Gino Fano

Su alcune particolari reti di quadriche dello spazio ordinario

Revista Univ. Nac. Tucumán, Serie A, Vol. **I** (1940), p. 271–281

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1940_3>

SU ALCUNE PARTICOLARI RETI DI QUADRICHE

DELLO SPAZIO ORDINARIO

DI GINO FANO
(Torino, Italia)

1. In un lavoro in corso di stampa nei *Commentarii Mathematici Helvetici* [1] ho considerati i sistemi ∞^4 di quartiche piane ($\mathbf{C}^4$) ovunque tangenti a una quintica generale $\mathbf{C}^5$ (cioè tangenti a questa in 10 punti, generalmente distinti), distinguendo quelli (in numero di 2015) le cui curve hanno i 10 punti di contatto su una cubica, e che ho chiamati del 1° tipo, da quelli (in numero di 2080) che non godono di questa proprietà, e che ho chiamati del 2° tipo [2].

In ciascuno di questi sistemi ∞^4 è contenuto un numero finito di $\mathbf{C}^4$ spezzate in due coniche (il che richiede appunto 4 condizioni). Questo spezzamento può tuttavia verificarsi in due modi: ciascuna delle due coniche può essere cioè tangente alla $\mathbf{C}^5$ in 5 punti, e i loro 4 punti comuni non appartengono allora alla $\mathbf{C}^5$; oppure le due coniche possono essere tangenti alla $\mathbf{C}^5$ in soli 3 punti per ciascuna, e incontrarla ulteriormente in uno stesso gruppo di 4 punti, potendo questi ultimi, quali punti doppi della $\mathbf{C}^4$ complessiva e appartenenti alla $\mathbf{C}^5$, considerarsi come un caso particolare di punti di contatto (coppie di intersezioni coincidenti) delle due curve. Questo secondo caso può presentarsi tuttavia solo per i sistemi di $\mathbf{C}^4$ del 2° tipo, poi-

[1] *Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piane generale, Comm. Math. Helv.*, vol. 12 (1939-40).

[2] Aggregando a questi il sistema ∞^5 delle coniche doppie, che possono anche considerarsi come particolari $\mathbf{C}^4$ ovunque tangenti alla $\mathbf{C}^5$, si hanno in totale $1 + 2015 + 2080 = 4096 = 2^{2,6}$ sistemi di $\mathbf{C}^4$ tangenti alla $\mathbf{C}^5$ nei gruppi di altrettante serie lineari, una delle quali è la serie canonica, e tutte risultanti dalla bisezione della g_{20}^{14} segnata sulla $\mathbf{C}^5$ dalla totalità delle quartiche piane.

chè per quelli del 1° tipo la cubica dei 10 punti di contatto dovrebbe avere a comune 7 punti con ciascuna delle due coniche, distinte e in generale irriducibili: il che non è possibile.

Un modo semplice e intuitivo di mettere in evidenza uno dei detti sistemi di $\mathbf{C}^4$ del 2° tipo è il seguente. In una rete generica Σ (sistema lineare ∞^2) di quadriche dello spazio a 4 dimensioni (considerata come una forma fondamentale di 2ª specie, ossia come un piano) gli ∞^1 coni formano una $\mathbf{C}^5$ generale [3]; e i sistemi di quadriche tangenti ai singoli S_3 dello spazio a 4 dimensioni (ossia i coni delle reti σ sezioni di Σ con questi S_3) formano uno (affatto generico) dei detti sistemi di $\mathbf{C}^4$ ovunque tangenti alla $\mathbf{C}^5$. I vertici degli ∞^1 coni della rete Σ hanno per luogo una curva δ_6^{10} (di ordine 10, genere 6) normale, in corrispondenza birazionale colla detta $\mathbf{C}^5$, e sulla quale gli S_3 segnano la serie lineare g_{10}^4 immagine di quella dei gruppi di contatto delle varie $\mathbf{C}^4$ colla $\mathbf{C}^5$. La curva base della rete Σ è notoriamente una $\mathbf{C}_5^8$ canonica.

