Gino Fano

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno

Mem. Soc. It. d. Scienze, Serie 3, Vol. **24** (1938), p. 41–66

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1938_1>

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI LE CUI SEZIONI IPERPIANE SONO SUPERFICIE DI GENERE ZERO E BIGENERE UNO

Memoria di GINO FANO

1. L. GODEAUX, in una Nota con questo stesso titolo pubblicata nel 1933 nel « Bollettino dell'Accademia Reale del Belgio » (1), ha dimostrato il teorema seguente:

Ogni varietà algebrica normale a tre dimensioni, non cono, le cui sezioni iperpiane sono superficie regolari di genere zero e bigenere uno con curva bicanonica di ordine zero (2) ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) *contiene un sistema lineare di superficie di generi uno* ($p_a = p_g = P_2 = 1$), *la cui dimensione aumentata di un'unità eguaglia la dimensione dello spazio ambiente.* Indicando con p il genere delle curve sezioni, e supponendo che sopra le superficie sezioni iperpiane della varietà proposta il sistema di queste curve sia completo anche rispetto al genere (ci è virtualmente privo di punti base, perciò di grado $2p-2$), la varietà proposta sarà del tipo W_3^{2p-2} di S_p, con curve sezioni C_p^{2p-2} normali non speciali di spazi S_{p-2}. E il teorema enunciato afferma che questa W_3^{2p-2} contiene altresì un sistema lineare ∞^{p-1} di superficie Φ di generi uno, di grado $2p-6$, a curve intersezioni di genere $p-2$.

Il ragionamento di GODEAUX è semplice. Le superficie F^{2p-2} sezioni iperpiane di W_3^{2p-2} contengono, oltre al sistema lineare $|C_p^{2p-2}|$ delle loro sezioni iperpiane, anche un ulteriore sistema $|\gamma_p^{2p-2}|$ cogli stessi caratteri, perciò di dimensione pure $p-1$, tale che ciascuno dei due è aggiunto dell'altro, e per

(1) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un.* « Bulletin Acad. de Belgique, Classe des Sciences » (5), to. XIX, 1933, p. 134.

(2) Quest'ultima condizione non è esplicitamente enunciata, ma è implicita nell'altra $P_6 = 1$.

conseguenza $2C| = |2\gamma|$ (1). Le γ_p^{2p-2}, appartenendo a spazi S_{p-1}, sono curve canoniche di genere p. Fissando sopra una C_p^{2p-2}, curva sezione di W_3^{2p-2}, $p-1$ punti generici, e considerando sulle singole F^{2p-2} che contengono la detta C_p^{2p-2} (e formano un fascio) l'unica γ_p^{2p-2} passante per tali punti (nonchè, di conseguenza, pei rimanenti $p-1$ che coi primi formano un gruppo canonico di C_p^{2p-2}), luogo di queste ∞^1 curve γ è una superficie Φ^{2p-2}, a curve sezioni canoniche (le stesse γ) e come tale di generi uno, variabile sopra W_3^{2p-2} in un sistema lineare ∞^{p-1}, perciò di grado $2p-6$ e a intersezioni variabili di genere $p-2$, come è detto nell'enunciato.

Questo risultato può essere tuttavia meglio precisato, come tosto vedremo, nonchè ulteriormente sviluppato, determinando i diversi casi delle varietà in parola, cioè i valori singoli di p (pochissimi) per cui tali varietà W_3^{2p-2} effettivamente esistono. Alcune di queste varietà, o loro casi particolari, sono stati già incontrati da GODEAUX o da me in altri lavori. In pari tempo troveremo le rappresentazioni di queste varietà (tutte razionali, all'infuori di una) sullo spazio S_3, e quindi i tipi birazionalmente distinti, finora non noti, di sistemi lineari semplici di superficie di genere zero e bigenere uno, a curva bicanonica di ordine zero ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$).

Tale è lo scopo del presente lavoro.

