I Grandi Matematici Italiani online

GINO FANO

GINO FANO

Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale

Comment. Math. Helv., Vol. **12** (1940), p. 172–190

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1940_2>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale

Di GINO FANO, Lausanne

F. P. WHITE, in un lavoro di circa dieci anni fa [1]), dopo aver considerato una quintica piana generale e certe coppie di coniche tangenti ad essa in 5 punti, e messa questa figura in relazione con una forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni, aggiunge (pag. 349): „I have not succeeded in discovering how the remaining (1024) conics arise from the four-dimensional figure.“ E la stessa questione mi ripeteva recentemente il Prof. W. P. MILNE.

Le rimanenti coniche (e coppie di coniche) sopra accennate appaiono piuttosto in analoga relazione con altre forme cubiche, e con altre figure a 3 o 4 dimensioni, come viene mostrato nella presente Nota (che tratta pure qualche altra questione, connessa colla precedente).

1. Dicendo che due curve piane (generalmente prive di punti multipli) di ordini m, n, uno almeno dei quali numero pari, sono „ovunque tangenti“, intenderemo che sono tangenti in ogni loro punto comune, perciò in $\frac{mn}{2}$ punti, generalmente distinti.

Una quintica piana generale (C^5), essendo di genere 6, ammette 2015 coniche ad essa ovunque tangenti, in corrispondenza alle $2^5\,(2^6 - 1) = 2016$ funzioni theta dispari ad essa associate, all'infuori di quell'una che, annullandosi insieme con tutte le sue derivate prime e seconde per valori nulli degli argomenti, conduce al sistema delle ∞^2 rette doppie, che possono considerarsi come coniche particolari (degeneri), pur esse ovunque tangenti alla C^5.

La quintica ammette inoltre $2^{2\cdot 6} = 4096$ sistemi distinti di quartiche ovunque tangenti. Uno di questi è costituito dalle coniche doppie, che segnano su di essa la g^5_{10} canonica; gli altri sistemi sono ∞^4, e per ognuno di essi i G_{10} di contatto costituiscono sulla C^5 una g^4_{10} completa non speciale [2]). Fra essi, 2015 contengono risp. le curve ottenute sommando alle

[1]) On the 5-tangent conics of a plane quintic curve, Proceed. London Math. Soc. (2), Vol. 30 (1930), p. 347.

[2]) Che siano serie lineari risulta dal fatto che i G_{10} di contatto delle quartiche di uno stesso sistema stanno a coppie anche su una quartica, e possono quindi tutti segarsi con quartiche passanti per uno arbitrario di tali G_{10}. Le varie serie g^4_{10} che qui compaiono (inclusa la g^5_{10} canonica) risultano dalla bisezione della g^{14}_{20} segnata sulla C^5 dalla totalità delle quartiche.

singole coniche (propriamente dette) ovunque tangenti alla C^5 il sistema ∞^2 delle rette doppie: questi hanno i G_{10} di contatto appartenenti a cubiche piane [3]), godono tutti delle medesime proprietà, e li diremo *del 1⁰ tipo.* Gli altri $2^5 (2^6 + 1) = 2080$ sistemi di quartiche godono anche tutti delle stesse proprietà, diverse però in parte dalle precedenti, e li diremo *del 2⁰ tipo.* Fra altro, i loro G_{10} di contatto non stanno su cubiche piane, e formano sulla C^5 serie lineari g^4_{10} non contenenti la g^2_5 ivi segata dalle rette.

D'altra parte ogni coppia di coniche ovunque tangenti alla C^5 costituisce una (particolare) quartica, pur essa ovunque tangente alla C^5, la quale deve appartenere a uno dei sistemi di quartiche sopra indicati. Ora, tali coppie di coniche (includendovi il sistema delle rette doppie, computato come *una* conica) sono in numero di $\binom{2016}{2}$; e il sistema di quartiche considerato da WHITE (l. c.), che è uno generico del primo tipo, ne contiene 496, computato anche il sistema di una conica propriamente detta (la $S = 0$ del n⁰ 2, l. c.) e delle rette doppie [4]). Ne segue che il numero delle coppie di coniche contenute in ogni sistema ∞^4 di quartiche del 2⁰ tipo sarà $\dfrac{\binom{2016}{2} - 496 \cdot 2015}{2080} = 496$; sicchè *Ciascuno dei sistemi* ∞^4 *di quartiche ovunque tangenti alla* C^5 — escluso quello delle coniche doppie — *contiene precisamente 496 coppie di coniche* (computate sempre, per ciascun sistema del 1⁰ tipo, le rette doppie come *una* conica di una delle coppie) [5]).

Entro ciascuno dei sistemi ∞^4 di quartiche ovunque tangenti alla C^5, sia del 1⁰ che del 2⁰ tipo, le quartiche tangenti nei gruppi G_{10} di una g^1_{10} formano un sistema ∞^1 d'indice 2 [6]). L'inviluppo di tali quartiche è com-

---

[3]) Devono infatti stare sopra una quartica passante per i 5 punti di contatto di una determinata conica ovunque tangente alla C^5 e per le 5 intersezioni di questa C^5 con una retta; e tale quartica si spezza in quest'ultima retta e in una cubica passante per i punti rimanenti.

[4]) Le altre 495 coppie sono considerate da *White* come „associate" alla $S = O$. Ciascuna di queste 495 coppie e la $S = O$ hanno i 15 punti di contatto colla C^5 sopra una medesima cubica; le tre coniche hanno inoltre una tangente comune, e la cubica suddetta contiene altresì i loro 3 punti di contatto con questa tangente (l. c., n⁰ 8).

[5]) È noto, analogamente, che le $\binom{28}{2} = 378$ coppie di tangenti doppie di una quartica piana si ripartiscono a gruppi di 6 fra i $63 = \dfrac{378}{6}$ sistemi ∞^1 di coniche ovunque tangenti alla quartica. I numeri 6 e risp. 496 sono appunto i valori di $2^{p-2} (2^{p-1} - 1)$ per $p = 3$ e $p = 6$, genere della quartica e risp. della quintica generale, conforme al calcolo fatto da *White*, l. c., n⁰ 9, per $p = 6$ in base ai moduli di periodicità delle funzioni theta.

[6]) Questo sistema ∞^1 è perciò contenuto in una rete di quartiche, e può considerarsi, entro la rete, come una conica in un piano. Ciascuno dei detti sistemi ∞^4 di quartiche è

posto della C^5 suddetta e di una cubica tangente a sua volta alle stesse quartiche nei gruppi di una g_6^1. Poichè il G_{10} di contatto di ogni quartica colla C^5 appartiene a ∞^3 serie g_{10}^1 entro la relativa g_{10}^4 completa, per ogni quartica si ottengono così ∞^3 cubiche ad essa tangenti nei gruppi di una g_6^3 — cioè uno dei 64 sistemi ∞^3 di cubiche ovunque tangenti alla detta quartica. Risulterà dal seguito che questo sistema ∞^3 di cubiche è per le quartiche del 1⁰ e del 2⁰ tipo risp. di quelli che hanno o non hanno i 6 punti di contatto su una conica (cioè dei 28 sistemi legati alle tangenti doppie della quartica, o degli altri 36). Complessivamente, per ognuno dei sistemi ∞^4 di quartiche tangenti alla C^5 si hanno così ∞^6 cubiche (tante quante le g_{10}^1 entro una g_{10}^4), delle quali, come si è detto, ∞^3 tangenti a ogni singola quartica.