Le particolari $\mathbf{C}^4$ del sistema spezzate in due coniche devono pertanto corrispondere a spazi S_3 nei quali il sistema dei coni della rete σ, sezione di Σ, si spezza in due sistemi quadratici (o d'indice 2). Se le due coniche sono 5 — tangenti alla $\mathbf{C}^5$, i loro punti comuni non appartengono a quest'ultima curva; ad essi corrispondono perciò nella rete Σ quadriche non coni, e soltanto tangenti allo spazio S_3 in parola: nella rete σ dunque semplicemente coni, non coppie di piani.— Nell'altro caso invece le quadriche della rete σ corrispondenti ai 4 punti comuni alle due coniche sono coppie di piani. E infatti, se fossero semplicemente S_0 — coni, essendo essi elementi doppi per la ∞^1 complessiva di coni contenuta nella rete σ, i loro vertici apparterrebbero alle curve basi di tutti i fasci passanti per tali coni entro σ (sarebbero anzi punti doppi di tali curve), e sarebbero quindi punti basi della rete σ, nonchè di Σ; perciò anche punti comuni alle due curve δ_6^{10} e $\mathbf{C}_5^8$, le quali, viceversa, nel caso di una rete Σ generica non hanno punti comuni. Pertanto: *I quattro elementi comuni ai due sistemi quadratici di coni entro la rete σ sono nel primo caso* (precisamente) S_0 — *coni, nel secondo caso coppie di piani.*

[3] Oltre al mio lav. cit., n^i 9, 10, cfr. W. P. MILNE, *The 5-tangent conics of the plane quintic curve, Journ. London Mathem. Soc.* vol. 2 (1927), p. 79, nonchè W. L. EDGE, *The geometry of a net of quadrics in four-dimensional space, Acta Mathem.*, vol. 64 (1935), p. 185; in part. n° 19 e seg. Per i sistemi di $\mathbf{C}^4$ ovunque tangenti a una $\mathbf{C}^5$ i nomi (puramente convenzionali) di 1° e 2° tipo sono usati da Edge e da me in modo scambiato.

2. La configurazione di questo secondo caso è stata studiata da W. L. Edge[4]: le reti σ di questo tipo si ottengono dalla Σ dello spazio S_4 segandola con uno dei 10 spazi S_3 determinati dalle coppie di trisecanti coniugate della curva δ_6^{10} (Edge, *l. c.*). Gli 8 punti basi della rete σ si distribuiscono fra gli 8 piani delle 4 coppie contenute nella rete, in modo che per ciascuno di quei punti passano 4 degli 8 piani e in ciascuno di questi piani stanno 4 degli 8 punti basi, vertici di un quadrangolo completo, i cui 6 lati sono le intersezioni di questo piano con quelli delle altre 3 coppie. Prendendo ad arbitrio 3 piani di 3 diverse coppie e quel piano della quarta coppia che non contiene il punto intersezione dei primi tre (il che può farsi in 8 modi diversi), questi 4 piani e i 4 rimanenti determinano due tetraedri, in tutto dunque 4 coppie di tetraedri (complessivamente cogli stessi vertici e le stesse faccie), tali che sempre ciascuno dei due tetraedri è in pari tempo inscritto e circoscritto all'altro, e pertanto essi si corrispondono in una polarità nulla[5]. Indicando con ABCD, A′B′C′D′ una prima coppia di tetraedri, in modo che al vertice A del primo corrisponda nella polarità nulla il piano $\alpha \equiv AB'C'D'$, e analogamente per gli altri vertici e piani $\beta, ..., \alpha', \beta', ...$, le altre tre coppie di tetraedri si ottengono scambiando in ciascuna delle precedenti quaderne, sia di vertici che di piani, due dei 4 elementi coi due dell'altra indicati colle stesse lettere e differenti dai primi solo nell'apice.

Variando la coppia di tetraedri, varia la polarità nulla, ossia il

[4] *L. c.*, nonchè: *The net of quadric surfaces associated with a pair of Möbius tetrads, Proceed. London Math. Soc.* (2) vol. 41 (1936), p. 337. In questo n° 2 sono riportate, sommariamente e con qualche complemento, alcune proprietà delle reti σ di questo tipo esposte da Edge.

