Gino Fano

Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali tra varietà algebriche

Comment. Math. Helv., Vol. **14** (1942), p. 193–201

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1942_1>

Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali fra varietà algebriche

Di GINO FANO, Lausanne.

1. In un mio lavoro del 1930[1]), muovendo da questioni di geometria della retta dello spazio a 5 dimensioni, ho dimostrato che la varietà M_3^{14} di S_9 a curve-sezioni canoniche di genere 8 sezione generica della Grassmanniana delle rette di S_5 è birazionalmente identica alla forma cubica generale di S_4. Entrambe queste varietà non contengono altre superficie all'infuori delle loro intersezioni complete con forme[2]), che indicheremo rispett. con F^{14} e φ^3, e dei multipli di queste. E la corrispondenza fra esse non ha punti fondamentali isolati, ma soltanto in ciascuna delle due una curva fondamentale di 1ª specie, ellittica e di 5° ordine (γ_1^5, δ_1^5), più 25 coppie di rette corrispondenti fondamentali di 2ª specie (appoggiate semplicemente a γ_1^5, e rispett. corde di δ_1^5), tali cioè che a ogni singolo punto dell'una corrisponde per intero la retta omologa dell'altra varietà[3]). Alle sezione iperpiane F^{14} di M_3^{14} corrispondono sulla forma cubica le superficie segate da forme di ordine 7 e aventi la curva δ_1^5 come quadrupla; superficie che, omettendo per brevità gli indici, possiamo indicare con $7\varphi - 4\delta$; e alla curva γ_1^5 l'unica superficie, aggiunta delle precedenti, rappresentata con analoga notazione da $5\varphi - 3\delta$ (superficie che passano tutte, di conseguenza, per le 25 corde di δ_1^5 giacenti sulla forma cubica, rette fondamentali di 2ª specie). La corrispondenza fra le due varietà può quindi rappresentarsi colle equazioni:

$$F = 7\varphi - 4\delta$$
$$\gamma = 5\varphi - 3\delta$$

dove il segno = significa „ha per corrispondente" (e così in seguito, per analoghe rappresentazioni). Risolvendo rispetto a φ e δ, si ha:

$$\varphi = 3F - 4\gamma$$
$$\delta = 5F - 7\gamma \quad ;$$

---

[1]) Rendic. R. Accad. Lincei (6), vol. 11 (1° sem. 1930), p. 329.

[2]) „Forme" o „ipersuperficie" sono le varietà algebriche di dimensione $k - 1$ in uno spazio S_k.

[3]) *L. Cremona*, Sulle trasformazioni razionali nello spazio, Annali di Matem. (2), vol. 5 (1871), p. 131; Opere Matem. III (Milano 1917), p. 298; n. 7, 9. *D. Montesano*, Rendic. R. Accad. Lincei (5), vol. 27_1 (1° sem. 1918), p. 396, 438; vol. 30_2 (2° sem. 1921), p. 447.

equazioni che danno le superficie di M_3^{14} corrispondenti alle φ^3 e alla curva δ_1^5 della forma cubica[4]). I determinanti dei secondi membri delle due coppie di equazioni sono entrambi eguali a -1.

2. Consideriamo ora, più generalmente, due varietà algebriche qualunque a tre dimensioni M, μ, completamente regolari, prive di punti multipli, in corrispondenza birazionale, e soddisfacenti come quelle del n. 1 alle due condizioni seguenti:

a) Ciascuna delle due contenga solamente superficie intersezioni complete con forme; ossia, in entrambe, i sistemi lineari completi di superficie siano tutti multipli di un sistema minimo $|F|$, risp. $|\varphi|$;