2. Consideriamo ora nello spazio S_4 una forma cubica generale V^3, e una sua retta arbitraria r [7]). Le ∞^2 coniche γ intersezioni di V^3 coi piani passanti per r possono riferirsi proiettivamente ai punti di un piano α — che pensiamo contenuto nel medesimo S_4, e non incidente a r (con che la corrispondenza diventa una specie di prospettività) — in modo che alle coniche delle superficie cubiche (F^3) segate dagli spazi S_3 passanti per r corrispondano le rette di α. Alle ∞^1 coniche γ spezzate in coppie di rette corrispondono in α i punti di una C^5 generale; e queste stesse coppie di rette su V^3 si incontrano in punti di una curva di ordine 10 e genere 6 (Δ_6^{10}), avente 5 punti P_i comuni con r, e che da r si proietta nella C^5 suddetta. Essa, insieme con r contata due volte, costituisce la completa intersezione di V^3 colla superficie F^4 base del fascio delle quadriche prime polari dei punti di r [8]). Le coniche γ tangenti a r (delle quali 5 si spezzano in coppie di rette incontrantisi nei punti P_i di r) stanno nei piani di un S_1-cono quadrico, inviluppato dagli S_3 tangenti a V^3 nei punti di r; e ad esse corrispondono in α punti di una conica ε ovunque tangente alla C^5. I 5 punti di contatto di queste due curve sono le tracce dei piani tangenti

dunque una varietà M_4 rappresentabile su uno spazio S_4 (serie lineare g_{10}^4) in modo che alle rette di quest'ultimo corrispondano nella M_4 coniche, senza eccezioni. Tale M_4 è dunque la M_4^{16} di S_{14}, le cui sezioni iperpiane possono riferirsi alle quadriche di S_4, o una sua proiezione. Analoga osservazione (mutatis mutandis) vale per i sistemi ∞^3 di cubiche tangenti a una quartica, che avremo occasione di considerare.

[7]) Per molte delle proprietà indicate qui sopra, cfr. *White*, l. c., n⁰ 5 e seg. Alcune di esse si trovano già in una mia Memoria del 1904: Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a 4 dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti, Ann. di Matem. (3), Vol. 10 (1904), p. 251.

[8]) Poichè la V^3 è di classe 24, nella rete delle sezioni iperpiane passanti per r, considerata come un piano, vi è un sistema ∞^1 d'indice 24 di F^3 con punto doppio, segate cioè da spazi S_3 tangenti a V^3: gli spazi tangenti nei punti di r (sistema d'indice 2, da contarsi 2 volte) e nei punti della curva Δ_6^{10}.

alla detta F^4 nei punti P_i; questi piani contengono altresì le 5 rette di F^4 incidenti a r, che sono le coniugate armoniche di r rispetto alle coppie di rette di V^3 contenute nei piani stessi. Le F^3 sezioni iperpiane generiche di V^3, incontrando ogni γ in due punti, vengono a rappresentarsi sul piano α doppio con quartica di diramazione: pensando α contenuto, volta per volta, nello spazio S_3 di questa F^3 (il che non presenta difficoltà), questa rappresentazione equivale alla proiezione doppia della F^3 su α dal punto comune ad essa e a r. Poichè ogni spazio S_3 incontra la curva Δ_6^{10} suindicata in 10 punti, la quartica di diramazione in α avrà colla C^5, proiezione della Δ_6^{10}, 10 punti comuni, e non più; e sarà pertanto ovunque tangente a quest'ultima (come si può anche verificare direttamente). Otteniamo così un sistema ∞^4 di quartiche ovunque tangenti alla C^5; sistema *del 1º tipo*, poichè, in corrispondenza agli spazi S_3 (o superficie F^3) passanti per r, la quartica di diramazione si riduce al sistema della conica ε e di una retta doppia. Le 495 quartiche spezzate in due coniche, distinte entrambe da ε, corrispondono ai 495 spazi S_3 quadritangenti a V^3 (FANO, l. c.). E le ∞^6 cubiche che risultano come inviluppi residui delle quartiche tangenti alla C^5 nei gruppi di una g_{10}^1 sono immagini delle cubiche sezioni di V^3 coi piani di S_4 [9]).

Analiticamente, assunta la retta r come retta $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, ogni V^3 passante per essa può rappresentarsi con un' equazione del tipo:

$$a_1 x_3^2 + 2 b_1 x_3 x_4 + c_1 x_4^2 + 2 a_2 x_3 + 2 b_2 x_4 + a_3 = 0 \tag{1}$$

dove le a, b, c sono forme nelle x_0, x_1, x_2 di grado eguale all'indice. La quadrica polare di un punto generico di r, e sia il punto $(000 x_3' x_4')$, è allora:

$$x_3' (a_1 x_3 + b_1 x_4 + a_2) + x_4' (b_1 x_3 + c_1 x_4 + b_2) = 0 \,. \tag{2}$$

Questo fascio di quadriche dipende da 20 parametri, e non muta al variare comunque nella (1) dei 10 coefficienti della forma cubica a_3; è dunque fascio delle quadriche polari dei punti di r per ∞^{10} diverse forme cubiche (1). Nel punto stesso $(000 x_3' x_4')$ le due quadriche:

$$a_1 x_3 + b_1 x_4 + a_2 = 0 \ , \ b_1 x_3 + c_1 x_4 + b_2 = 0$$

che determinano il fascio (2), hanno gli spazi tangenti:

[9]) Volendo mettere in qualche relazione questa V^3 colle ulteriori coniche ovunque tangenti alla C^5, si può osservare quanto segue. Ogni conica ξ del piano α è proiettata da r secondo un S_1-cono quadrico, incontrante V^3 in una F^6, luogo di ∞^1 coniche γ, delle quali 10 si spezzano in due rette. Quando ξ è ovunque tangente alla C^5, queste 10 coppie di rette coincidono a due a due, e i loro punti doppi sono anche punti doppi di F^6. Quando la conica ξ coincide colla ε, i 5 punti doppi sono infinitamente vicini alla retta r, la quale in tutti questi casi è doppia per la F^6.

$$a_1 x_3' + b_1 x_4' = 0 \qquad\qquad b_1 x_3' + c_1 x_4{}' = 0 \;; \tag{3}$$

e quindi il piano ivi tangente alla F^4 base del fascio è l'intersezione di questi due spazi. Al variare del rapporto $\frac{x_3'}{x_4'}$ tale piano descrive l'S_1-cono $a_1 c_1 - b_1^2 = 0$ di asse r (e questa è pure l'equazione della conica ε nel piano $x_3 = x_4 = 0$, che possiamo pensare assunto come α). Il detto piano tangente a F^4 incontra la V^3 fuori di r in una conica tangente alla r nel punto $(000 x_3' x_4')$: dalle (3) si ricava infatti:

$$a_1 : b_1 : c_1 = x_4'^2 : - x_3' x_4' : x_3'^2 \;;$$

e sostituendo nella (1), e trascurandone le soluzioni $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, le intersezioni di r colla detta conica risultano date da

$$(x_3 x_4' - x_4 x_3')^2 = 0 \;.$$

La C^5 ottenuta nel piano α $(x_3 = x_4 = 0)$ conforme a quanto sopra ha l'equazione:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & c_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

il cui primo membro è il discriminante della (1), come equazione di 2° grado in x_3, x_4. E i 5 suoi punti di contatto colla conica ε sono dati da:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & c_1 & b_2 \end{matrix} \right\| = 0$$

Il fascio di quadriche (2) determina pertanto la conica ε e questi 5 punti di contatto. Fissati questi elementi, rimangono ancora possibili ∞^{10} curve C^5, tangenti a ε nei medesimi 5 punti, alle quali corrispondono le ∞^1 forme cubiche (1) ottenute al variare dei coefficienti di a_3.

