Gino Fano

Sui cerchi ortogonali a due cerchi dati

Revista Univ. Nac. Tucumán, Serie A, Vol. **2** (1941), p. 87–94

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1941_1>

SUI CERCHI ORTOGONALI A DUE CERCHI DATI

DI GINO FANO
(Torino, Italia)

---

1. Bertrand Gambier, in una Nota pubblicata due anni or sono nel *Bulletin des Sciences Mathématiques* [1], ha considerato un problema interessante e suscettibile di qualche ulteriore osservazione e sviluppo. Dati due cerchi in piani distinti, non giacenti su una stessa sfera, e non concatenati (« enlacés »), che non incontrino cioé la retta intersezione dei loro piani in coppie di punti entrambe reali e separantisi, egli si propone di costruire un cerchio ulteriore ortogonale ai due primi (che li incontri cioé in due punti ciascuno, e ad angolo retto). A tal uopo, considerata la sfera ortogonale comune ai due cerchi dati (cioè ortogonale al sistema lineare ∞^3 di sfere determinato dai due fasci che hanno tali cerchi per basi), sfera che nelle ipotesi fatte è reale, egli trasforma con un'inversione quest'ultima sfera in un piano π; perciò i due cerchi dati in cerchi coi centri in π e contenuti in piani perpendicolari a π rispett. secondo loro diametri AA', BB'. Ogni cerchio perpendicolare a questi ultimi sarà pure ortogonale al piano π; e si riconosce facilmente che gli estremi CC' del suo diametro contenuto in π saranno, in questo stesso piano considerato come rappresentante reale di una variabile complessa, la coppia armonica comune a AA', BB'.

Ciò premesso, analiticamente, la soluzione è immediata, unica, e reale (nel piano) col relativo cerchio. Se le coppie AA', BB' sono rappresentate in questo piano dalle equazioni di 2° grado, a coefficienti in generale complessi:

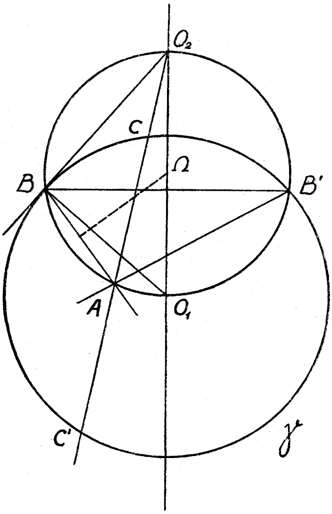
$$a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2 = 0$$
$$b_0 z^2 + 2b_1 z + b_2 = 0$$

[1] *Cercles perpendiculaires et un paradoxe relatif aux imaginaires*, *Bull. des Sciences Mathém.*, 2me sér., t. 63 (1939). Cah. Août-Sept., pp. 233-38.

la coppia CC′ sarà rappresentata dall'equazione :

$$\begin{vmatrix} z^2 & 2 & 1 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0$$

Per darne una costruzione geometrica, l'A. suppone che la stessa precedente inversione abbia mandato all'infinito il punto A′ : allora sarà necessario e sufficiente che i punti C, C′ siano simmetrici rispetto ad A, e stiano sopra un cerchio γ passante per B, B′ e su una corda di questo cerchio coniugata alla BB′. Supposto il problema risolto, e chiamando O_1 il centro del cerchio γ, O_2 il polo della retta BB′ rispetto a questo cerchio, pel quale polo deve passare la retta CC′, saranno retti i due angoli O_1AO_2, O_1BO_2; perciò O_1, O_2 diametralmente opposti sul cerchio dei tre punti ABB′, il cui centro Ω sta appunto su O_1O_2, asse del segmento BB′. Le rette AO_1, AO_2, perpendicolari fra loro e armoniche rispetto a AB, AB′, bisecheranno gli angoli di queste ultime due. Evidentemente, per i punti C, C′ ottenuti con la soluzione analitica, perciò reali (nel piano), la retta CC′ deve tagliare il segmento finito BB′ (ossia è, come nella figura, bisettrice interna dell'angolo BAB′). Considerando l'altra bisettrice, quindi il cerchio di centro O_2 passante per BB′, non incontrato in punti reali dalla retta AO_1, si hanno punti $\overline{C}$, $\overline{C'}$ immaginari coniugati, e un cerchio immaginario, con lo stesso centro reale A, in un piano reale e perpendicolare al precedente, raggio immaginario puro, differente dal precedente pel solo fattore i.