b) In ciascuna delle due varietà il sistema lineare di superficie ($|mF|$, $|n\varphi|$, con certi elementi basi) che corrisponde al sistema completo $|\varphi|$, $|F|$ dell'altra abbia soltanto punti basi (fondamentali) isolati, nessuno dei quali cioè infinitamente vicino a un altro, e linee basi anche isolate, in nessun punto delle quali vi sia un piano tangente fisso, salvo nei punti eventualmente comuni a due di queste linee. Due spazi S_3 soddisfano evidentemente alla condizione *a*); e le corrispondenze birazionali (Cremoniane) fra essi soddisfacenti alla condizione *b*) sono state chiamate da D. Montesano „regolari"[5]): nome che noi pure qui adotteremo. Le stesse considerazioni valgono sostanzialmente anche per varietà a un numero qualunque k di dimensioni, coll'intesa che la condizione *a*) si riferisca alle varietà di dimensione $k-1$ in esse contenute; le varietà basi dei sistemi lineari $|mF|$, $|n\varphi|$ potranno allora avere dimensioni qualsiansi $\leq k-2$.

Le superficie della varietà M corrispondenti alle φ di μ saranno pertanto le mF vincolate a certe condizioni indipendenti, consistenti nel passare per certi punti $P_1, P_2, \ldots P_h$ con multiplicità $p_1, p_2, \ldots p_h$ e per certe linee $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i$ con multiplicità $c_1, c_2, \ldots c_i$ (tali linee essendo soltanto quelle fondamentali di 1ª specie, perchè il passaggio per le eventuali linee fondamentali di 2ª specie, colle dovute multiplicità, seguirà già dalle altre condizioni). Potremo quindi scrivere:

$$\varphi = mF - p_1 P_1 - \ldots - p_h P_h - c_1 \gamma_1 - \ldots - c_i \gamma_i .$$

[4]) La superficie unica $5F - 7\gamma$ è l'aggiunta delle superficie (di genere 1) della M_3^{14} corrispondenti alle 2φ della forma cubica. Inoltre $F - \gamma = 2\varphi - \delta$; cioè alle F (superficie di genere 1, costituenti su M_3^{14} la differenza costante fra un sistema lineare completo di superficie privo di punti basi e il suo aggiunto) che passano per la curva fondamentale γ corrispondono le superficie 2φ (che sulla forma cubica costituiscono l'analoga differenza) passanti per la curva δ.

[5]) Atti R. Accad. di Napoli (2), vol. 17 (1926); Mem. n° 8. Per corrispondenze non regolari, le considerazioni che seguono potrebbero applicarsi, ma riuscirebbero alquanto meno semplici.

Ai punti fondamentali $Q_1, \dots Q_k$ e alle linee fondamentali $\delta_1, \dots \delta_l$ di μ corrisponderanno su M superficie rappresentabili in modo analogo, come segue (scrivendo di nuovo, in testa, l'equazione precedente):

$$\begin{array}{ll} \varphi = mF - p_1P_1 - \cdots - p_hP_h - c_1\gamma_1 - \cdots - c_i\gamma_i \\ Q_1 = m_1F - p_{11}P_1 - \cdots - p_{1h}P_h - c_{11}\gamma_1 - \cdots - c_{1i}\gamma_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_k = m_kF - p_{k1}P_1 - \cdots - p_{kh}P_h - c_{k1}\gamma_1 - \cdots - c_{ki}\gamma_i & \quad (1) \\ \delta_1 = m'_1F - p'_{11}P_1 - \cdots - p'_{1h}P_h - c'_{11}\gamma_1 - \cdots - c'_{1i}\gamma_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_l = m'_lF - p'_{l1}P_1 - \cdots - p'_{lh}P_h - c'_{l1}\gamma_1 - \cdots - c'_{li}\gamma_i \end{array}$$