3. Siano dati ora, viceversa, nello spazio S_4, la retta r e un piano α non incidenti; e in α una conica irriducibile ε, nonchè 5 punti distinti Q_i su di essa. Prendiamo ancora ad arbitrio sulla retta r un gruppo di 5 punti P_i, proiettivo al gruppo dei punti Q_i su ε. Consideriamo l'S_1-cono quadrico Γ che da r proietta la conica ε; e in ciascuno dei 5 piani che proiettano i punti Q_i prendiamo ad arbitrio una retta s_i (distinta da r) passante per P_i. Questa figura dipende in S_4 da 24 parametri: 6 per la retta r, 5 per il cono Γ entro la ∞^2 di piani passanti per r, 5 per il gruppo dei punti Q_i, 3 per la proiettività suindicata fra la conica ε e la punteggiata r, e infine uno per

ciascuna delle rette s_i, che può scegliersi entro un fascio. L'insieme della retta r contata 3 volte e delle 5 rette s_i costituisce la linea base di una rete di quadriche di S_4 contenente il cono Γ. Invero, a una quadrica il passaggio per la retta r impone 3 condizioni; e dopo di ciò ciascuna delle rette s_i, isolatamente, ne impone altre 2. Però 4 dei piani rs_i, per es. i 4 piani $rs_1, \ldots rs_4$, definiscono, nella ∞^2 dei piani passanti per r, l'S_1-cono quadrico di asse r sul quale questa quaderna di piani è proiettiva alla quaderna $P_1 P_2 P_3 P_4$, e che è precisamente l'S_1-cono Γ dei 5 piani rs_i. Dopo di ciò, ogni piano di questo cono risulta tangente a tutte le quadriche in parola nel punto di r che ad esso corrisponde nella proiettività già considerata fra l'S_1-cono Γ e la punteggiata r; e la retta s_5 impone pertanto a tali quadriche solo più una condizione ulteriore: complessivamente dunque $3 + 2 \cdot 4 + 1 = 12$ condizioni.

Nella rete suddetta di quadriche prendiamo ora un fascio generico (non contenente il cono Γ): potendo esso scegliersi nella rete in ∞^2 modi, dipenderà in tutto da 26 parametri, e sarà pertanto un fascio affatto generico in S_4. I piani del cono Γ saranno tangenti nei singoli punti di r alla F^4 base del fascio; e così dicasi anche — nei medesimi punti — degli S_3 passanti per r e inviluppanti Γ.

Consideriamo infine nel piano α una qualunque delle ∞^{10} C^5 tangenti a ε nei punti Q_i. L'S_1-cono che la proietta da r incontrerà la F^4 base del fascio suddetto, all'infuori della r contata 5 volte e delle 5 rette s_i, secondo una curva C_6^{10} avente r stessa come 5-secante. Per ogni punto di C_6^{10} (e quindi per il piano che lo congiunge a r) passano due degli S_3 inviluppanti il cono Γ, i quali toccano la F^4 base del fascio risp. in certi due punti di r; le rette congiungenti quel punto di C_6^{10} a questi due di r hanno per luogo una rigata R^{15}, contenuta in una V^3 ben definita, che si trova rispetto ai vari elementi qui considerati nella condizione già esposta al n° prec. — Avendo preso ad arbitrio nel piano α la conica ε e la C^5 mutuamente tangenti in 5 punti, concludiamo ora, viceversa, che *Ciascuno dei 2015 sistemi ∞^4 di quartiche del 1° tipo ovunque tangenti a una C^5 può ottenersi nel modo indicato al n° prec. da una conveniente V^3 di S_4.*

4. I sistemi di quartiche ovunque tangenti a una C^5 e del 2° tipo si incontrano in relazione a una congruenza del 1° ordine di coniche nello spazio S_3, da tempo studiata da D. MONTESANO[10]).

Per una curva del 7° ordine e di genere 5 (C_5^7) dello spazio S_3 passa una

---

[10]) Su un sistema lineare di coniche nello spazio, Atti R. Acc. di Torino, Vol. 27 (1892); Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche nello spazio, II, Rendiconti R. Acc. di Napoli, 1895, p. 155. Le citazioni successive si riferiscono al primo di questi lavori.

rete di superficie cubiche (F^3), le cui intersezioni variabili sono coniche γ, appoggiate alla C_5^7 in 6 punti, e costituenti una congruenza del 1º ordine. Le coniche contenute in una stessa F^3 della rete stanno nei piani di un fascio; e pertanto i piani delle ∞^2 coniche γ, distribuendosi in ∞^2 fasci, appartengono ad una medesima stella, il cui centro P sta sulla C_5^7 anzidetta[11]). Invero i gruppi G_6 segati su C_5^7 dalle coniche γ formano una serie lineare g_6^2 contenuta nella g_7^3 segata dalla totalità dei piani; e la differenza fra le due, dovendo essere anche una serie lineare, non può essere che un punto fisso.

Le trisecanti della C_5^7 formano una rigata R^{15}, avente la C_5^7 come curva 5$^{\text{pla}}$. Poichè ogni sua generatrice deve incontrarne altre $15-2=13$, e già ne incontra $4\cdot 3 = 12$ nei 3 punti di appoggio alla C_5^7, fuori di questi punti ne incontrerà una sola, insieme colla quale costituirà una conica della congruenza. Nascono così le ∞^1 coniche γ spezzate in due rette, i cui piani passano anche per P; e, poichè ogni F^3 della rete contiene 5 di queste coppie di rette[12]), i piani stessi formeranno nella stella P un cono-inviluppo di classe 5 e genere 6, affatto generale. E la rigata R^{15}, contenendo una involuzione di coppie di generatrici di genere 6 priva di elementi doppi, sarà (per la formula di ZEUTHEN) di genere 11.

La R^{15}, all'infuori della C_5^7 quintupla, ha una linea doppia δ, luogo dei punti d'incontro delle coppie di rette costituenti coniche γ riducibili; linea di ordine 10 (MONTESANO, l. c., nº 3) e genere 6[13]). Questa linea è

[11]) Assunto il punto P come origine delle coordinate, la C_5^7 può rappresentarsi analiticamente con un sistema di equazioni $\left\|\begin{matrix} x & y & z \\ L & M & N\end{matrix}\right\| = O$, dove L, M, N sono polinomi di 2º grado nelle x, y, z. Essa è infatti l'intersezione ad es. delle due superficie cubiche $xM - yL = O$, $xN - zL = O$, all'infuori della conica $x = L = O$. Cfr. *W. P. Milne:* The 7-tangent quadrics of the same system of the C_5^7, Proceed. London Math. Soc. (2), Vol. 26 (1927), p. 119. In questo lavoro l'attenzione si concentra principalmente sulle superficie razionali di 6º ordine aventi la C_5^7 come curva doppia, e luoghi di coniche γ della congruenza (v. anche qui, nº 9). Vi compaiono incidentalmente proprietà che rientrano in quelle più generali della congruenza di *Montesano*; p. es., per un certo cono quadrico di vertice P, il fatto che i suoi piani tangenti incontrano la C_5^7 in altri 6 punti appartenenti a una conica, e che, fra tali coniche, 10 si spezzano in due rette. V. anche l'altra nota dello stesso Autore: The 5-tangent conics of the plane quintic curve, Journ. London Math. Soc., Vol. 2 (1927), p. 79.

[12]) Sopra ogni F^3 generica della rete, 10 delle 27 rette sono trisecanti della C_5^7, 16 sono corde, una unisecante. Quest'ultima appartiene alla stella P, ed è asse del fascio dei piani contenenti le coniche γ della detta F^3.

[13]) Nella quadrica (M_4^2) delle rette di S_3 la rigata R^{15} è rappresentata da una curva C^{15} di S_5, giacente a sua volta su una rigata anche di ordine 15 e genere 6 (immagine dell'insieme dei fasci di rette contenenti le coniche γ riducibili) con direttrice piana C^{10} (immagine del cono che da P proietta la curva δ_6^{10}). La C^{15} incontra questa direttrice in 5 punti, e ogni generatrice in 2 punti, sempre distinti.

incontrata da ogni F^3 della rete nei 5 punti doppi delle sue coniche γ riducibili (gruppi di punti formanti una g_5^2), e ha perciò comuni 25 punti colla C_5^7.