In questa seconda soluzione che ora compare e non si è presentata nella trattazione analitica, Gambier vede un paradosso (apparente, e che io nemmeno chiamerei tale). La spiegazione, che dal testo forse non appare molto chiara, risiede tuttavia nelle stesse parole con cui Gambier chiude la Nota : « ce faisant (con la trattazione analitica), nous admettions implicitement que l'espace (plan) était formé uniquement de points réels, de sorte que toute solution avec des points tels que $\overline{C}$, $\overline{C'}$ devait nous échapper... » Ogni problema si intende infatti posto rispetto ad un campo determinato di elementi, e va risolto in questo campo; uscendone, non c'è da sorprendersi che si presentino altre soluzioni.

2. Volendo che questa nuova soluzione si presenti anche nella trattazione analitica, occorrerà riferirci ad un campo di numeri anch'esso opportunamente esteso.

Il piano reale, con un unico punto all'infinito — ovvero la sfera reale, riferita biunivocamente a questo piano per proiezione stereografica — sono notoriamente rappresentazioni reali della retta, o di una qualsiasi forma di prima specie *complessa*: possono cioè mettersi in corrispondenza biunivoca e continua, senza eccezioni, col sistema degli elementi complessi di questa forma, p.es. facendo corrispondere all'elemento di coordinata complessa $x + iy$ il punto del piano reale di coordinate cartesiane ortogonali x, y. Ma quando nel piano si vogliano considerare anche punti immaginari, non potranno i risultati relativi applicarsi alle forme di prima specie complesse, senza averne prima convenientemente esteso l'insieme degli elementi, introducendone altri che abbiano per immagini i punti complessi del piano. E' ciò che ha fatto C. Segre [2] introducendo dei punti *bicomplessi*, che devono pensarsi appartenenti, entro la forma di prima specie complessa, a tutte quelle figure le cui corrispondenti nel piano reale contengono i punti complessi immagini dei primi. Volendo far uso della rappresentazione analitica, insieme ai punti bicomplessi occorre introdurre altresì come loro coordinate *numeri bicomplessi*; dovremo cioè considerare x, y a loro volta come numeri complessi:

$$x = x_1 + hx_2, \qquad y = y_1 + hy_2$$

dove x_1, x_2, y_1, y_2 sono reali, mentre h, pur soddisfacendo alla relazione $h^2 = i^2 = -1$, è una nuova unitá immaginaria, essenzialmente distinta da $\pm i$. Per questi numeri:

$$x + iy = x_1 + hx_2 + i(y_1 + hy_2) = x_1 + hx_2 + iy_1 + ihy_2$$

l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione soddisfano alle stesse

[2] *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, Mathem. Annalen*, vol. 40 (1892), p. 413, in part. n. 23 e seg.

leggi dell'aritmetica ordinaria, comprese le proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione. Essi differiscono però dai numeri complessi ordinari (cioè a una sola unità immaginaria) [3] per la proprietà che un prodotto di tali numeri può annullarsi anche senza che si annulli uno dei fattori. Esistono precisamente due sistemi di numeri, detti ***nullifici*** o ***divisori dello zero,*** non nulli, ma tali che il prodotto di due di essi rispett. dei due diversi sistemi è sempre nullo. I due sistemi sono formati rispett. dai numeri $h \mp i$ (che si annullerebbero per $h = \pm i$) e dai loro prodotti per numeri complessi o bicomplessi qualunque. Pertanto l'equazione di 2° grado di radici, generalmente complesse, c, c', numeri aventi per immagini i punti C, C′, cioè l'equazione :

$$(z - c)(z - c') = 0$$

risulta pure soddisfatta se i due fattori $z - c$, $z - c'$ si eguagliano rispettivamente a due numeri nullifici η, η' dei due diversi sistemi; tali cioè che sia in pari tempo :

$$z = c + \eta = c' + \eta'$$

D'altra parte [4] punti le cui coordinate differiscono per nullifici dell'uno o dell'altro sistema (quali appunto c e $c + \eta$, c' e $c' + \eta'$) hanno per immagini nel piano (o sulla sfera) reale punti complessi di una stessa retta isotropa dell'uno o dell'altro fascio (sistema). La nuova soluzione è data dunque, nel piano, dalle intersezioni ulteriori, distinte dai punti ciclici, delle due coppie di rette isotrope passanti per C, C′; e queste sono precisamente i punti dianzi indicati con $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{C}}'$. Per convincersene, basta pensare che le coppie di punti CC′, $\overline{\mathrm{C}}\overline{\mathrm{C}}'$, su rette perpendicolari, con lo stesso punto medio A, a distanze da A differenti per il solo fattore immaginario i, sono i fochi rispettivamente reali ed immaginari di un sistema di coniche a centro confocali.