I coefficienti m, p, p', c, c' sono numeri interi, positivi o (salvo le m) anche nulli. Analoghe equazioni, con analoghe condizioni pei coefficienti, si potranno scrivere scambiando le due varietà M e μ:

$$\begin{array}{ll} F = n\varphi - q_1Q_1 - \cdots - q_kQ_k - d_1\delta_1 - \cdots - d_l\delta_l \\ P_1 = n_1\varphi - q_{11}Q_1 - \cdots - q_{1k}Q_k - d_{11}\delta_1 - \cdots - d_{1l}\delta_l \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_h = n_h\varphi - q_{h1}Q_1 - \cdots - q_{hk}Q_k - d_{h1}\delta_1 - \cdots - d_{hl}\delta_l \\ \gamma_1 = n'_1\varphi - q'_{11}Q_1 - \cdots - q'_{1k}Q_k - d'_{11}\delta_1 - \cdots - d'_{1l}\delta_l & \quad (2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_i = n'_i\varphi - q'_{i1}Q_1 - \cdots - q'_{ik}Q_k - d'_{i1}\delta_1 - \cdots - d'_{il}\delta_l \end{array}$$

I due sistemi di equazioni (1) e (2), per la natura stessa della questione, devono manifestamente equivalersi (come nell'esempio del n. 1); devono dunque comporsi di uno stesso numero di equazioni ($1 + k + l = 1 + h + i$), con altrettante variabili (F, $P_1, \dots \gamma_1, \dots$; risp. φ, $Q_1, \dots \delta_1, \dots$), e ciascuno di essi dovrà risultare dalla risoluzione dell'altro rispetto a queste variabili, cioè rispetto alla F o φ e agli elementi fondamentali della corrispondenza che vi compaiono a 2° membro. I determinanti dei secondi membri (le cui matrici sono pertanto matrici quadrate) saranno inoltre diversi da zero. Da ciò si traggono varie conseguenze:

1) (Essendo $h + i = k + l$): *In ogni corrispondenza birazionale regolare fra le due varietà M, μ il numero complessivo dei punti e delle linee fondamentali è lo stesso nelle due varietà.* Delle linee fondamentali abbiamo

considerato qui solo quelle di 1ª specie; ma poichè quelle di 2ª specie, corrispondendosi a coppie, sono in egual numero nelle due varietà, la proprietà enunciata sussiste indipendentemente dal tener conto o no di queste ultime.

2) D'altra parte M. Pannelli ha dimostrato[6]) che, calcolando in ciascuna delle due varietà la differenza fra il numero complessivo dei punti e delle linee fondamentali e la somma dei generi di queste ultime[7]), la differenza tra questi due numeri è eguale alla semidifferenza fra gli invarianti di Zeuthen-Segre delle due varietà[8]). Le eventuali linee fondamentali di 2ª specie sono tutte razionali, e perciò non influiscono sulla somma dei generi. Per conseguenza: *In ogni corrispondenza birazionale regolare fra le due varietà M e μ la differenza fra la somma dei generi delle curve fondamentali di 1ª specie della prima e seconda varietà è eguale alla semidifferenza degli invarianti di Zeuthen-Segre della seconda e prima varietà*[9]).

3) Indicando con a_{rs} i singoli elementi del determinante dei secondi membri delle (1), con $A = | a_{rs} |$ il determinante stesso (non nullo), con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs}, tutti numeri interi, l'elemento di egual posto di a_{rs} nel determinante dei secondi membri delle (2) sarà $\dfrac{A_{sr}}{A}$, e anch'esso numero intero. Il valore del determinante $| A_{rs} |$, di

---

[6]) Rendic. R. Accad. Lincei (5), vol. 23_2 (2º sem. 1914), p. 561. V. anche Giorn. di Matem. vol. 65 (ser. 3ª, vol. 8; 1917), p. 111.

[7]) Per la varietà M ad es. quest'espressione è $h + i - \Sigma\varrho$, dove ϱ è il genere di una qualsiasi delle curve fondamentali.