La C_5^7, contata 2 volte (perchè curva base), e la δ_6^{10} formano insieme la curva (di ordine complessivo 24) luogo dei punti doppi di F^3 della rete, cioè la Jacobiana di questa. La F^3 avente un punto doppio assegnato X su C_5^7 è luogo delle ∞^1 coniche γ passanti per questo punto, e i cui piani formano il fascio di asse PX; contiene le 5 trisecanti di C_5^7 per questo punto, e ha la PX stessa come sesta retta uscente dal punto doppio. Queste 6 rette stanno pertanto su un cono quadrico.

5. La congruenza delle coniche γ può rappresentarsi anch'essa (come al n⁰ 2) sopra un piano punteggiato α, in modo che alle coniche di una F^3 corrispondano le rette di α; alle γ spezzate in due rette corrisponderanno di nuovo i punti di una C^5 generale; e alle F^3 con punto doppio su δ_6^{10}, rette tangenti a questa C^5. Sugli ∞^3 piani π dello spazio le γ segano involuzioni di coppie di punti del tipo GEISER (risultanti dalle intersezioni variabili delle cubiche sezioni delle F^3 della nostra rete[14])), con C_3^6 doppia passante per le 10 intersezioni del piano stesso colla curva δ_6^{10}. I piani π risultano perciò a loro volta rappresentati su α doppio con quartica di diramazione (corrispondente alla C_3^6 di π); quartica che colla C^5 anzidetta ha comuni soltanto 10 punti (corrispondenti alle coniche riducibili i cui punti doppi stanno in π), nei quali è ad essa tangente. Sulla C^5 risulta così determinata una serie lineare g_{10}^3 (immagine di quella che i piani π segano su δ_6^{10}); e poichè questa g_{10}^3 non contiene i gruppi della g_5^2 ivi segata dalle rette (su δ_6^{10} i 5 punti doppi delle γ riducibili di una F^3 non stanno in un piano), otteniamo ∞^3 quartiche ovunque tangenti alla C^5 e appartenenti a un sistema ∞^4 *del 2⁰ tipo.*

Poichè gli ∞^3 piani si distribuiscono in ∞^4 fasci, i cui assi (rette) sono linee razionali incontranti ogni F^3 della rete in 3 punti, così le γ appoggiate a una retta avranno come immagini nel piano α punti di una cubica razionale. E le quartiche anzidette tangenti alla C^5 nei gruppi di una delle ∞^4 g_{10}^1 entro la g_{10}^3 avranno come ulteriore inviluppo una di queste cubiche razionali, ad esse 6-tangente. Otteniamo così nel piano α complessivamente ∞^4 cubiche razionali; e per ognuna delle quartiche considerate un sistema ∞^2 di tali cubiche, ad essa tangenti nei gruppi di una serie lineare g_6^2 (immagine di quella che le rette del piano π segano sulla C_3^6 doppia dell'involuzione in π stesso).

---

[14]) *C. F. Geiser,* Journ. f. reine u. angew. Mathem. vol. 67 (1866), p. 78; Math. Ann., Vol. 1⁰ (1869), p. 123.

Quest'ultima proprietà basta per affermare che queste cubiche razionali sono contenute, per ogni quartica, in uno dei 36 sistemi ∞^3 di cubiche ad essa ovunque tangenti, che *non* hanno i punti di contatto sopra coniche (all'opposto dei rimanenti 28 sistemi, legati alle singole tangenti doppie). Entro ciascuno di questi 36 sistemi ∞^3 le cubiche razionali si ripartiscono in *otto* diversi sistemi ∞^2 [15]). Le cubiche testè incontrate come immagini delle rette di un piano π costituiscono uno di questi 8 sistemi, entro il sistema ∞^3 di cui sopra.

Otteniamo però così — e conviene rilevarlo — soltanto un sistema ∞^3 di quartiche ovunque tangenti alla C^5, e non un sistema ∞^4 completo. Esso non contiene pertanto, in generale, quartiche spezzate in due coniche (come le contiene, in numero finito, il sistema ∞^4 completo). Soltanto, in corrispondenza a un piano tangente, bitangente o tritangente della C_5^7, la C_3^6 doppia dell'involuzione nel piano π viene ad avere 1, 2 o 3 punti tripli, sostituiti a altrettante coppie di punti doppi infinitamente vicini; e di conseguenza la quartica di diramazione nel piano α acquista 1, 2 o 3 punti doppi [16]).

6. Come i piani, anche tutte le superficie bisecanti le coniche γ risultano rappresentate sul piano α doppio, con curve di diramazione ovunque tangenti alla C^5. Dopo i piani, le più semplici fra queste sono le F^4 passanti per la C_5^7, in numero di ∞^{10}; esse segano sulla δ_6^{10} una serie lineare g_{15}, di dimensione $\leqq 9$; ve n'è perciò certo almeno una passante per la δ_6^{10} medesima — e nemmeno più di una, perchè due eventuali avrebbero a comune una curva complessiva di ordine $7 + 10 = 17$. Queste $\infty^{10} F^4$

---

[15]) *A. Clebsch*, Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen..., Math. Ann., Vol. 3 (1871), p. 45; *M. Noether*, Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curven 4ter Ordnung, Abhand. der K. Bayer. Akad. d. Wiss., Math. Physik. Classe, Vol. 17 (1889), p. 105. Si hanno quindi in tutto, per ogni quartica, $8.36 = 288$ sistemi ∞^2 così fatti di cubiche razionali, coordinati in certo modo ai gruppi di *Aronhold* di 7 tangenti doppie (*Aronhold*, Berl. Monatsber. 1864, p. 499; *Clebsch*, l. c., p. 57—59; *Noether*, l. c., p. 115, 119—20). *M. Noether*, studiando in generale i sistemi di curve piane tangenti ovunque a una curva data (l. c., e già prima Erlanger Ber., 1878, Heft 10, p. 81), dà un procedimento generale per ottenere tutte le curve ovunque tangenti a una data quartica $\Omega = O$ e appartenenti allo stesso „sistema" di una curva assegnata $C = O$. Indicando con $P = O$ una qualsiasi curva passante semplicemente per i punti di contatto delle due precedenti, dall' identità $CC' = P^2 - Q\Omega$ si hanno al variare di P tutte le curve $C' = O$ del sistema anzidetto. In sostanza, due curve di contatto appartengono allo stesso sistema quando i loro gruppi di contatto, presi semplicemente, sono corresiduali.

[16]) Invero, un piano tangente (o eventualmente pluritangente) alla C_5^7 è pure tangente in questo stesso punto a $\infty^1 F^3$ della rete, e sega perciò queste in un fascio di cubiche razionali col detto punto come doppio, dando così luogo a una (o più) g_2^1 sulla quartica di diramazione.

vengono così rappresentate sul piano α doppio con sestiche di diramazione, tangenti a C^5 nei gruppi di una g_{15}^9 [17]). Per la superficie particolare fra queste (φ^4) che passa per δ_6^{10} la curva di diramazione si spezza nella C^5 e in una retta; retta immagine di una F^3 della rete, luogo di coniche γ tutte tangenti a φ^4 (nel senso che devono coincidere le due loro intersezioni con φ^4 fuori dei 6 punti appartenenti a C_5^7). Questa F^3, evidentemente particolare rispetto a tutte le altre della rete, non può essere che quell'una che ha il punto P (punto particolare di C_5^7) come doppio. E la φ^4, avendo già in P una delle ulteriori 2 intersezioni colle γ di questa F^3, le avrà tutte due coincidenti con P, il quale sarà perciò punto doppio anche di φ^4 [18]). La φ^4 contiene le 5 trisecanti di C_5^7 e generatrici della rigata R^{15} uscenti da P; ha perciò in P lo stesso cono quadrico tangente della F^3 con P doppio; e la sua intersezione con questa F^3 è composta della C_5^7 e delle dette 5 rette per P.