3. Questa constatazione appare più ovvia ancora se dal piano passiamo, per proiezione stereografica, alla sfera [5]. Ai due fasci di rette

[3] HANKEL, *Vorlesungen über die komplexen Zahlen*, Leipzig, 1867; in part. § 29-30.

[4] C. SEGRE, *loc. cit.*, n. 26, 29.

[5] Ciò sempre nell'ipotesi fatta da principio che i due cerchi proposti non siano concatenati. Se lo fossero, la sfera ortogonale a entrambi non sarebbe reale, e cadrebbe tutto il procedimento.

isotrope del piano corrispondono sulla sfera i due sistemi di generatrici immaginarie, anche isotrope. Nella retta complessa le coppie di punti armoniche rispetto a AA' formano un'involuzione, che ha per immagine sulla sfera l'omografia biassiale involutoria avente come assi la retta AA' e la sua polare reciproca rispetto alla sfera. Analogamente per le coppie armoniche a BB'. Una coppia armonica in pari tempo ad AA' e BB' dovrà dunque avere come congiungente una retta incidente in pari tempo a AA', BB' e alle loro reciproche. Supposte AA', BB' in posizione generica, otteniamo così due nuove rette distinte e sghembe, ancora reciproche rispetto alla sfera; dunque una secante questa sfera, l'altra non secante; perciò sulla sfera una coppia di punti reali C, C' e una di punti immaginari $\overline{C}$, $\overline{C'}$. E questi ultimi sono precisamente le intersezioni ulteriori delle coppie di generatrici isotrope della sfera uscenti dai punti reali C, C'.

4. Non è forse privo di interesse trattare la stessa questione per altra via, che comprende anche il caso di due cerchi concatenati.

Due cerchi reali μ, ν in piani distinti e senza punti comuni nè reali nè immaginari, perciò anche non giacenti su una stessa sfera, segnano sulla retta intersezione dei loro piani due coppie di punti, ciascuna di punti reali o immaginari coniugati, determinanti un'involuzione **I**, ellittica nel caso dei cerchi concatenati, iperbolica in ogni altro caso. Essi sono inoltre basi per due fasci di sfere, senza alcuna sfera comune, e contenuti perciò in un unico sistema lineare ∞^3 Σ, avente come centro radicale il punto centrale O dell'involuzione **I**. La sfera **S** ortogonale al sistema Σ ha per centro O, ed è reale o immaginaria secondo che la **I** è iperbolica od ellittica; su ogni suo diametro le sfere del sistema Σ segnano coppie di un'involuzione (quale ad es. la **I**), i cui punti doppi appartengono alla sfera **S**.

Nella proiezione stereografica di una sfera sul piano, i cerchi (reali ed immaginari) del piano sono proiezioni delle sezioni piane di questa sfera, e cerchi ortogonali sono proiezioni di cerchi anche ortogonali della sfera, cioé i cui piani sono coniugati rispetto a questa sfera. Analogamente, le sfere e i cerchi dello spazio si ottengono, nella proiezione stereografica di una sfera Γ dello spazio a 4 dimensioni, dalle sezioni spaziali e piane di quest'ultima. Il cerchio intersezione di Γ con un piano α è ortogonale alle ∞^2 sfere segate dagli S_3 passanti per la retta a polare di α rispetto a Γ, e agli ∞^3 cerchi segati dai piani appoggiati ad a e che incontrano α secondo rette; e sono pure ortogonali le loro proiezioni.