[8]) L'invariante di *Zeuthen-Segre* $I = \delta - 2p - 2i$ (*C. Segre*, Atti Accad. Torino, vol. 31 (1895), p. 485) ha in una data M_3 un valore costante per qualunque fascio di superficie contenuto nella M_3 stessa, essendo δ il numero delle superficie del fascio dotate di punto doppio, p il genere della curva base (da porsi $= 1$ qualora questa curva manchi), e i l'invariante, anche di Zeuthen-Segre (*Zeuthen*, Mathem. Ann., vol. 4 (1871), p. 21; *Segre*, l. c.), di una superficie generica del fascio. L'invariante i ha a sua volta un valore costante $i = d - \sigma - 4\pi$ per ogni fascio di curve contenuto nella superficie; essendo d il numero delle curve del fascio con punto doppio, σ il numero dei punti basi, π il genere di una curva generica del fascio. I e i sono però entrambi invarianti *relativi*, cioè suscettibili di variare in una corrispondenza birazionale nella quale si acquistino o si perdano elementi fondamentali.

[9]) Vale a dire $\Sigma\varrho - \Sigma'_{\varrho} = \frac{I'-I}{2}$. Nell'esempio del n. 1 vi è in ciascuna delle due varietà una sola curva fondamentale di genere 1; e l'invariante I vale 12 per entrambe le varietà. Per la forma cubica di S_4, riferendosi a un fascio di sezioni iperpiane, si ha $I = 24$ (classe) $- 2.1 - 2i$, e per le superficie cubiche sezioni $i = 12 - 3 - 4.1 = 5$. La M_3^{14} si proietta dalla sua curva γ_1^5 in una M_3^4 di S_4 (v. la mia Nota [1]) cit.) con 25 punti doppi ordinari, immagini delle rette di M_3^{14} incidenti a γ_1^5; e in questa proiezione l'invariante I non muta, essendovi sulla (sola) M_3^{14} *una* curva fondamentale di 1ª specie e di genere *uno*. Per questa M_3^4, di classe $58 = 108 - 2.25$, l'invariante I può calcolarsi come per la forma cubica.

ordine $1 + h + i = 1 + k + l = N$ e aggiunto di $| a_{rs} |$, perciò $= A^{N-1}$, dovrà dunque essere un numero divisibile per A^N; il che richiede $A = \pm 1$. *Il determinante dei coefficienti dei secondi membri delle equazioni sia* (1) *che* (2) *ha il valor assoluto eguale all'unità*, e il secondo è l'aggiunto del primo, salvo lo scambio delle orizzontali colle verticali, e il cambio di tutti i segni se $A = -1$. Gli elementi di una stessa linea di ciascuno dei due determinanti sono perciò in valor assoluto numeri primi fra loro.

4) I determinanti delle (1) e (2) possono realmente avere sia il valore $+1$ che -1, non essendo a priori determinato l'ordine in cui si considerano in ciascuna varietà gli elementi fondamentali, e quindi le linee parallele dei due determinanti. Scrivendo però le equazioni (1) e (2) come qui si è fatto, l'ordine delle orizzontali dell'uno vincola quello delle verticali dell'altro, e in tal caso *i due determinanti hanno lo stesso valore* $+1$ *ovvero* -1. Nel caso $A = 1$, ciò è evidente. Se poi $A = -1$, il determinante (2), di ordine N, è $= | -A_{rs} | = \pm | A_{rs} | = \pm (-1)^{N-1}$ secondo che N è pari o dispari, cioè $N - 1$ dispari o pari; vale dunque in ogni caso -1.

D'altra parte, se ad. es. nella prima delle (1) introduciamo per F, $P_1, \ldots \gamma_1, \ldots$ i valori dati delle (2), dobbiamo avere un'identità: nel 2° membro il coefficiente di φ deve dunque risultare $= 1$, e gli altri nulli. Ora questi coefficienti sono le somme dei prodotti degli elementi della prima orizzontale del determinante (1) per quelli delle successive verticali di (2). Analogamente dicasi per le altre equazioni e orizzontali (1). Pertanto il prodotto dei due determinanti, eseguito per orizzontali del primo e verticali del secondo (o viceversa), ha gli elementi principali eguali a 1, e gli altri nulli; vale quindi $+1$.