2. Nelle ipotesi fatte è implicito ritenere $p \geqq 4$ (per $p = 3$ la varietà W_3^{2p-2} sarebbe uno spazio S_3 quadruplo (2)). Supponiamo anzi pel momento $p \geqq 5$, e inoltre che il sistema lineare $|\Phi|$ su W_3^{2p-2} sia «semplice», tale cioè che il passaggio di una Φ per un punto generico di W_3^{2p-2} non porti di conseguenza il passaggio di essa per altri punti variabili col primo. Il sistema $|\Phi|$ rappresenterà allora nel consueto senso una varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1}, riferibile a W_3^{2p-2}, con superficie sezioni di generi uno, immagini delle Φ, e curve sezioni canoniche di genere $p-2$ (in spazi S_{p-3}) (3). Il caso $p = 4$, nel quale il sistema $|\Phi|$ appartiene a una involuzione di coppie di punti su W_3^{2p-2}, verrà trattato a parte

(1) ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, «Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL)» (3), to. X (1896), n. 39; *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, Ibid., to. XIV (1906), n. 4.

(2) Non S_3 doppio, come sembra che intenda GODEAUX, loc. cit., n. 3.

(3) Allo studio di queste varietà, del tipo (scrivendo p in luogo di $p-2$) M_3^{2p-2} in S_{p+1} con curve sezioni canoniche di genere p, sono dedicati alcuni miei lavori recenti (*Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, Tipografia Rossetti, 1936, pp. 329–349; «Rend. R. Accad. dei Lincei», ser. 6ª, vol. 23, 1° sem. 1936, p. 813, «Memorie R. Acc. d'Italia», Classe di Scienze fis. mat. e nat., vol. VIII (1936), n. 2, p. 23 sgg.). I risultati di questi lavori troveranno pertanto qui ripetuta applicazione: il primo e l'ultimo dei tre, citati di frequente, verranno designati rispettivamente colla sola indicazione *Scritti Berzolari* e «Mem. Accad. Italia».

al n. 10; mentre al n. 11 verrà stabilito che se $p \geqq 5$ il sistema $|\Phi|$ non può appartenere a una involuzione. Nella stessa ipotesi $p \geqq 5$ è da escludere che il sistema $|\Phi|$ appartenga a una congruenza di linee, perchè sopra W_3^{2p-2} il sistema lineare caratteristico delle Φ ha dimensione $p-2$ e si compone di curve di ordine $2p-2$; queste ultime curve potrebbero dunque essere composte soltanto con coniche o rette, ipotesi incompatibili coll'essere le Φ di generi uno. Perciò, colla riserva della dimostrazione che verrà data al n. 11, la trattazione che qui segue fino a tutto il n. 9 esaurisce i casi per cui $p \geqq 5$.

Poichè sopra ogni F^{2p-2}, sezione iperpiana di W^{2p-2}, è (come già osservato) $|2C| = |2\gamma|$, e pertanto i sistemi lineari $|2F|$ e $|2\Phi|$ segano sulle F curve equivalenti, GODEAUX ne deduce (senza però trarne conseguenze ulteriori) che sopra W_3^{2p-2} è altresì $|2F| \equiv |2\Phi|$. Ciò è vero tuttavia *soltanto a meno di superficie fondamentali del sistema* $|F|$ (1); superficie fondamentali che sulla varietà W_3^{2p-2} avente le F come sezioni iperpiane sono *punti multipli* (mentre su M^{2p-6} saranno vere e proprie superficie). Poichè $|F|$ e $|\Phi|$ sono rispettivamente di gradi $2p-2$ e $2p-6$, e i sistemi doppi $|2F|$ e $|2\Phi|$ di gradi $8(2p-2)$ e $8(2p-6)$, la differenza di questi ultimi numeri, cioè 32, fornirà la somma delle multiplicità di quei punti multipli di W_3^{2p-2} (2). D'altra parte su M_3^{2p-6} le superficie f immagini delle F sono pur esse di ordine $2p-2$ e quelle immagini delle $2F$ di ordine $4p-4$, mentre le 2φ, immagini delle 2Φ, perciò intersezioni con quadriche, sono di ordine $2(2p-6)$. La differenza di questi ultimi due caratteri, cioè 8, sarà quindi l'ordine complessivo delle superficie di M_3^{2p-6} immagini dei punti multipli considerati su W_3^{2p-2}; superficie fondamentali per il sistema $|f|$, come anche per $|2f|$ (sicchè $|2f| = |2\varphi| +$ queste superficie).