Dati pertanto in S_3 due cerchi μ, ν come detto sopra, essi saranno proiezioni delle intersezioni di Γ con due piani α, β non contenuti in un S_3, e aventi perciò a comune un unico punto P (del quale O, punto centrale della **I**, è la proiezione). Un cerchio ortogonale ai primi sarà proiezione dell'interserzione di Γ con un piano incidente secondo rette ad α, β — perció passante per P — e appoggiato alle due rette a, b, polari di questi piani rispetto a Γ; piano dunque incidente secondo rette ai 4 piani α, β, Pa, Pb. Esistono in generale due piani soddisfacenti a queste condizioni, reciproci rispetto al cono circoscritto da P alla sfera Γ (rispetto al quale cono sono piani reciproci α e Pa, β e Pb); quindi appunto due cerchi ortogonali a μ, ν. Se la sfera **S** ortogonale ai due cerchi μ, ν è immaginaria, immaginari quindi l'intersezione di Γ coll' S_3 polare di P e il detto cono circoscritto da P a Γ, in altri termini se P è interno alla sfera Γ, i due piani anzidetti sono entrambi secanti rispetto a Γ, e i due cerchi ortogonali a μ, ν entrambi reali. Se invece la sfera **S** e il cono anzidetti sono reali, saranno sempre reali i piani dei due cerchi ortogonali a μ, ν, ma uno di questi sarà immaginario.

5. Le sfere ortogonali ad un cerchio ne contengono i due fochi, cioè i vertici, immaginari coniugati, dei coni isotropi passanti per esso. La sfera **S** ortogonale comune ai due cerchi μ, ν ne contiene perciò i 4 fochi. Si hanno casi particolari interessanti del problema suindicato:

1° quando questi 4 fochi stanno a coppie (uno di μ e uno di ν) su generatrici, quindi su rette isotrope r', s' della sfera **S**, immaginarie coniugate e necessariamente sghembe [6], sicchè la sfera **S** sarà certo immaginaria e l'involuzione **I** ellittica. Ció equivale a dire che i due cerchi μ, ν si appoggiano entrambi a queste generatrici. È il caso dei cerchi *paratattici* [7].

[6] Se i 4 fochi stessero in un piano, i cerchi μ, ν starebbero su una sfera. Cfr. J. L. COOLIDGE, *A Treatise on the circle and the sphere*, p. 449, Oxford, 1916.

[7] COOLIDGE, *loc. cit.*, pp. 344, 451. Cerchi paratattici sono appunto cerchi reali ortogonali ad una stessa sfera immaginaria e appoggiati a due generatrici di questa, immaginarie coniugate. Sono traiettorie di un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni conformi. Il nome è dovuto a analogia con le «parallele paratattiche» o «parallele di Clifford» della geometria non euclidea ellittica (v. ad es. FANO, *Geometria non Euclidea*, Bologna, 1935, n. 78), cioé appunto, nella metrica proiettiva rispetto alla detta sfera come assoluto, rette appoggiate a due generatrici immaginarie coniugate di questa. Due qualunque di tali rette hanno ∞^1 perpendicolari comuni, e anzi ∞^2 se sono rette reciproche rispetto all'assoluto (caso analogo a quello dei cerchi in biinvoluzione).

2° (caso ulteriormente particolare) quando le 4 rette congiungenti i fochi dell'un cerchio coi fochi dell'altro sono tutte isotrope e contenute nella sfera **S**; il che equivale a dire che ciascuno dei due cerchi μ, ν contiene i fochi dell'altro. E'il caso dei cerchi *in biinvoluzione* [8]. Ogni sfera per uno dei due cerchi è allora ortogonale all'altro cerchio. I due cerchi stanno in piani perpendicolari, hanno i centri sulla retta intersezione di tali piani, e le coppie di punti loro intersezioni con questa retta si separano armonicamente [9].

Nel caso 1° i piani α, β saranno incidenti alle rette r, s della sfera Γ aventi per proiezioni r', s'; perciò le rette a, b loro polari rispetto a Γ si appoggeranno ai piani polari di r, s, cioè ai piani Pr, Ps. I quattro piani α, β, Pa, Pb sono dunque tutti incidenti a r, s [10] e, a coppie, reciproci rispetto al cono circoscritto da P alla sfera Γ; dal che si trae ch'essi sono piani di un medesimo sistema di un cono quadrico di vertice P in S_4. Invero, nello spazio S_3 delle due rette r, s, la polarità rispetto alla sfera γ intersezione di questo spazio con Γ lascia fisse, oltre a γ, ∞^2 quadriche (tra le ∞^3) passanti per r, s, e tutte le coppie di rette loro intersezioni residue, le quali sono rette reciproche rispetto a γ; perciò due qualunque di queste coppie di rette stanno in una medesima quadrica, e i 4 piani che le proiettano da P sopra un medesimo cono quadrico di S_4.