L'intersezione di φ^4 col cono quadrico tangente comune in P ad essa e alla detta F^3 è composta delle medesime 5 rette per P dianzi nominate e di una cubica sghemba η. Le quadriche passanti per questa cubica (e anche le F^3 della rete) segnano su φ^4 una rete di C_2^5, una delle quali è spezzata nelle stesse 5 rette per P [19]) [20]).

7. La C_5^7 di S_3, come curva speciale, è proiezione di una C_5^8 canonica di S_4, intersezione generale di tre quadriche, da un suo punto O. D'altra

---

[17]) Ogni sistema completo di C^6 ovunque tangenti alla C^5 si compone di ∞^{12} curve, dei cui gruppi G_{15} di contatto solo ∞^9 sono distinti, e formano una serie lineare g_{15}^9.

[18]) Dalla rappresentazione piana di una F^3 mediante le cubiche passanti per 6 punti $A_1, A_2, \dots A_6$, supposto che le coniche γ in essa contenute abbiano per immagini le rette per A_1, perciò la C_5^7 una $C^8(A_1^2, A_2^3, \dots A_6^3)$, appare che l'intersezione ulteriore della detta F^3 con una F^4 passante per C_5^7 avrebbe per immagine una $C^4(A_1^2, A_2, \dots A_6)$; e questa non può incontrare tutte le rette per A_1 in altri due punti coincidenti, se non si riduce a una conica, immagine di un punto doppio di F^3, contata due volte (o a un caso equivalente).

[19]) Le ∞^1 coniche γ della F^3 con P doppio stanno nei piani tangenti alla C_5^7 nel punto P, passano per P, ma non hanno ivi in generale la stessa tangente di C_5^7. Questa tangente sta sul cono quadrico sopra indicato, e sulla F^3 con P doppio; non su φ^4, colla quale ha le sue intersezioni tutte coincidenti con P.

[20]) Le generatrici del cono quadrico tangente in P a φ^4, avendo almeno 3 delle intersezioni con φ^4 coincidenti con P, hanno, quali corde della cubica η, le due residue intersezioni con φ^4 anch'esse coincidenti con P; e pertanto P è punto unito per l'involuzione di coppie di punti segata su φ^4 dalle coniche γ (o anche dalle corde della cubica η) e alla quale appartiene la rete di C_2^5. D'altra parte, essendo P doppio per φ^4, esso sta su tutte le C_2^5 della rete, ed è su ciascuna di queste il 6° punto unito della detta involuzione, oltre i 5 che appartengono a δ_6^{10}. — La φ^4 è caso molto particolare della superficie più generale di 4° ordine contenente una cubica sghemba.

parte sulla C_5^7, quale intersezione di due F^3 aventi a comune in più una conica, la g_8^4 canonica è segata dalle quadriche passanti per questa conica; essa è quindi la somma della g_7^3 segatavi dai piani e del punto già designato con P. In altri termini, considerata la C_5^7 come proiezione di una C_5^8 canonica, P è l'immagine del (la traccia della tangente alla C_5^8 nel) centro di proiezione O. Ogni spazio S_3 passante per la tangente in O alla C_5^8 incontra questa curva in 8 punti, dei quali due infinitamente vicini, costituenti un gruppo G_8 autoassociato (cioè intersezione di tre quadriche in S_3), e contenuto perciò in un cono quadrico di vertice O; il che conferma che, sopra C_5^7, le 6 intersezioni ulteriori con un qualsiasi piano per P stanno su una conica.

La C_5^8 sta su una rete di quadriche, e quindi sulle ∞^2 superficie F^4 basi dei fasci di quadriche contenuti in questa rete. Queste F^4 si proiettano da O nelle F^3 passanti per C_5^7. Le rette delle ∞^2 F^4 sono le corde della C_5^8, e si proiettano nelle corde della C_5^7, ciascuna contenuta generalmente in una (sola) F^3 della rete. Le trisecanti di C_5^7 (che, a coppie, costituiscono le coniche γ riducibili) sono tracce dei piani 4-secanti di C_5^8 che passano per il centro di proiezione O. Ogni cono della rete contiene due di questi piani; e pertanto la curva δ_6^{10} di S_3 luogo dei punti doppi delle coniche γ riducibili è proiezione, dallo stesso centro O, della C_6^{10} normale non speciale, luogo dei vertici dei coni quadrici contenuti nella rete suindicata.

La figura dello spazio S_3 considerata al n⁰ 4 e seg. è dunque proiezione di quella qui esaminata, da un punto della C_5^8 canonica. In particolare la curva δ_6^{10} luogo dei punti doppi delle coniche riducibili della congruenza di MONTESANO è proiezione della C_6^{10} normale luogo dei vertici dei coni quadrici passanti per la detta C_5^8 canonica. E la g_{10}^3 segata su δ_6^{10} dai piani dello spazio S_3 è immagine di quella che sulla C_6^{10} normale di S_4 segano gli S_3 passanti per il centro di proiezione O.

8. Riprendiamo la considerazione di uno qualunque dei 36 sistemi ∞^3 di cubiche piane ovunque tangenti a una quartica, presentatasi al n⁰ 5.

Da classiche ricerche di HESSE[21]) risulta che l'equazione di una quartica piana generale può mettersi in 36 modi sotto la forma di un determinante simmetrico di 4⁰ ordine, cogli elementi lineari nelle coordinate, eguagliato a zero:

$$\Omega \equiv | u_{ik} | = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

(con $u_{ik} = u_{ki}$). Dopo di che lo stesso determinante „orlato", eguagliato a zero:

---

[21]) Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung, Journ. f. reine u. angew. Mathem., Vol. 49 (1855), p. 279 (in part. p. 317; v. anche stesso vol., p. 256).

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

dove le α sono parametri omogenei, rappresenta un sistema ∞^3 di cubiche ovunque tangenti alla detta quartica; e in corrispondenza ai vari modi di mettere l'equazione della quartica sotto la forma (1) si hanno i 36 sistemi di cubiche ovunque tangenti ad essa, del tipo di quello incontrato al n° 5.

D'altra parte, indicando con y_1, y_2, y_3 le coordinate proiettive omogenee nel piano, le quali entrano linearmente nelle u_{ik}, l'equazione:

$$\Sigma\, u_{ik}\, x_i\, x_k \equiv y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3 = 0 \tag{3}$$

(dove le F sono forme di 2° grado nelle x, e le y si pensano come parametri) rappresenta una rete di quadriche, delle quali la (2), interpretandovi le α come coordinate di piani, fornisce le equazioni inviluppo. Si ha così una corrispondenza biunivoca senza eccezioni — si potrebbe dire omografica — fra i gruppi di valori omogenei delle α, cioè i piani di uno spazio S_3, e la g_6^3 dei gruppi di contatto della quartica (1) colle cubiche considerate ad essa tangenti, e quindi anche questo stesso sistema ∞^3 di cubiche. A piani di un fascio corrispondono cubiche tangenti alla quartica nei gruppi di una g_6^1.