D'altra parte sommando alle 2φ queste stesse superficie non si deve alterarne il genere: invero le f (al pari delle F) sono superficie regolari di genere zero con intersezioni di genere p; le φ (al pari delle Φ) sono regolari di generi uno con intersezioni di genere $p-2$; perciò le $2f$ e le 2φ sono entrambe regolari di genere p. Le dette superficie fondamentali di $|f|$ contenute in M_3^{2p-6} devono dunque essere incontrate dalle 2φ, cioè dalle quadriche di S_{p-1}, secondo curve di genere zero; il che è possibile soltanto se esse sono piani (3), naturalmente in numero di *otto* (tale dovendo essere l'ordine loro complessivo).

(1) SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* «Atti R. Ist. Veneto», to. LXV, parte 2ª (1905–06), p. 635.

(2) Sopra W_3^{2p-2} il sistema $|2F|$ è segato dalla totalità delle quadriche; e pertanto $|2\Phi|$ sarà segato dalle quadriche passanti per i punti multipli di W_3^{2p-3} sopra considerati.

(3) Supposte tali superficie di ordine n (≥ 1) con curve sezioni di genere π (≥ 0), le loro intersezioni con quadriche saranno di genere $2\pi + n - 1$; perciò, se quest'ultimo genere è nullo, sarà $n = 1$, $\pi = 0$.

Sopra M_3^{2p-6} *la differenza* $2f - 2\varphi$ *è costituita da otto piani, fondamentali per* $|2f|$; *sopra* W_3^{2p-2} *la differenza corrispondente* $2F - 2\Phi$ *è costituita da otto punti quadrupli* $\left(\text{di multiplicità } \frac{32}{8} = 4\right)$, *immagini di quei piani* (1). *La varietà* W_3^{2p-2} *a superficie sezioni di genere zero e bigenere uno ha dunque 8 punti quadrupli*; e questo fatto di una W_3 vincolata soltanto ad avere superficie sezioni di un tipo determinato, e che ha di conseguenza certi punti multipli isolati, è senza dubbio particolarmente notevole. Ciascuno degli 8 piani suindicati di M_3^{2p-6} è riferito all'intorno del corrispondente punto quadruplo di W_3^{2p-2} in modo che alle coniche segate su quel piano dalle quadriche, cioè dalle superficie 2φ, corrispondono in questo intorno le sezioni con superficie 2Φ, cioè con quadriche che vi passano semplicemente. *I coni tangenti a* W_3^{2p-2} *negli 8 punti quadrupli sono perciò coni di spazi* S_6, *proiettanti superficie di Veronese.*

Due degli 8 piani di M_3^{2p-6} non possono avere a comune una retta, perchè essi costituirebbero insieme una quadrica di S_3, e questa sommata a una superficie 2φ ne aumenterebbe il genere. Possono tuttavia avere o anche non avere a comune un (solo) punto, il quale, quando vi sia, sarà doppio per M_3^{2p-6}. Nei due casi, la retta congiungente i corrispondenti punti quadrupli di W_3^{2p-2} starà o rispettivamente non starà su W_3^{2p-2}; tali coppie di punti si diranno (per brevità) rispettivamente *congiunti* e *non congiunti*. Proiettando W_3^{2p-2} da uno dei suoi punti quadrupli, le proiezioni degli altri punti quadrupli saranno per la varietà proiezione ancora quadrupli oppure tripli, secondo che sono non congiunti oppure congiunti al primo. Ripetendo l'operazione due o più volte, la multiplicità dei punti inizialmente quadrupli e congiunti a k fra i centri di proiezione si ridurrà a $4-k$.