Vi sono perciò in questo caso ∞^1 piani per P — quelli dell'altro sistema del medesimo cono quadrico — che incontrano in rette i 4 piani α, β, Pa, Pb, e pertanto ∞^1 cerchi ortogonali a μ e ν, incontranti ciascuno di questi in coppie di punti dell'involuzione di polo O su μ, ν stessi. I piani di questi ∞^1 cerchi (in S_3) formano un cono quadrico inviluppo di vertice O [11]. Ciascuno di questi ∞^1 cerchi è intersezione di una sfera ortogonale al cerchio μ e di una sfera ortogonale a ν. Si ha quindi la proposizione:

Dati due cerchi paratattici, le due involuzioni su di essi aventi per polo il loro punto di egual potenza si possono riferire biunivocamente in

[8] Coolidge, *loc. cit.*, pp. 314, 449-51. V. anche Colombo, *Sistemi lineari di cerchi e sfere* (Berzolari-Vivanti-Gigli, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, vol. 2°, pp. 323-67, in part. n. 14; Milano, Hoepli, 1937).

[9] I due cerchi perpendicolari comuni ai cerchi μ, ν considerati ai n. 1-3 sono appunto in biinvoluzione (Coolidge, p. 450) e concentrici.

[10] Ad es. il piano Pr, essendo incidente alla retta a, incontra il piano Pa secondo una retta; e perció quest'ultimo piano è incidente alla retta r.

[11] Gambier, *loc. cit.*; Coolidge, *loc. cit.*, pp. 344, 451-453.

modo che sempre la sfera ortogonale a uno dei due cerchi in una arbitraria di quelle coppie incontri l'altro cerchio nella coppia corrispondente. Se la sfera ortogonale p. es. a μ nei due punti di una coppia XY della prima involuzione incontra ν nella coppia ZW dell'altra involuzione, la sfera ortogonale a ν nei due punti ZW incontrerà μ nei punti XY.

Nel caso 2° è evidente che i due fasci di sfere aventi μ, ν come cerchi basi sono tali che ogni sfera dell'uno è ortogonale ad ogni sfera dell'altro; e pertanto queste sfere si incontrano, a coppie, secondo ∞^2 cerchi, tutti ortogonali in pari tempo a μ e ν. Nello spazio S_4, le rette *a*, *b* giacciono ora rispett. nei piani β e α, e pertanto i piani cercati, le cui intersezioni con la sfera Γ si proiettano in cerchi ortogonali a μ e ν, sono tutti quelli incidenti secondo rette ai soli due piani $\alpha \equiv Pb$, $\beta \equiv Pa$.

6. Indichiamo con (μ), (ν) i piani dei due cerchi dati, con M, N i fasci di sfere passanti rispett. per essi, con *m*, *n* le rette centrali di questi fasci. Ogni cerchio ρ bisecante μ e ν è intersezione di due sfere determinate (eventualmente piani) dei fasci M, N, rispetto alle quali i piani (μ), (ν) hanno determinati poli A, B, appartenenti rispett. a *m*, *n*. Il cerchio ρ sarà ortogonale a μ e ν ogniqualvolta il suo piano (ρ) sarà coniugato ai piani (μ), (ν) rispetto alle sfere $\mu\rho$, $\nu\rho$; cioè quando tale piano conterrà la retta AB. Variando il piano (ρ) nella stella O, varia in questa medesima stella il piano OAB; la corrispondenza che così nasce fra le due stelle sovrapposte è quadratica [12], e se ne cercano gli elementi uniti. Questi sono generalmente in numero di *quattro* [13], compresi i due piani fondamentali (μ), (ν); gli altri due forniscono le due soluzioni del problema. Nel caso particolare 1° i piani degli ∞^1 cerchi ortogonali a μ e ν inviluppano un cono quadrico, e sono tutti elementi uniti. La corrispondenza quadratica è allora involutoria; e proiettivamente dello stesso tipo dell'inversione rispetto a un cerchio nel piano [14]. Nel caso 2° la corrispondenza si riduce all'identità.

[12] Variando il piano (ρ) in un fascio, i fasci di sfere M e N e le punteggiate descritte da A e B su *m*, *n* sono tutte forme in corrispondenza algebrica e biunivoca, perciò proiettiva; e la retta AB descrive perciò generalmente una rigata quadrica.

[13] Cremona, *Mem. Accad. Bologna* (2), vol. V (1864), p. 33; *Opere Matem.*, vol. II, Milano, p. 216, 1915.

[14] Bertini, *Annali di Matem.* (2), vol. 8 (1876), pp. 11, 146 ; in part. Osserv. p. 19.