[5] La considerazione di queste coppie di tetraedri risale notoriamente a Möbius (*Journ. f. Math.*, vol. 3 (1828), p. 273; Werke, vol. 1°, p. 439); la polarità nulla è stata considerata per la prima volta da Giorgini (*Mem. soc. Ital. d. Scienze*, vol. 20; Modena, 1828; p. 243). V. pure Plücker, *Neue Geometrie des Raumes*, vol. 1° (1866), p. 213. Schröter (*Journ. f. Mathem.*, vol. 93 (1882) p. 132. in part. p. 142-49) considera anche una figura più complessa: 12 punti di una quartica di 1ª specie (che però non compaiono tutti in modo uniforme) coi quali possono formarsi 12 gruppi G_8 autoassociati (cioè basi di reti di quadriche) e 24 coppie di tetraedri di Möbius, e che si distribuiscono a quaderne in 28 piani; nonchè un gruppo di 14 rette (anzichè di 8; cfr. in seguito) colle medesime 2 traversali. A coppie di tetraedri di Möbius sono ancora dedicati due lavori recenti di B. Gambier (*Bull. Sc. Mathém.* vol. 62 (1938), p. 72; *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3) t. 56 (1939) p. 71. Per altra letteratura cfr. *Encykl. d. Mathem. Wissenschaften*, III A B 5*a*: E. Steinitz, *Konfigurationen der projectiven Geometrie*, n. 6.

relativo complesso lineare di rette; e si hanno così 4 complessi lineari mutuamente in involuzione. In queste 4 polarità le rette $a = \alpha\alpha'$, $b = \beta\beta'$, $c = \gamma\gamma'$, $d = \delta\delta'$ hanno per corrispondenti, in un certo ordine, le AA′, BB′, CC′, DD′; le due secanti comuni (distinte) delle prime 4, che designeremo con e, f, si appoggiano pure alle ultime 4, e sono rette unite per le 4 polarità. Le quaderne di piani, α, α', ae, af e analoghe, e le quaderne di punti AA′ef, ... sono tutte armoniche.

Le 4 polarità nulle generano un gruppo abeliano di 16 operazioni involutorie, per le quali tutte sono unite le rette e, f, e cioè: le polarità stesse; le 6 omografie loro prodotti a due a due; i loro prodotti a tre a tre, ossia le polarità rispetto alle 4 quadriche contenenti i regoli intersezioni delle medesime terne di complessi lineari; il prodotto delle 4 polarità nulle (e in pari tempo delle 4 polarità ordinarie), che è l'omografia biassiale involutoria di assi e, f; infine l'identità. Le 8 omografie operano su ciascuna delle quaderne di rette a, b, c, d; AA′, BB′, CC′, DD′ come un gruppo rettangolo (Vierergruppe); e subordinano su ciascuna delle due rette e, f anche un gruppo consimile (composto di tre involuzioni mutuamente armoniche e dell'identità).

La configurazione complessiva dipende da 17 parametri: poichè una rete generica di quadriche in S_3 dipende da 21 parametri, e occorrono 4 condizioni perchè essa contenga un egual numero di coppie di piani. D'altra parte il tetraedro ABCD dipende da $3 \cdot 4 = 12$ parametri, e da altri 5 la prima polarità nulla (o complesso lineare) che con esso determina l'altro tetraedro [6]. La configurazione ha pertanto $17 - 15 = 2$ invarianti assoluti (proiettivi), dati p. es. dai birapporti delle due quaderne di punti $e\,(a, b, c, d)$ e $f\,(a, b, c, d)$, eguali risp. a quelli delle quaderne di piani $f\,(a, b, c, d)$ e $e\,(a, b, c, d)$ o anche e (AA′, BB′, CC′, DD′), f (AA′, ...), o delle quaderne di punti f (AA′, ...), e (AA′, ...).

La curva $\mathbf{C}_3^6$ luogo dei vertici dei coni quadrici contenuti nella rete σ è spezzata nelle 6 rette a, b, c, d, e, f; le prime 4 sono assi delle coppie di piani contenute nella rete, mentre e, f sono luoghi dei vertici dei due sistemi ∞^1 d'indice 2 degli S_0 — coni. In corrispondenza ai punti ea, eb, ...; fa, fb, ... tali coni si spezzano in due piani. Cia-

[6] GAMBIER, *l. c.*, arriva allo stesso risultato partendo dai 24 parametri da cui dipendono gli 8 vertici dei due tetraedri, e osservando che perchè essi si corrispondano in una polarità nulla occorrono 8 condizioni, una delle quali è però conseguenza delle altre.

scuno di questi due sistemi ∞^1 di coni quadrici ha come inviluppo una « superficie di complesso » di Plücker, di 4° ordine e 4ª classe, colle rette e, risp. f come doppie ; gli 8 punti A, B, ... A′, ... anche come doppi, e gli 8 piani $\alpha, \beta, \ldots \alpha', \ldots$ pure come doppi (tangenti lungo coniche). Entrambe le superficie sono invarianti rispetto al gruppo proiettivo G_{16} dianzi considerato [7].