Ci limiteremo a considerare il caso che può dirsi «generale», nel quale le coppie di piani (fra gli 8) eventualmente incidenti s'incontrino in punti tutti

(1) Alle superficie 2φ segate su M_3^{2p-6} dalla totalità delle quadriche dello spazio ambiente S_{p-1} corrispondono sulla W_3^{2p-2} di S_p le superficie 2Φ segate dalle quadriche di quest'ultimo spazio passanti per gli 8 punti quadrupli di W_3^{2p-2}; e ciò è confermato dal computo dei parametri da cui dipendono tali intersezioni. Le quadriche di S_{p-1} dipendono da $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$ parametri; per M_3^{2p-6} passano $\binom{p-4}{2}$ linearmente indipendenti fra esse; perciò il sistema $|2\varphi|$ ha dimensione $\frac{(p-1)(p+2)}{2} - \binom{p-4}{2} = 5p-11$. D'altra parte in S_p le quadriche dipendono da $\frac{p(p+3)}{2}$ parametri indipendenti; e per W_3^{2p-2} ne passano $\frac{(p-1)(p-6)}{2}$ indipendenti $\left(\text{tante quante, in } S_{p-2}, \text{ per la curva sezione } C_p^{2p-2}\right)$. Ne segue che su W_3^{2p-2} il sistema lineare di superficie segato dalla totalità delle quadriche, cioè $|2F|$, ha dimensione $\frac{p(p+3)}{2} - \frac{(p-1)(p-6)}{2} = 5p-3$: numero che differisce appunto da $5p-11$ di 8 unità.

distinti (1). Ammetteremo pure che nella configurazione degli 8 piani ciascuno di questi si comporti in egual modo rispetto all'insieme dei rimanenti; in particolare che ciascuno incontri (e quindi anche non incontri) uno stesso numero dei rimanenti. Osserviamo inoltre che la M_3^{2p-6} non può essere una ∞^1 di superficie cubiche ψ^3, contenute negli S_3 di una ∞^1 razionale normale (2). Invero le superficie f, di genere zero e bigenere uno, segherebbero le ψ^3 secondo cubiche piane, e conterrebbero di conseguenza un fascio di cubiche (ellittiche). Il sistema aggiunto a questo fascio non dovrebbe avere colle dette cubiche intersezioni variabili; dovrebbe dunque risultare costituito da componenti parziali, ellittiche, di almeno due cubiche distinte; il che non è possibile.

Per $p=5$, la varietà W^{2p-2} sarebbe una W^8 di S_5, la quale da 2 dei suoi punti quadrupli, anche se congiunti, si proietterebbe in uno spazio S_3 semplice e con 6 punti almeno doppi; questo caso non è dunque possibile. È possibile invece il caso $p=6$ (W^{10} di S_6, M^6 di S_5), soltanto però cogli 8 punti quadrupli tutti congiunti a 2 a 2; la proiezione di W^{10} da 3 di questi punti è allora un S_3 semplice. Studiamo ora questa W^{10} di S_6 e la corrispondente M_3^6 di S_5.

3. Varietà W_3^{10} di S_6 e M_3^6 di S_5. — Per $p=6$ la varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1} è una M_3^6 di S_5 a curve sezioni canoniche di genere 4, perciò intersezione di una quadrica e di una forma cubica di S_5. La detta quadrica non sarà un cono; non cono di 2ª specie, perchè la M_3^6 sarebbe una ∞^1 di superficie cubiche, contrariamente a un'osservazione precedente; non cono di 1ª specie, perchè gli 8 piani che devono stare su M_3^6 passerebbero tutti per il vertice, quindi per uno stesso punto, il che si esclude pure facilmente (3). Rappresentando dunque la detta quadrica di S_5, nel modo consueto, sul sistema ∞^4 delle rette di uno spazio S_3, la nostra M_3^6 avrà come immagine, nella geometria della retta di questo S_3, un complesso cubico Γ, contenente, in corrispondenza agli 8 piani a due a due incidenti, 8 stelle di rette (o, dualmente, piani rigati). Si tratta perciò del complesso delle rette generatrici delle quadriche di una rete, della quale i centri delle 8 stelle sono i punti basi: invero per 7 arbitrari di questi 8 punti passa certo una rete **R**

(1) Se per un punto di M_3^{2p-6} passassero tre o più fra gli 8 piani in parola, questo punto avrebbe per M_3^{2p-6} multiplicità ≥ 3.

(2) Vedi i due miei lavori citati: *Scritti Berzolari*, n. 2; «Mem. Acc. d'Italia», n. 2.