5) Se nella varietà μ la superficie fondamentale corrispondente a uno dei punti P o a una delle linee γ *non* passa per uno dei punti Q e per una delle linee δ, essa non conterrà nemmeno punti infinitamente vicini a Q o a un punto generico di δ, e perciò in M la superficie corrispondente a Q o δ non passerà per P, o non conterrà la linea γ. Vale a dire: *Se in uno dei determinanti* (1) *e* (2) *è nullo un elemento* (che non potrà però appartenere nè alla prima orizzontale, nè alla prima verticale), *sarà pure nullo il suo complemento algebrico, cioè l'elemento che nell'altro determinante occupa il posto simmetrico del primo rispetto alla diagonale principale* (lo stesso posto, se il primo appartiene a questa diagonale).

3. Questi risultati sono applicabili alle corrispondenze birazionali

(Cremoniane) fra due spazi S_3, e in parte anche al caso di due piani[10]). In quest'ultimo caso la proprietà 1) del n° prec. concerne i soli punti fondamentali, che sono nei due piani in egual numero[11]). La trasformazione corrispondente a una soluzione delle note equazioni cremoniane la quale sia „coniugata" di sè stessa (abbia cioè nei due piani sempre lo stesso numero di punti fondamentali di ogni data multiplicità) si rappresenta con una sostituzione lineare che si inverte scambiando semplicemente le lettere con apice e quelle senza. P. es. nel caso della trasformazione di de Jonquières di ordine n avente in ciascuno dei due piani un punto fondamentale $(n-1)^{\text{plo}}$ (A, A') e $2(n-1)$ punti semplici (B_k, B_k'), indicando con r, r' le rette dei due piani, si ha $(k = 1, 2, \ldots 2(n-1))$:

$$\begin{aligned} r' &= nr && -(n-1)A - \Sigma B_k \\ A' &= (n-1)r && -(n-2)A - \Sigma B_k \\ B_k' &= r && -\quad A - B_k \end{aligned}$$

Per le corrispondenze birazionali fra due spazi, i teoremi 1), 2), 3) furono dimostrati da Montesano [12]), con considerazioni più complesse, ma in parte non sostanzialmente diverse. Anche per due spazi S_3, quando i

[10]) Due superficie prive di punti multipli, contenenti solo curve intersezioni complete, e fra le quali esiste una corrispondenza birazionale regolare non proiettiva, non possono essere che due piani. Esse sono infatti razionali: poichè in caso contrario, non essendo nemmeno riferibili a rigate irrazionali, dovrebbero essere prive di curve eccezionali; dovrebbero quindi corrispondersi le loro sezioni iperpiane, e la corrispondenza sarebbe proiettiva. E se una delle due non fosse un piano, le sue sezioni non potrebbero essere nè razionali nè ellittiche, perchè comprenderebbero sempre curve riducibili; avrebbero dunque un sistema aggiunto, che dovrebbe pure comporsi di intersezioni complete, e conterrebbe quindi parzialmente le sezioni iperpiane; il che non è possibile.

[11]) La prima comunicazione di questa proprietà fu fatta, per incarico di *L. Cremona*, da *T. A. Hirst* alla „British Association for the Advancement of Sciences" (On the geometrical transformations of plane curves; Report of the meetings 1864, p. 3; Opere Matem. di L. Cremona, vol. II (Milano 1915), p. 179. Nella Memoria: Sulle trasformazioni geometriche dalle figure piane, II (Mem. Accad. Bologna (2), vol. 5 (1865), p. 3; Opere matem., vol. II (Milano 1915), p. 193) la proprietà suindicata trovasi al n. 5. Lo stesso Cremona dimostrò anzi più particolarmente (Mem. ultima cit., n. 25) che se in uno dei due piani vi sono x_1 punti fondamentali di una data multiplicità, x_2 punti di una stessa altra multiplicità, ecc., questi stessi numeri si ritrovano anche nell'altro piano per i gruppi di punti di una stessa, eventualmente diversa multiplicità. Ulteriori dimostrazioni di queste proprietà vennero date in seguito da altri. — La proprietà 3), per corrispondenze birazionali fra due piani, fu data da *G. Loria* (Atti R. Accad. di Torino, vol. 26 (1890—91), p. 289.)