3. La rete σ e la configurazione testè studiata danno luogo a casi ulteriormente particolari quando le due coniche che insieme costituiscono la $\mathbf{C}^4$ dei coni della rete si spezzano a loro volta, una o entrambe, in due rette, perciò i due sistemi di S_0 — coni in fasci; con che la rete σ viene a contenere 5 o 6 coppie di piani. Queste reti, dipendendo da un minor numero di costanti, non s'incontrano tuttavia come sezioni spaziali di una rete Σ di S_4 del tipo più generale.

La rete σ con 6 coppie di piani — e pertanto coi coni distribuiti in 4 fasci incontrantisi a due a due secondo queste coppie di piani — si presenta ad es. quando gli 8 punti basi sono i vertici di un cubo [8]; le quadriche della rete hanno allora tutte il punto comune alle diagonali del cubo come centro, e le parallele condotte per questo punto agli spigoli come assi: fra esse è compresa una sfera. Prescindendo da questa particolarizzazione metrica — mettendoci cioè, dal punto di vista proiettivo, nel caso più generale di questo tipo — si tratta delle ∞^2 quadriche aventi un comune tetraedro autopolare, e passanti per un punto generico dello spazio (non appartenente ad alcuna faccia del tetraedro) e quindi anche per i coniugati armonici di questo rispetto alle coppie di elementi opposti (vertici e facce, e spigoli opposti) del detto tetraedro [9]. La figura complessiva si compone di 8 punti e 12 piani (nel caso del cubo, i piani delle 6 facce, e quelli delle 6 coppie di spigoli opposti); per ogni punto passano 6 piani, in ogni piano stanno 4 degli 8 punti [10].

[7] Cfr. F. Klein, *Ueber die Plückersche Komplexfläche, Math. Ann.* vol. 7 (1874); *Ges. Math. Abh.*, vol. 1° (1921), p. 161.

[8] V. p. es. Fano-Terracini, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* (Torino, 1929) n. 315, p. 592 (2ª adiz., p. 604).

[9] Estensione allo spazio del problema di geometria proiettiva piana inteso a costruire il fascio di coniche determinato dal suo triangolo autopolare e da un punto base.

[10] Comprendendo anche i 4 vertici del tetraedro fondamentale, si ha la configurazione *desmica* di 12 punti, 12 piani e 16 rette (nel caso del cubo, i 12 spigoli

Assunto il comune tetraedro autopolare come fondamentale per le coordinate proiettive, e uno dei punti basi come punto unità, gli 8 punti basi avranno le coordinate omogenee tutte eguali in valor assoluto all'unità, colle varie combinazioni di segni. Le 6 coppie di piani della rete saranno rappresentate dalle equazioni $x_i \pm x_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3, 4 ; i \neq k)$; passeranno dunque risp. per i vari spigoli del tetraedro autopolare, e saranno armoniche rispetto alle due facce cui questi spigoli appartengono. La rete σ potrà rappresentarsi coll'equazione:

$$\lambda (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) + \mu (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + \\ + \nu (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2) = 0.$$

Ciascuno dei 4 fasci di coni della rete ha come vertice fisso uno dei vertici del tetraedro fondamentale (nella relativa equazione manca sempre una delle coordinate). Entro la rete le equazioni di questi fasci sono $\lambda \pm \mu \pm \nu = 0$.