(3) Indipendentemente dall'aver supposto fin da principio che gli 8 piani della M_3^{2p-6} si incontrino in punti tutti distinti, nel caso presente gli 8 piani non possono stare in uno stesso S_4, perchè la M_3^6 di S_5, se irriducibile, non può avere a comune con questo S_4 otto piani. Se non stanno in un S_4, la forma cubica sopra considerata avrebbe anch'essa nel vertice del cono quadrico un punto doppio, con cono quadrico tangente; e questo secondo cono quadrico incontrerebbe la M_3^6 in un cono a 2 dimensioni di ordine 12 contenente gli 8 piani come parti, ipotesi inammisibile.

di quadriche, i cui regoli di ambo i sistemi sono tutti contenuti nel complesso Γ (che con ciascuno di essi ha già a comune 7 rette), e pertanto Γ coinciderà col complesso delle rette generatrici delle quadriche di $\mathbf{R}$, e conterrà pure la stella col centro nel rimanente (ottavo) punto base. Le rette del complesso Γ sono altresì quelle che congiungono le coppie di punti reciproci rispetto a tutte le quadriche della rete $\mathbf{R}$, nonchè quelle sulle quali queste quadriche segnano soltanto le ∞^1 coppie di un'involuzione.

Questa M_3^6 con 8 piani contiene appunto un sistema lineare ∞^6 di superficie f^{10} di genere zero e bigenere uno. Consideriamo infatti entro la rete $\mathbf{R}$ uno qualsiasi σ degli ∞^2 fasci; per questo fascio passano (in S_3) ∞^7 reti di quadriche, una delle quali è $\mathbf{R}$. Le generatrici delle quadriche del fascio formano una congruenza (2,6) – la congruenza delle corde della quartica base – contenuta, in corrispondenza alle dette ∞^7 reti, in altrettanti complessi cubici, dello stesso tipo di Γ; e questi incontrano ulteriormente Γ secondo ∞^6 congruenze (7,3). Queste congruenze hanno appunto per immagini su M_3^6 un sistema lineare ∞^6 di superficie f^{10} di genere zero e bigenere uno, come richiesto (1); mentre le congruenze (2,6) corrispondenti agli ∞^2 fasci σ entro $\mathbf{R}$ hanno per immagini superficie ξ^8 di genere aritmetico – 1, appartenenti a una congruenza del 1° ordine di coniche, e incontrantisi a 2 a 2 in coppie di tali coniche. Le f^{10} su M_3^6 sono residue di queste ξ^8 rispetto a forme cubiche (2).

La M_3^6 è razionale, poichè i suoi 8 piani sono superficie unisecanti della detta congruenza di coniche.

Il sistema lineare $|f^{10}|$ su M_3^6 rappresenta una W_3^{10} di S_6 con 8 punti quadrupli, immagini dei piani contenuti in M_3^6; contenente inoltre le 28 rette congiungenti tali 8 punti a due a due, e toccata lungo ognuna di queste rette da un S_3 fisso. Da due qualunque A, B degli 8 punti 4^{pli} la W_3^{10} si proietta in una forma cubica di S_4 con 6 punti doppi (3); gli intorni di A, B vi hanno per immagini due rigate cubiche di sistemi opposti, colla retta traccia dell'S_3 tangente fisso lungo AB quale comune direttrice rettilinea, e incontrantisi perciò ulteriormente in una quartica che ha questa direttrice come corda. Da 3 degli stessi 8 punti

(1) FANO, *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine*... «Memorie R. Accad. di Torino», ser. II, to. L (1901), § 14; *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », 29 (1910), p. 98. Queste ∞^6 congruenze (7,3) sono quelle delle « rette principali » (*Hauptstrahlen*, secondo TH. REYE) dei sistemi lineari ∞^3 di quadriche contenenti la rete $\mathbf{R}$, cioè delle rette contenute ciascuna in ∞^1 quadriche (anzichè in una sola) del sistema ∞^3.

(2) Le superficie ξ^8 non possono segarsi su M_3^6 con quadriche, perchè la congruenza (2,6) delle corde di una quartica ellittica, base di un fascio di quadriche, non sta in un complesso quadratico.