[12]) Mem. cit. [5]), e altra negli stessi Atti, vol. 18 (1930), Mem. n° 2, § 5. Le notazioni di Montesano sono diverse dalle mie, e implicano qualche cambiamento di segno. Con quest'avvertenza, i quadri A e B di Montesano per due spazi S_3, quadri che sono poi matrici quadrate, coincidono coi miei determinanti (1) e (2).

punti e le linee fondamentali separatamente sono in essi in egual numero e dello stesso tipo e multiplicità, le equazioni rappresentative si invertono col semplice scambio degli apici. Così p. es. nella trasformazione di 2° ordine, nella quale ai piani dei due spazi (π, π') corrispondono nell'altro spazio le quadriche aventi a comune una conica (γ, γ') e un punto (P, P') fuori di essa:

$$\begin{aligned} \pi' &= 2\pi - P - \gamma \\ P' &= \pi - \gamma \\ \gamma' &= 2\pi - 2P - \gamma \end{aligned}$$ [13])

Rileviamo, conforme alla proprietà 5), che, essendo nullo nel determinante della sostituzione lineare un elemento della diagonale principale, è pure nullo il suo complemento algebrico.

Vale anche la pena di rilevare che le equazioni della trasformazione (3,3) in cui ai piani di ciascuno dei due spazi corrispondono nell'altro le superficie cubiche passanti per una sestica di genere 3 (γ, γ'):

$$\begin{aligned} \pi' &= 3\pi - \gamma \\ \gamma' &= 8\pi - 3\gamma \end{aligned}$$

rimangono valide se la sestica si spezza (in uno dei due spazi, e quindi anche nell'altro) in una quintica razionale (che indichiamo ancora con γ, γ') e nella sua quadrisecante[14]); poichè quest'ultima è allora curva fondamentale di 2ª specie, e non interviene nella rappresentazione. L'unica superficie fondamentale, in ciascuno dei due spazi, sia nel caso della sestica che della quintica, è di ordine 8, colla curva stessa come tripla, e luogo delle trisecanti di questa. Se la sestica si spezza in 4 rette mutuamente sghembe (a, b, c, d; risp. a', b', c', d') e nelle loro due secanti comuni[15]), queste ultime sono pure rette fondamentali di 2ª specie, e la superficie anzidetta di 8° ordine si spezza nelle 4 quadriche determinate dalle prime 4 rette a 3 a 3:

$$\begin{aligned} \pi' &= 3\pi - a - b - c - d \\ a' &= 2\pi - b - c - d \\ b' &= 2\pi - a - c - d \\ c' &= 2\pi - a - b - d \\ d' &= 2\pi - a - b - c \end{aligned}$$

---

[13]) Quest'ultimo 2° membro rappresenta il cono quadrico che da P proietta la conica γ, le cui generatrici corrispondono ai singoli punti della conica γ' dell'altro spazio.

[14]) Cfr. ad es. *E. Bertini*, Collectanea in memoriam D. Chelini (Milano 1881), p. 313.

[15]) *Cayley*, London M. S. Proced. (1), vol. 3 (1870), p. 174; Coll. Mathem. Papers, vol. 7, p. 233; *Cremona*, Über die Abbildung der algebraischen Flächen, Mathem. Ann., vol. 4 (1871), p. 213; Opere matem. III (Milano 1917), p. 260; in part. p. 267.

