M^{18}, superficie φ^{10} colla γ_2^7 doppia e la φ^4 come unica aggiunta.

Indicando con q le quadriche di S_3 sezioni iperpiane di Q, si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} F^{18} &= 5q - 2\gamma_2^7 \\ r &= 2q - \gamma_2^7 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} q &= F^{18} - 2r \\ \gamma_2^7 &= 2F^{18} - 5r \end{aligned} .$$

che dimostrano altresì l'effettiva esistenza della M^{18} in parola.

La M^{14} anzidetta, oltre alla rigata R^3, contiene una R^{19} immagine della curva γ_2^7 su Q, e una R^{48} a cui corrisponde su Q la superficie pure rigata di ordine 26 con γ_2^7 quintupla, luogo delle corde di γ_2^7 contenute in Q. Essendo quest'ultima rigata $= 13q - 5\gamma_2^7 = 3F^{18} - r$, la R^{48} è proiezione dell'unica rigata contenuta in M^{18}; una R^{54}, sua intersezione con una forma cubica [31]). Ogni generatrice di R^{54} è incidente a 4 altre; quelle incidenti a r hanno per immagini su Q le 4 trisecanti di γ_2^7 [32]). La congruenza delle coniche contenute in M^{18} è di ordine 9. L'invariante I della varietà vale 6; e $\frac{6-2}{2} = 2$, genere della γ_2^7 [33]).

Per $p > 10$ le M^{2p-2} di S_{p+1} sono tutte razionali (come è dimostrato nella mia Memoria[1])) all'infuori forse del caso $p = 13$; ma non me ne è nota alcuna che contenga soltanto superficie intersezioni complete. Anzi il procedimento che conduce a rappresentare la M^{2p-2}, per $p = 9$, 10,

[31]) La R^{19} è invece proiezione di una $F^{2.18}(r^5)$, luogo delle coniche di M^{18} appoggiate a r. La somma degli ordini delle tre rigate contenute nella M^{14} è 70, come nella M^{14} considerata nella mia Nota nei Rend. R. Accad. Lincei (6) vol. 11, 1° sem. 1930, p. 329. Ogni generatrice di ciascuna di esse ne incontra in tutto altre 6, e le consuete parentesi, nell'ordine R^3, R^{48}, R^{19}, sono (0, 1, 5), (0, 4, 2), (1, 5, 0).

[32]) Una curva C_p^n di S_4 ha $\binom{n-2}{3} - (n-4)p$ trisecanti (*C. Segre*, articolo cit. in [17]), n. 25, dove sono indicati i vari lavori sul problema degli spazi plurisecanti una curva).

[33]) Sulla forma cubica generale di S_4 le quadriche passanti per una sua retta s segano un sistema lineare di superficie rappresentante pure una M^{18} di S_{11} a curve-sezioni canoniche, ma che contiene anche superficie *non* intersezioni complete con forme; fra altre una R^4 immagine della retta s e una R^{35} corrispondente alla rigata della forma cubica avente s per direttrice. Ogni generatrice di R^4 ne incontra 5 di R^{35}; ogni generatrice di R^{35} ne incontra una di R^4 e un'altra di R^{35}. Cadono perciò tutte le considerazioni indicate qui sopra: se r è generatrice di R^4, il sistema $|F^{11}|$ è di grado 3 e rappresenta daccapo una forma cubica; se r sta su R^{35}, $|F^{11}|$ appartiene a una congruenza di coniche.

rispett. sullo spazio S_3 e sulla quadrica di S_4 conduce per $p > 10$ a varietà a 3 dimensioni di spazi superiori, a curve-sezioni razionali, che sono notoriamente ∞^1 di piani, oppure coni di S_6 proiettanti una superficie di Veronese[34]), sulle quali le superficie costituenti la base sono in numero > 1. E ciò avvalora la presunzione che non vi siano altre M^{2p-2} del tipo anzidetto. In ogni modo, le M^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche, contenenti sole superficie intersezioni complete e di dubbia razionalità, sono oramai limitate ai tre casi $p = 5, 6, 8$.

---

[34]) *Enriques*, l. c. in [8]), n. 9.

(Eingegangen den 23. Juni 1941.)