(3) C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni*, «Mem. R. Accad. Torino», (2) to. 39, 1887, p. 3; CASTELNUOVO, *Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe*..., « Atti R. Ist. Veneto » (6), to. V, 1887.

la W_3^{10} si proietta biunivocamente sullo spazio S_3; gli intorni di questi 3 punti hanno per immagini quadriche passanti per le proiezioni degli altri 5, e incontrantisi a coppie secondo cubiche che passano pure tutte per questi 5 punti, più una retta, corda di ogni singola cubica nonchè secante semplice delle altre due. Il sistema lineare $|F^{10}|$ delle sezioni iperpiane di W_3^{10} si proietta nel sistema somma degli ∞^3 piani e delle anzidette 3 quadriche, cioè nel sistema delle superficie di 7° ordine ($\mathbf{K}^7$) passanti doppiamente per le 3 cubiche anzidette e semplicemente per le loro corde pure testè menzionate (rette eccezionali delle $\mathbf{K}^7$). L'insieme delle 3 quadriche è l'unica superficie di 6° ordine biaggiunta alle $\mathbf{K}^7$ (1).

Di qui si trae pure la rappresentazione su S_3 della M_3^6 di S_5 con 8 piani: alle superficie φ^6 sue sezioni iperpiane corrispondono in S_3 superficie F^4 passanti per e 3 cubiche sghembe anzidette, e aventi come punti doppi i loro 5 punti comuni (il che equivale complessivamente a 29 condizioni).

La W_3^{10} di S_6 suindicata fu da me già incontrata nel 1910 (2). Considerando le quadriche inviluppo di S_3 come punti di uno spazio S_9, le coppie di punti e i punti doppi di questo stesso spazio, come particolari inviluppi, costituiscono in S_9 una varietà μ_6^{10} e una μ_3^8, quest'ultima quadrupla per la precedente (e con sezioni iperpiane immagini del sistema lineare ∞^9 delle quadriche–luogo di S_3). La W_3^{10} coi suoi 8 punti quadrupli è la sezione rispett. di μ_6^{10} e di μ_3^8 con un S_6 generico di S_9.

La stessa W_3^{10} si è pure presentata a GODEAUX alla fine (n. 13) di un suo lavoro del 1930, come varietà immagine delle ∞^3 coppie di punti reciproci rispetto a tutte le quadriche della rete $\mathbf{R}$ (coppie le cui congiungenti sono le rette del complesso cubico Γ) (3). Più diffusamente è ivi studiata una varietà V_3^{10}, caso particolare della W_3^{10}, corrispondente all'ipotesi che le quadriche della rete $\mathbf{R}$ abbiano un comune tetraedro autopolare. Assunto questo come tetraedro fondamentale per le coordinate, le quadriche di questa speciale rete potranno rappresentarsi con equazioni $\sum_1^4 a_i x_i^2 = 0$, colle a_i legate da una relazione lineare

(1) Ciascuna delle tre quadriche incontra le $\mathbf{K}^7$ secondo due delle cubiche basi, doppie per le $\mathbf{K}^7$, e due delle rette eccezionali suindicate. Quando una $\mathbf{K}^7$ contiene come parte una delle 3 quadriche, la parte residua (di ordine 5) incontra questa quadrica nelle due cubiche basi in essa contenute, più una quartica con punto doppio nella 6ª intersezione colla terza cubica (6ª, oltre i 5 punti comuni a tutte 3 le cubiche). Questo sistema ∞^5 di quartiche sulla quadrica rappresenta una superficie di Veronese, quale è appunto l'intorno di ciascuno dei punti quadrupli di W_3^{10}.

(2) Nota cit. dei « Rend. Circolo Matem. di Palermo », 29, n. 14.