Accoppiando due di questi fasci e in pari tempo gli altri due — il che può avvenire in tre modi — si hanno 3 diverse configurazioni del tipo del n° prec.: le rette a, b, c, d coincidono sempre con due coppie di spigoli del tetraedro fondamentale, e e, f colla terza coppia. Gli 8 punti basi possono ora distribuirsi in due tetraedri di Möbius in $4 . 3 = 12$ modi, in corrispondenza a altrettante polarità nulle, che si ripartiscono in tre quaderne di polarità permutabili, generanti gruppi G_{16} abeliani del tipo già indicato. Ad es. per la quaderna corrispondente alla ripartizione dei 4 indici delle coordinate nelle coppie 12-34, i 4 complessi lineari hanno le equazioni:

$$r_{13} + r_{42} + r_{14} + r_{23} = 0,$$
$$r_{13} + r_{42} - r_{14} - r_{23} = 0,$$
$$r_{13} - r_{42} + r_{14} - r_{23} = 0,$$
$$r_{13} - r_{42} - r_{14} + r_{23} = 0;$$

ed è ovvio ch'essi sono mutuamente in involuzione.

I 24 tetraedri (12 coppie di Möbius) possono determinarsi p. es. costruendo in tutti i modi possibili un quadrangolo semplice sghem-

e le 4 diagonali). V. ancora nella *Encykl. d. Math. Wiss.* l'art. cit. di E. STEINITZ, n. 8, e III C 11, L. BERZOLARI, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, n. 97.

bo che abbia i vertici in 4 degli 8 punti basi della rete σ, e i lati passanti rispett. per i 4 vertici del tetraedro fondamentale. Potendo il primo vertice scegliersi in 8 modi, il secondo in 4, il terzo in 3, il quarto in 2, si hanno in tutto $8 . 4 . 3 . 2 = 192$ possibilità, che si riducono però a sole $\frac{192}{8} = 24$ distinte, poichè il quadrangolo rimane invariato permutandone i vertici circolarmente, e anche sostituendo a queste permutazioni le inverse [11].

La figura complessiva attuale è trasformata in sè dalle omografie indicate al n° prec. — ora in 3 modi diversi — e dai loro prodotti, non più tutti involutori. Il gruppo totale (certo finito) delle trasformazioni omografiche di questa figura si compone di 192 operazioni, potendosi individuare una di queste col far corrispondere ai 4 vertici del tetraedro fondamentale (autopolare) i vertici stessi secondo una qualsiasi delle loro 24 permutazioni, e a uno assegnato degli 8 punti basi della rete σ ancora uno arbitrario degli stessi 8. Gli altri 7 punti basi essendo i coniugati armonici del primo rispetto alle coppie di elementi opposti del tetraedro fondamentale, e così pure a partire da uno qualunque di essi, è ovvio che anche questi punti non potranno che risultarne permutati.

4. Una rete di quadriche σ del primo tipo considerato al n° 1 si presenta invece segando la rete Σ dello spazio S_4 con un S_3 quadritangente alla curva base $\mathbf{C}_5{}^8$ (Milne, Fano, *l. c.*): curva che ammette precisamente $2^4\,(2^5 - 1) = 496$ spazi cosí fatti. Gli 8 punti basi della rete σ sono allora a due a due infinitamente vicini; si riducono quindi a soli 4 distinti, non complanari, in ciascuno dei quali le ∞^2 quadriche della rete hanno una tangente fissa. Questi 4 punti sono vertici di altrettanti coni quadrici contenuti nella rete, tutti completamente individuati, poichè di ciascuno di essi si conoscono tre generatrici e i relativi piani tangenti (convenientemente legati fra loro).

Prendiamo i 4 punti basi distinti come vertici del tetraedro fondamentale delle coordinate proiettive x, y, z, t. Uno dei 4 coni suddetti, p. es. quello di vertice $x = y = z = 0$, sia rappresentato (cosí si può sempre supporre) dall'equazione:

[11] Nel caso del cubo, i 24 tetraedri possono determinarsi prendendo tre spigoli consecutivi a due a due non paralleli (Fano-Terracini, *l. c.*); il che può farsi appunto in $12 . 2 = 24$ modi. Due terne di spigoli mutuamente opposti danno tetraedri di una stessa coppia.

$$yz + zx + xy = 0. \tag{1}$$

Saranno allora $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$ i piani tangenti ad esso lungo le generatrici $y = z = 0$, $z = x = 0$, $x = y = 0$. Ciò implica di aver preso il punto unità sulla retta $(x = y = z)$ polare rispetto al cono del piano $x + y + z = 0$ (« piano Pascal » della figura formata dalle 3 generatrici e piani tangenti considerati).