Le cubiche razionali contenute in questo sistema ∞^3 si ripartiscono (n° 5) in 8 sistemi ∞^2 distinti (tali che ogni punto del piano è doppio per *una* curva di ciascuno di questi otto)[22]; e nella corrispondenza accennata tra il sistema complessivo ∞^3 di cubiche e lo spazio S_3 di piani questi 8 sistemi di cubiche razionali hanno per immagini le 8 stelle di piani aventi i centri nei punti basi della rete di quadriche (3) (CLEBSCH, l. c.). Gli stessi sistemi ∞^2 di cubiche razionali s'incontrano a coppie secondo $\binom{8}{2} = 28$ sistemi ∞^1 di cubiche con 2 punti doppi, spezzate in una tangente doppia della quartica (una qualunque delle 28) e in un sistema ∞^1 di coniche 4-tangenti. In corrispondenza ai 36 sistemi ∞^3 di cubiche del tipo ora considerato, ciascuno dei 63 sistemi ∞^1 di coniche 4-tangenti alla quartica deve pertanto comparire $\frac{28 \cdot 36}{63} = 16$ volte, e va combinato

[22]) Considerando la quartica in parola come contorno apparente di una F^3 rispetto a un suo punto, questi 8 sistemi di cubiche razionali sono proiezioni di reti di curve razionali sulla F^3.

precisamente colle $16 = 28 - 12$ tangenti doppie che *non* sono parti di coniche del sistema medesimo (e i cui punti di contatto non stanno pertanto, con quelli di una conica generica del sistema, sopra una conica).

Consideriamo adesso una C^5 piana generale, e uno dei sistemi ∞^4 di quartiche del 2^0 tipo ad essa ovunque tangenti. I G_{10} di contatto formano una serie lineare g_{10}^4, che possiamo rappresentare con una curva C_6^{10} di S_4; con che avremo rappresentato omograficamente il sistema dei detti G_{10} su quello degli spazi S_3 di S_4, e le g_{10}^1 entro g_{10}^4 sul sistema dei fasci di S_3, e quindi degli ∞^6 piani loro assi in S_4. D'altra parte a ognuna di queste g_{10}^1 corrisponde un sistema ∞^1 di quartiche che ha come inviluppo, oltre alla C^5, una cubica. Si hanno così complessivamente ∞^6 cubiche, riferite pur esse ai piani di S_4, e delle quali ∞^5 razionali. Quale sarà in S_4 il sistema dei piani immagini delle cubiche razionali?

Ognuna delle quartiche considerate, e sia Γ^4, è tangente a ∞^3 di queste cubiche, in corrispondenza alle ∞^3 g_{10}^1 entro g_{10}^4 che passano per il suo G_{10} di contatto con C^5. Dette cubiche risultano così riferite ai piani di uno spazio S_3 (lo spazio corrispondente al G_{10} di contatto di Γ^4 e C^5), e la corrispondenza è anche qui omografica come nel caso precedente. Invero a serie g_{10}^1 per un medesimo G_{10} entro una g_{10}^2 corrispondono cubiche inviluppi dei sistemi ∞^1 di quartiche tangenti a C^5 nei gruppi delle dette g_{10}^1; i loro G_6 di contatto con Γ^4 sono le intersezioni di Γ^4 colle quartiche ad essa infinitamente vicine entro a questi sistemi ∞^1, cioè i gruppi della serie caratteristica del sistema ∞^2 di quartiche cui dà luogo la detta g_{10}^2, all'infuori del G_{10} fisso di Γ^4; dunque i gruppi di una g_6^1.

Le cubiche razionali hanno dunque come immagini in S_4 un sistema ∞^5 di piani, tali che ogni S_3 ne contiene ∞^2, distribuiti in 8 stelle, i cui centri formano un G_8 autoassociato (cioè intersezione di 3 quadriche). Non è detto a priori che luogo di questi centri sia una curva C^8 di S_4; perchè un S_3, oltre agli 8 punti centri di stelle di piani in esso contenute, potrebbe contenere punti centri di stelle relative ad altri S_3, e delle quali un solo piano (comune ai due S_3) starebbe nel primo spazio.

Per maggiore intuitività, trasformiamo la questione per dualità in S_4. Si tratterà di un sistema ∞^5 di rette, quindi di un complesso, tale che per ogni punto generico le ∞^2 rette che ne escono formino 8 stelle, entro altrettanti S_3 (un complesso quindi di grado 8). Allora un S_3 generico entro S_4 segherà il complesso secondo un complesso di rette di S_3 di grado 8, tale che il cono uscente da ogni punto si spezza in 8 fasci. Nella M_4^2 delle rette di S_3 si ha così una M_3 luogo di ∞^3 rette, della quale perciò ogni sezione iperpiana è una rigata; sicchè tale M_3 o è una quadrica di S_4 (caso qui escluso, perchè condurrebbe a un complesso lineare di rette), oppure è una ∞^1 di piani. Il complesso in S_3 è dunque composto di ∞^1 piani rigati, e quello di S_4 di una ∞^1 (d'indice 8) di S_3 rigati.

Dualmente, la figura di piani cercata in S_4 si comporrà dei piani appoggiati a una curva C^8, e precisamente a una C_5^8 canonica, perchè incontrata da ogni S_3 in un gruppo G_8 autoassociato. Invero in ogni S_3 tangente alla C^8, fra le quadriche passanti per il G_8 autoassociato (che in questo caso comprende due punti infinitamente vicini) vi è un cono col vertice nel punto di contatto; e la C^8 si proietta perciò da ogni suo punto X (come al n° 7) in una C^7 di S_3, tale che ogni piano per l'immagine X' di X l'incontra ulteriormente in 6 punti appartenenti a una conica. Presa una retta r per X', le coniche di cui sopra contenute nei piani del fascio r avranno per luogo una superficie, per la quale r è retta semplice, in quanto per X' passa la sola conica contenuta nel piano di r e della tangente a C^7 in X'. Luogo di queste ∞^1 coniche è perciò una F^3, e la C^7 proiezione di C^8 è base di una rete di F^3, come al n° 4: dunque una C_5^7.

9. Da quanto abbiamo detto al n° 1 sui sistemi di quartiche ovunque tangenti a una C^5 — uno dei quali, del 2° tipo, è stato considerato al n° prec. — segue che vi sono 496 spazi S_3 seganti la C_6^{10} normale del n° 7 in gruppi G_{10}, ai quali corrispondono sulla C^5 gruppi di contatto con coppie di coniche [23]).

Il piano generico π col quale abbiamo segato la congruenza di coniche di MONTESANO (n° 5) — piano contenente una involuzione di coppie di punti con C_3^6 doppia — e il piano α da pensarsi doppio, con quartica di diramazione ovunque tangente alla C^5, sono fra loro in corrispondenza (2, 1); e questa corrispondenza risulta dal pensare il primo piano come rappresentativo di una superficie cubica F^3 nel modo consueto, e il secondo come proiezione doppia di questa superficie da un suo punto. Pertanto la quartica di diramazione del piano α, che appare come contorno apparente della F^3, e di conseguenza la C_3^6 doppia di π, si spezzano in due curve (razionali) quando così avviene del detto contorno apparente, ossia quando la F^3 ha 4 punti doppi; ogni qual volta cioè il piano π incontra la C_5^7 in punti tali che le cubiche per 6 (convenienti) fra essi rappresentino una F^3 così fatta. — Ora la $C_5{}^8$ canonica di S_4 ammette precisamente $2^4(2^5 - 1) = 496$ spazi S_3 ad essa 4-tangenti. Assumendo come centro di proiezione O una qualunque delle sue intersezioni con uno di questi spazi, la traccia di questo spazio sull'S_3 di proiezione è un piano che incontra la C_5^7 in un punto P, immagine di O, e in altri 6, appartenenti a una conica e a coppie infinitamente vicini. E le cubiche passanti per questi ultimi 6 punti rappresentano appunto una F^3 con 4 punti doppi.

[23]) *Milne*, Journ. London Mathem. Soc., l. c.