Aggiungo un esempio, tra i più semplici, di trasformazione cremoniana in cui i sistemi omaloidici nei due spazi sono composti di superficie di ordine diverso: nell'uno spazio superficie cubiche aventi a comune una quintica di genere uno γ e un punto P fuori di questa; nell'altro, superficie di 4^o ordine aventi a comune una conica doppia c' e anche una quintica γ' di genere uno[16]). Le relative equazioni sono:

$$\begin{array}{ll} \pi' = 3\pi - P - \gamma & \pi = 4\pi' - 2c' - \gamma' \\ c' = 3\pi - 2P - \gamma; & P = \pi' - c' \\ \gamma' = 5\pi - 2\gamma & \gamma = 10\pi' - 5c' - 3\gamma' \end{array}$$

Le superficie fondamentali corrispondenti alle due linee γ' e γ sono luoghi rispett. delle trisecanti di γ e delle corde di γ' appoggiate alla conica c'.

4. Per varietà a 3 dimensioni (ci limitiamo a questo caso) sulle quali la base del sistema di superficie comprenda un maggior numero di elementi, o che contengano qualche punto multiplo isolato, i risultati precedenti possono anche applicarsi, in parte. — Se non vi sono punti multipli, la proprietà 1) del n. 2 va così modificata: *Nelle due varietà M, μ le somme del numero base delle superficie e del numero complessivo dei punti e delle linee fondamentali sono eguali.* Ovvero: *La differenza fra i numeri delle superficie costituenti la base nelle due varietà M, μ è eguale alla differenza fra il numero complessivo dei punti e delle linee fondamentali di μ e M.* P. es. sulla V_3^3 di S_5, ∞^1 razionale normale di piani (non cono), la base delle superficie è costituita dai piani α e dalle quadriche direttrici q. Questa V_3^3 si proietta univocamente sullo spazio S_3 da una retta r di un suo piano; numeri base, 2 e risp. 1; elementi fondamentali, 1 (la retta r) e 2, il punto P e la retta p immagini rispett. del piano α e della q passanti per r. Equazioni:

$$\begin{array}{ll} \pi = \alpha + q - r & \alpha = \pi - p \\ P = \alpha - r; & q = \pi - P \\ p = q - r & r = \pi - P - p \end{array}$$

I due determinanti valgono entrambi $+1$; ma non sussiste la proprietà 5): l'espressione di q (elemento della base) contiene P (punto fondamentale), e non viceversa.

La V_3^4 di S_6, anche ∞^1 razionale normale di piani α (non cono) con unica quadrica direttrice q, si proietta univocamente su S_3 da un suo

[16]) *Cremona,* Rend. Ist. Lomb. (2), vol. 4 (1871), p. 269; Opere matem. III, p. 241; esempio 2^o, b).

piano α: numeri base, 2 e 1; elementi fondamentali, 0 e 1; la sola retta p di S_3 immagine di q:

$$\pi = \alpha + q; \qquad \alpha = \pi - p$$
$$p = q \qquad q = p$$

Se vi è un punto multiplo isolato, occorre computare anche questo come elemento della base, o come punto fondamentale; p. es. nella proiezione di una forma cubica di S_4 con punto doppio ordinario D da questo punto su S_3, nasce in S_3 un'unica curva fondamentale γ_4^6, traccia del cono di rette di vertice D sulla forma cubica. Indicando con F le sezioni iperpiane di questa forma, si ha:

$$\pi = F - D \qquad F = 3\pi - \gamma$$
$$\gamma = 2F - 3D \qquad D = 2\pi - \gamma$$

Eventuali punti doppi ulteriori della forma danno luogo, nella proiezione su S_3, a punti doppi della curva γ_4^6; ma non modificano la rappresentazione finchè questa curva non si spezzi.

(Eingegangen den 23. Juni 1941.)