Le tangenti fisse delle quadriche della rete σ nei vertici (x), (y), (z) del tetraedro fondamentale staranno rispett. nei piani anzidetti $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$; e potranno rappresentarsi rispett. con equazioni del tipo:

$$y + z = y + at = z - at = 0,$$
$$z + x = z + bt = x - bt = 0,$$
$$x + y = x + ct = y - ct = 0,$$

dove a, b, c sono certe costanti, e i singoli binomi, eguagliati a zero, rappresentano i piani che congiungono queste tangenti agli spigoli del tetraedro fondamentale uscenti dai loro punti di contatto. Le equazioni dei 3 coni della rete di vertici (x), (y), (z) saranno pertanto:

$$\begin{aligned} yz + byt - czt &= 0, \\ zx + czt - axt &= 0, \\ xy + axt - byt &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

delle quali la (1) è — come deve essere — combinazione lineare (e precisamente la somma, membro a membro) [12]. E la tangente comune ai coni (2) e a tutte le quadriche della rete nel punto (t), vertice del cono (1), è la retta:

$$ax = by = cz. \tag{3}$$

Anche questa rete dipende, come quella del n° 2, da 17 parametri,

[12] Due qualunque dei coni (1) e (2) s'incontrano, all'infuori della generatrice comune, secondo una cubica sghemba passante per tutti 4 i vertici. P. es. la cubica intersezione dei primi due coni (2) può rappresentarsi colle equazioni:

$$x = \frac{-ckt}{k-a}, \qquad y = \frac{ckt}{k+b}, \qquad z = kt;$$

dove k è il parametro, i cui valori 0, a, $-b$, ∞ corrispondono rispett. ai punti (t), (x), (y), (z).

e ha perciò due invarianti proiettivi: i mutui rapporti $a:b:c$. Variando le a, b, c proporzionalmente, rimane fissa la retta (3); e soltanto il punto unità si sposta sulla retta $x=y=z$.

Combinando linearmente le (2) coi parametri λ, μ, ν, e ordinando rispetto alle variabili, l'equazione generale di una quadrica della rete assume la forma:

$$\lambda yz + \mu zx + \nu xy + a(\nu-\mu)xt + b(\lambda-\nu)yt + c(\mu-\lambda)zt = 0.$$

Tale quadrica è pertanto un cono quando:

$$\begin{vmatrix} 0 & \nu & \mu & a(\nu-\mu) \\ \nu & 0 & \lambda & b(\lambda-\nu) \\ \mu & \lambda & 0 & c(\mu-\lambda) \\ a(\nu-\mu) & b(\lambda-\nu) & c(\mu-\lambda) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nello sviluppo di questo determinante sono nulli 15 dei 24 termini, e 6 dei rimanenti sono a coppie eguali. Facendo uso di simboli sommatori di ovvio significato, esso può scriversi:

$$\Sigma\, a^2\lambda^2(\mu-\nu)^2 - 2\,\Sigma\, ab\lambda\mu(\lambda-\nu)(\nu-\mu) = 0. \tag{4}$$

Pensando le λ, μ, ν come coordinate proiettive omogenee nella rete σ, si vede subito che in questa quartica (∞^1 di coni) sono elementi doppi i tre coni (2) —di coordinate $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ $(0,0,1)$— perchè nessuna delle λ, μ, ν entra nella (4) a grado maggiore di 2; e cosí pure il cono (1) —di coordinate $(1,1,1)$—, essendo la (4) omogenea di 2° grado nelle differenze $\lambda-\mu$, $\mu-\nu$, $\lambda-\nu$. La quartica si spezza perciò (come già sapevamo) in due ∞^1 quadratiche, passanti entrambe per i coni (1) e (2).