La congruenza di coniche di MONTESANO *ammette dunque un piano π che l'incontra secondo una involuzione di coppie di punti con curva doppia spezzata in due curve razionali ogni qual volta la C_5^7 direttrice è proiezione di una C_5^8 canonica da una delle sue intersezioni con uno spazio quadritangente.*

In generale, le coniche γ della congruenza appoggiate a una linea di ordine μ, la quale abbia colla C_5^7 ν punti comuni (MONTESANO, n° 10), hanno per luogo una superficie di ordine $3(3\mu - \nu)$, colla C_5^7 multipla di ordine $3\mu - \nu$. I piani di tali γ formano un cono inviluppo di classe $3\mu - \nu$. Si prescinde in ciò dalle coniche che passano per i punti di appoggio della data linea di ordine μ colla C_5^7, e che hanno per luoghi le F^3 della rete con questi stessi punti come doppi.

Così p. es. le coniche tangenti a un piano π assegnato, in quanto si appoggiano alla C_3^6 doppia di questo piano, che ha nelle intersezioni del piano stesso colla C_5^7 altrettanti punti doppi ($\mu = 6$, $\nu = 14$), formano una superficie di ordine 12, colla C_5^7 quadrupla.

Per un piano π il quale conduca a un piano doppio α colla quartica di diramazione spezzata in due coniche, la detta superficie di ordine 12 deve spezzarsi in due F^6 con C_5^7 doppia. E invero nel caso dianzi accennato (F^3 con 4 punti doppi) la C_3^6 doppia in π si compone della conica γ della congruenza contenuta in questo piano, e di due altre coniche, per ciascuna delle quali $\mu = 2$, $\nu = 4$; le γ che si appoggiano a una qualunque di queste ultime due coniche formano una F^6 con C_5^7 doppia, e sono a loro volta contenute nei piani di un cono-inviluppo di classe 2.

Queste F^6 sono superficie luoghi di un fascio razionale di coniche γ, perciò a sezioni iperellittiche, di genere 3, e normali per S_4. Possono rappresentarsi sul piano (MONTESANO, n° 10) con un sistema lineare di quintiche aventi a comune un punto triplo A e 10 punti semplici $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{10}$. La C_5^7 doppia ha allora per immagine una $C^{13}(A^7, B_i^3)$. Però le 10 coppie di rette che tale F^6 contiene in generale devono nel caso presente coincidere a due a due (dovendo la F^6 contenere soltanto 5 coniche riducibili); e pertanto i 10 punti basi semplici B_i devono essere a coppie infinitamente vicini, oppure allineati con A. I punti doppi di tali coppie di rette sono anche doppi per F^6. — Prendendo B_1 infinitamente vicino ad A, B_2 infinitamente vicino a B_1, inoltre B_3 e B_4, B_5 e B_6, B_7 e B_8, B_9 e B_{10} a coppie allineati con A, vi è una quintica del sistema lineare completo composta delle quattro rette $A\,B_3B_4$, $A\,B_5B_6$, $A\,B_7B_8$, $A\,B_9B_{10}$, e di una retta arbitraria per A; quindi una sezione della superficie normale F^6 di S_4 composta di una conica direttrice, immagine del punto A, contata due volte, e di un'altra conica generatrice.

Questa F^6 può proiettarsi su S_3 in modo da avere una sezione piana, proiezione della precedente, composta nello stesso modo, precisamente come a noi occorre.

10. Nella Memoria di HESSE menzionata al n° 8 è osservato che, riferendo una rete di quadriche dello spazio S_3 proiettivamente a un piano punteggiato, il luogo dei punti di questo piano corrispondenti ai coni della rete è una curva generale di 4° ordine. L'osservazione si estende facilmente a una rete di quadriche in uno spazio qualsiasi S_n, e a una curva piana di ordine $n+1$: non mi risulta però che tale estensione sia stata fatta esplicitamente, tranne che per il caso $n=4$ da W. P. MILNE [24]).

Consideriamo in S_n una rete di quadriche (Q_{n-1}) del tipo più generale. In essa, considerata come un piano π, i coni formano una curva Γ^{n+1}, mentre i vertici di questi coni hanno per luogo una curva $\varDelta$ di ordine $\binom{n+1}{2}$ e genere $\binom{n}{2}$, normale, non speciale, in corrispondenza birazionale colla detta Γ^{n+1}.

Un iperpiano S_{n-1} sega la rete anche in una rete di quadriche; i coni di quest'ultima — ossia le Q_{n-1} di S_n tangenti a tale S_{n-1} — formano entro π una curva di ordine n, le cui intersezioni con Γ^{n+1} sono date dagli $\binom{n+1}{2}$ coni della prima rete aventi il vertice nell'S_{n-1} considerato. Questa curva di ordine n è pertanto ovunque tangente a Γ^{n+1}; e in corrispondenza agli ∞^n S_{n-1} di S_n si ha in π un sistema continuo ∞^n di curve di ordine n ovunque tangenti a Γ^{n+1}.

I loro $G_{\binom{n+1}{2}}$ di contatto con Γ^{n+1} formano una serie lineare $g^n_{\binom{n+1}{2}}$ completa, non speciale, corrispondente a quella segata su $\varDelta$ dagli iperpiani.

Questa $g^n_{\binom{n+1}{2}}$ non contiene (parzialmente) la g^2_{n+1} segata su Γ^{n+1} dalle rette di π (poichè i vertici degli $n+1$ coni di un fascio entro la rete iniziale non stanno in un S_{n-1}). Si tratta dunque di un sistema di curve di ordine n ovunque tangenti a Γ^{n+1}, fra i $2^{p-1}(2^p+1)$ che *non* risultano da curve di ordine $n-2$ pure ovunque tangenti alla Γ^{n+1} sommate alle rette doppie, e i cui punti di contatto pertanto non stanno su curve di ordine $n-1$. — Fra le due serie $g^n_{\binom{n+1}{2}}$ e g^2_{n+1} su Γ^{n+1} (oppure su $\varDelta$) passa la relazione $2\, g^n_{\binom{n+1}{2}} = n\, g^2_{n+1}$.

Però n punti arbitrari di $\varDelta$ stanno in un iperpiano; e perciò la $g^n_{\binom{n+1}{2}}$ anzidetta, mentre non contiene la g^2_{n+1}, contiene (parzialmente) le g^1_n sue residue rispetto ai singoli punti. Ne segue che, preso su $\varDelta$ un qua-

[24]) *Milne*, Journ. London Mathem. Soc., l. c.

lunque G_n contenuto in un gruppo della g^2_{n+1}, lo spazio S_{n-1} da esso determinato segherà ulteriormente $\Delta^{\binom{n+1}{2}}$ in $\binom{n+1}{2} - n = \binom{n}{2}$ punti, che dovranno stare in un S_{n-2}. La curva $\Delta^{\binom{n+1}{2}}$ ha pertanto ∞^1 spazi S_{n-2} $\binom{n}{2}$-secanti, coordinati biunivocamente ai singoli suoi punti [25]) [26]).

Rappresentata la rete di Q_{n-1} con $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$, la condizione perchè questa quadrica generica sia un cono è $| \lambda U_{ik} + \mu V_{ik} + \nu W_{ik} | = 0$, dove le $U_{ik}, \ldots$ sono costanti; e, pensate le λ, μ, ν come coordinate proiettive omogenee nel piano π, questa è l'equazione della curva Γ^{n+1} sopra considerata. Il primo membro è il più generale determinante simmetrico di ordine $n+1$ cogli elementi lineari nelle tre coordinate omogenee λ, μ, ν. Sarà questa una Γ^{n+1} affatto generale, ossia potrà ogni Γ^{n+1} rappresentarsi in questo modo?

Le Γ^{n+1} piane dipendono da un numero di moduli eguale a $\frac{(n+1)\ (n+4)}{2} - 8 = \frac{1}{2}(n^2 + 5n - 12)$.

D'altra parte le reti di quadriche in S_n dipendono da $3\left[\frac{n(n+3)}{2} - 2\right]$ parametri. E le reti di S_n proiettivamente distinte dipendono da $3\left[\frac{n(n+3)}{2} - 2\right] - (n+1)^2 + 1$ parametri, numero eguale anche a $\frac{1}{2}(n^2 + 5n - 12)$.