(3) *Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace*, « Bull. Acad. Belgique, Classe des Sciences » (5), to. XVI, 1930, p. 907. Le superficie F^{10} e Φ^{10} di W_3^{10} (e perciò le f^{10} e φ^6 di M_3^6) hanno per immagini i due sistemi di superficie di 4° ordine indicati da GODEAUX a p. 921 con $|F_0|$, $|F_0'|$, e che appartengono all'involuzione di punti reciproci sopra indicata. Questi ultimi due sistemi sono pertanto in corrispondenza (2,1) coi primi.

alla quale (se le a_i vi compaiono tutte effettivamente, vale a dire se le dette quadriche non sono tutte coni) può darsi la forma $\sum a_i = 0$. Fra esse vi sono sei coppie di piani uscenti rispettivamente dai 6 spigoli del tetraedro. Gli 8 punti basi della rete hanno allora coordinate $x_i = \pm 1$; e le coppie di punti reciproci rispetto alla rete sono legati dalle relazioni $x'_i = \frac{1}{x_i}$. Il complesso cubico Γ contiene in tal caso anche le 4 stelle aventi i centri nei vertici del tetraedro autopolare, e le 3 congruenze lineari aventi per direttrici le sue coppie di spigoli opposti. A queste corrispondono sia sopra M_3^6, sia sopra V_3^{10}, 4 piani e 3 quadriche; sopra V_3^{10} queste superficie costituiscono insieme una sezione iperpiana (1).

4. Varietà W_3^{12} di S_7 e M_3^8 di S_6. — Sia ora $p = 7$; si tratti perciò di una M_3^8 di S_6 a curve sezioni canoniche di genere 5, intersezione completa di 3 quadriche, e contenente (come richiesto) 8 piani; riferibile inoltre a una W_3^{12} di S_7 con 8 punti quadrupli, immagini dei piani anzidetti. Gli 8 piani su M_3^8 non potranno essere tutti incidenti a due a due: se così fosse, vi sarebbero in uno stesso piano 7 punti doppi di M_3^8, e il sistema lineare ∞^3 residuo di questo piano rispetto alle φ^8 sezioni di M_3^8, anzichè essere omaloidico (2), sarebbe di grado 2, a intersezioni variabili ellittiche; apparterebbe perciò a un'involuzione, il che non può avvenire (3). Su W_3^{12} ciascuno degli 8 punti quadrupli sarà pertanto non congiunto a uno almeno dei rimanenti; e da una coppia di punti così fatta W_3^{12} si proietterà in una μ_3^4 di S_5, con 6 punti (proiezioni degli altri punti 4^{pli} di W_3^{12}) almeno doppi. Di qui si trae che questi punti sono precisamente doppi (4), e perciò su M_3^8 ciascuno degli 8 piani ne incontra precisamente 6 altri, e non incontra il rimanente. In altri termini, gli 8 piani possono ripartirsi in 4 coppie $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, per modo che due qualunque di essi si incontrino, oppure non si incontrino, secondo

(1) Ciascuna retta delle 4 stelle e delle 3 congruenze lineari suindicate appartiene infatti a ∞^1 quadriche tra le ∞^3 aventi il dato tetraedro autopolare; tali rette sono dunque complessivamente immagini dei punti di una particolare f^{10}. Le stesse congruenze lineari sono varietà basi di tre fasci di complessi lineari, che, con una corrispondenza trilineare fra essi, generano il particolare complesso cubico Γ di cui ora si tratta (S. JUNSKI, « Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. zu Wien, Math. naturw. Kl. », vol. 122 (1913), p. 1659).

(2) FANO, *Scritti Berzolari*, n. 4.

(3) FANO, lavoro cit. delle « Memorie Accad. d'Italia », n. 8.

(4) La μ_3^4 appartenente a S_5 non può avere, evidentemente, punti tripli. Potrebbe avere un punto quadruplo, e essere cono; in tal caso vi sarebbero su W_3^{12} tre fra gli 8 punti quadrupli mutuamente non congiunti, e anzi (poichè 8 non è multiplo di 3) 4 fra essi pure mutuamente non congiunti; la μ_3^4 sarebbe allora cono di 2ª specie, ∞^1 di piani, e W_3^{12} conterrebbe un fascio di superficie cubiche, il che si è già escluso.