Mettendo in evidenza nella (4) il carattere di equazione omogenea di 2° grado nei 3 prodotti $\lambda\mu$, $\mu\nu$, $\lambda\nu$, si può scriverla così:

$$\Sigma\,(a+b)^2\lambda^2\mu^2 - 2\,\Sigma\,(a^2+ab+ac-bc)\lambda^2\mu\nu = 0\,; \tag{4'}$$

e risolvendo p. es. rispetto a $\lambda\mu$, si ha:

$$\begin{aligned}\lambda\mu = \frac{1}{(a+b)^2}\big[\{(a+b)(a+c)-2bc\}\lambda\nu &+ \\ + \{(a+b)(b+c)-2ac\}\mu\nu \pm \sqrt{-4abc(a+b+c)}&(\lambda\nu-\mu\nu)\big],\end{aligned} \tag{5}$$

che sono già le equazioni separate delle due ∞^1 quadriche di coni.

Nel caso particolare $a = b = c = 1$ la $(4')$ diventa:

$$\lambda^2\mu^2 + \mu^2\nu^2 + \nu^2\lambda^2 - \lambda^2\mu\nu - \mu^2\nu\lambda - \nu^2\lambda\mu = 0\,;$$

e si spezza in:

$$(\lambda\mu + \varepsilon\mu\nu + \varepsilon^2\nu\lambda)(\lambda\mu + \varepsilon^2\mu\nu + \varepsilon\nu\lambda) = 0,$$

dove ε è radice cubica immaginaria dell'unità positiva. Ciò appare anche immediatamente dalla (5).

5. Anche la rete σ del n° 4 può specializzarsi ulteriormente in modo che il sistema ∞^1 dei coni si spezzi in 4 fasci. Occorre a tal uopo (e basta) che 4 dei fasci determinati dalle coppie di coni (1) e (2) si compongano per intero di coni, e pertanto che 4 di queste coppie abbiano lungo la generatrice comune (che è sempre uno spigolo del tetraedro fondamentale) lo stesso piano tangente. *Due* dei tre piani $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$, tangenti al cono (1) lungo le generatrici già indicate, dovranno dunque coincidere rispett. coi piani $by - cz = 0$, $cz - ax = 0$, $ax - by = 0$, tangenti lungo le stesse rette ai singoli coni (2); e dovranno per conseguenza sussistere *due* delle tre relazioni $b + c = 0$, $c + a = 0$, $a + b = 0$ (le quali due sono incompatibili colla terza, non potendo le a, b, c essere tutte nulle). In altri termini, due delle costanti a, b, c saranno eguali ed opposte alla terza, e quindi eguali fra loro; p. es. $a = b = 1$, $c = -1$. La (5) si riduce allora a:

$$\lambda\mu = \frac{1}{2}\{\lambda\nu + \mu\nu \pm (\lambda\nu - \mu\nu)\}\,;$$

e si spezza nelle due $\lambda\mu = \lambda\nu$, $\lambda\mu = \mu\nu$; conduce cioè ai 4 fasci di coni $\lambda = 0$, $\mu = \nu$, $\mu = 0$, $\lambda = \nu$, le cui equazioni (indicando sempre con k il parametro) sono le seguenti:

$$\begin{gathered}(ky + z)(x - t) + (k - 1)\,xt = 0,\\ (x + [k - 1]\,t)(y + z) + kyz = 0,\\ (kx + z)(y + t) - (k - 1)\,yt = 0,\\ (y - [k - 1]\,t)(x + z) + kxz = 0.\end{gathered}$$

Questi fasci hanno rispett. lungo le rette $x = t = 0, y = z = 0$, $y = t = 0$, $x = z = 0$ (spigoli a due a due opposti del tetraedro fondamentale) i piani tangenti fissi $x - t = 0$, $y + z = 0$, $y + t = 0$, $x + z = 0$. I primi due fasci hanno a comune la coppia di piani $(y + z)(x - t) = 0$ ($k = 1$ nel primo, $k = 0$ nel secondo); gli altri due la coppia di piani $(x + z)(y + t) = 0$ ($k = 1$, risp. $k = 0$).

In questo caso le tangenti fisse nei 4 punti basi sono a loro volta lati di un quadrangolo sghembo, di cui i piani tangenti suindicati sono le facce [13].

[13] Se fosse semplicemente $b + c = 0$, p. es. $b = 1$, $c = -1$, mentre a conserva un valore generico (diverso da ± 1), la rete conterrebbe due soli fasci di coni ($\lambda = 0$, $\mu = \nu$) e un sistema ∞^1 quadratico; e delle 4 tangenti fisse due sole coppie sarebbero incidenti.