La coincidenza di questi due numeri fa pensare che la curva Γ^{n+1} inizialmente considerata sia proprio la più generale Γ^{n+1} piana, cioè che ogni curva piana di ordine $n+1$ possa rappresentarsi con un determinante simmetrico di ordine $n+1$, a elementi lineari nelle coordinate, eguagliato a zero. E così è effettivamente.

Consideriamo infatti in un piano π una curva generale di ordine $n+1$ (Γ^{n+1}); uno qualunque dei sistemi ∞^n di curve di ordine n ovunque tangenti a questa, nei gruppi di una serie lineare $g^n_{\binom{n+1}{2}}$ che non contenga parzialmente la g^2_{n+1} ivi segata dalle rette; infine una curva $\Delta^{\binom{n+1}{2}}$ di

---

[25]) Per $n = 3$ si hanno le ∞^1 rette trisecanti di una Δ^6_3 di S_3.

[26]) La rete di quadriche si può rappresentare analiticamente come combinazione lineare di 3 sue quadriche, cioè di 3 equazioni bilineari simmetriche. Prendendo equazioni bilineari non simmetriche, si ha una rete di reciprocità, e egualmente una curva $\Delta^{\binom{n+1}{2}}$ come luogo dei punti a cui corrispondono iperpiani formanti un fascio; curva rappresentata dall'annullarsi dei determinanti di 3° ordine di una matrice a 3 orizzontali e $n+1$ verticali, cogli elementi lineari nelle coordinate. Queste curve ammettono, come è noto, due tipi di generazione proiettiva.

S_n rappresentante nel senso consueto l'anzidetta $g^n_{\binom{n+1}{2}}$, cioè riferita birazionalmente a Γ^{n+1} in modo che alla stessa $g^n_{\binom{n+1}{2}}$ corrisponda la serie segata su Δ dagli iperpiani di S_n. Si tratta di vedere se questa curva Δ sia sempre il luogo dei vertici dei coni di una rete di quadriche in S_n.

Alla g^2_{n+1} segata su Γ^{n+1} dalle rette corrisponde su Δ una g^2_{n+1} i cui gruppi non stanno in un iperpiano; e alla serie completa $g^{\frac{1}{2}n(n+3)}_{n(n+1)}$ segata su Γ^{n+1} dalla totalità delle curve di ordine n, la serie segata su Δ dalla totalità delle quadriche di S_n. Togliendo da quest'ultima serie la serie doppia della g^2_{n+1} anzidetta, rimane su Γ^{n+1} la serie segata dalle curve di ordine $n-2$, cioè la serie canonica $g^{\frac{1}{2}(n-2)(n+1)}_{(n-2)(n+1)}$, la quale su Δ dovrà venire segata dalle quadriche passanti per due gruppi arbitrari della g^2_{n+1}[27]). E poichè questi due gruppi sono composti complessivamente di $2n+2$ punti, mentre la dimensione della serie in parola è così diminuita solo di $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-2)\ (n+1)}{2} = 2n+1$ unità, concludiamo che sulla curva Δ l'insieme di due qualunque gruppi della g^2_{n+1} considerata è un gruppo G_{2n+2} ,,autoassociato'', che impone cioè alle quadriche obbligate a contenerlo solo $2n+1$ condizioni distinte[28]). Segue ancora da ciò che due qualunque dei G_{n+1} anzidetti (gruppi cioè della g^2_{n+1} su Δ) sono sistemi (simplex) autopolari rispetto a una stessa quadrica di S_n. Consideriamo ora su Δ, entro la g^2_{n+1} in parola, tutte le coppie di gruppi G_{n+1} di una stessa g^1_{n+1} generica (perciò priva di punti fissi). È facile convincersi che le quadriche aventi tali coppie di G_{n+1} come autopolari coincidono tutte[29]). Invero, in caso diverso, tali quadriche dovrebbero costituire un sistema algebrico infinito, nel quale sarebbe certo contenuto qualche cono; e d'altra parte due G_{n+1} così fatti, completamente distinti fra loro (anche se infinitamente vicini, cioè disposti secondo $n+1$ tangenti della curva Δ), possono essere autopolari per un medesimo cono soltanto nel caso di un S_k-cono il cui S_k-asse contenga $k+1$ punti di ciascuno dei due G_{n+1}; il che qui è evidentemente impossibile.

Concludiamo pertanto che ciascuna delle ∞^2 serie lineari g^1_{n+1} conte-

---

[27]) La serie segata su Δ dalle quadriche è pertanto la Jacobiana della g^2_{n+1} (come appare anche evidente su Γ^{n+1}). V. anche la mia Nota: Sulle curve algebriche contenenti serie autoresidue rispetto alla serie canonica, Rend. Ist. Lomb. (2), Vol. 63 (1930); n° 2—4.

[28]) *W. Killing*, Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analitischer Behandlung (Leipzig, 1885), p. 101. V. anche *Castelnuovo*, Rend. Circolo Matem. di Palermo, Vol. 3 (1889), p. 179.

[29]) Quest'unica quadrica sega appunto sulla curva Δ il gruppo Jacobiano della detta g^1_{n+1}.

nute nella g^2_{n+1} considerata su Δ si compone di gruppi G_{n+1} autopolari rispetto a una medesima quadrica. Si ottengono così ∞^2 quadriche, tra le quali ∞^1 coni, corrispondenti questi ultimi alle ∞^1 g^1_{n+1} con punto fisso, e il luogo dei cui vertici è la stessa curva Δ. Il sistema totale ∞^2, contenendo ∞^2 fasci (in corrispondenza ai fasci di g^1_{n+1} contenenti un medesimo gruppo G_{n+1}), è naturalmente una rete. Per conseguenza la data Γ^{n+1}, riferibile birazionalmente a Δ, è rappresentabile sotto forma di un determinante simmetrico del tipo già detto, eguagliato a zero.

Scrivendo, per semplicità dell'enunciato, $n - 1$ in luogo di n, abbiamo dunque: *Al primo membro dell'equazione di una curva piana generale di ordine* n *si può dare (in* $2^{\binom{n-1}{2}-1}(2^{\binom{n-1}{2}}+1)$ *modi) la forma di un determinante simmetrico di ordine* n, *a elementi lineari nelle coordinate* [30] [31].

---

[30]) Ragionamento e risultato valgono anche (in un numero minore di modi) per una curva Γ^{n+1} (irriducibile) con k punti doppi, considerando i sistemi di curve di ordine $n-1$ passanti pei punti doppi e tangenti a Γ^{n+1} in ogni altro loro punto comune (sistemi in ciascuno dei quali vengono a coincidere due o più di quelli del caso generale). La curva Δ si spezza allora in una di ordine $\binom{n+1}{2} - k$ e genere $\binom{n}{2} - k$ e in k sue corde, assi di S_1-coni contenuti nella rete di quadriche. Un punto multiplo di ordine $i > 2$ equivale anche in questo caso a $\binom{i}{2}$ punti doppi, e riduce di $\binom{i}{2}$ l'ordine della curva Δ; ad esso corrisponde nella rete di quadriche un S_i-cono, il cui spazio-asse si stacca dalla curva Δ.

[31]) Durante la stampa del presente lavoro mi sono accorto che qualcuna delle considerazioni qui esposte (in particolare nel n⁰ 1, e nel n⁰ 10 per il caso $n = 4$) si trovano già nella Memoria di *W. L. Edge:* The geometry of a net of quadrics in four-dimensional space [Acta Mathem., vol. 64 (1935) p. 185]. Per i sistemi di quartiche ovunque tangenti a una quintica le denominazioni (puramente convenzionali) di 1⁰ e 2⁰ tipo sono, nei due lavori, scambiate (*Edge*, l. c., n. 20).

(Eingegangen den 10. Oktober 1939.)