che appartengono a coppie diverse oppure a una stessa coppia. D'altra parte, ogni qualvolta 3 di questi piani sono a due a due incidenti, come p. es. α, β, γ, le loro mutue intersezioni $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ determinano un nuovo piano incidente a questi 3 secondo rette; perciò contenuto pur esso in tutte le quadriche passanti per M_3^8, nonchè in M_3^8 stessa, varietà base di questo sistema di quadriche. Si hanno così su M_3^8 dei nuovi piani, in più degli 8. Per il punto $\alpha\beta$ ad es. vengono a passare nuovi piani incidenti secondo rette rispettivamente alle terne $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\beta\delta'$, e tutti contenuti nello spazio $S_4 \equiv \alpha\beta$. Se però questi piani o anche solo 3 di essi fossero distinti, essi determinerebbero con α, β un cono quadrico di S_4 di vertice $\alpha\beta$, contenuto in tutte le quadriche passanti per M_3^8, nonchè in M_3^8 stessa; e questa si spezzerebbe. Dobbiamo perciò concludere che quei 4 piani coincidono a due a due; p. es. quelli incidenti secondo rette alle terne $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, e così gli altri due (1). Avremo cioè un unico piano incidente secondo rette ai 4 piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (e così per $\alpha, \beta, \gamma', \delta'$); e queste 4 rette saranno lati di un quadrilatero completo, coi vertici nei 6 punti $\alpha\beta, \alpha\gamma, \cdots, \gamma\delta$. Di questi nuovi piani ne avremo in tutto *otto*, ciascuno incidente secondo rette a 4 dei primi, e precisamente alle quaderne:

$$\begin{array}{cccc} \alpha\beta\gamma\delta & \alpha\beta\gamma'\delta' & \alpha\beta'\gamma\delta' & \alpha\beta'\gamma'\delta \\ \alpha'\beta'\gamma'\delta' & \alpha'\beta'\gamma\delta & \alpha'\beta\gamma'\delta & \alpha'\beta\gamma\delta' \end{array}$$

Complessivamente, questi nuovi otto piani, che designeremo colle parentesi $(\alpha\beta\gamma\delta), \cdots$, formano una configurazione identica a quella dei primi; ciascuno è incidente (in un solo punto) a tutti gli altri, tranne uno: quell'uno il cui simbolo sta col primo nella medesima colonna. Una M_3^8 di S_6 vincolata a contenere una configurazione di 8 piani come qui richiesto ne contiene dunque di conseguenza una seconda del medesimo tipo; e la relazione fra le due è reciproca. Ciascun piano di una delle 2 configurazioni ne incontra in rette 4 dell'altra e in un punto 6 della propria; rette e punti che sono lati e vertici di un quadrilatero completo; e non incontra affatto i 5 piani rimanenti. I 16 piani costituiscono l'intersezione completa delle M_3^8 con una quadrica di S_6: infatti, mentre per M_3^8 passano (precisamente) ∞^2 quadriche di S_6, gli 8 piani di una stessa configurazione si incontrano a coppie in $\binom{8}{2} - 4 = 24$ punti, per i quali passano ∞^3 quadriche; e queste ultime contengono di conseguenza tutti i piani di entrambe le configurazioni. In questo sistema lineare ∞^3 di quadriche sono contenute 4 coppie di spazi S_5: per esempio lo spazio S_5 dei due piani sghembi α e $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ contiene anche i piani β', γ', δ',

(1) Non può uno stesso piano incontrare in rette ad es. i quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$, perchè γ e γ' avrebbero allora un punto comune, contrariamente alle ipotesi. Potrebbe bensì uno stesso piano incontrare in rette $\alpha, \beta, \gamma, \delta'$, ma lo scambio di δ e δ' è tuttora ammissibile, e quest'ipotesi non è perciò diversa da quella sopra adottata.

incontranti il primo in un punto e il secondo in una retta, e i piani $(\alpha\beta\gamma'\delta')$, $(\alpha\beta'\gamma\delta')$, $(\alpha\beta'\gamma'\delta)$ incontranti in una retta il primo e in un punto il secondo; esso forma coppia collo spazio S_5 dei piani sghembi α' e $(\alpha\beta\gamma\delta)$, che contiene a sua volta i rimanenti 6 piani. Le altre 3 coppie di S_5 si hanno permutando le lettere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; e i 16 piani sono le intersezioni, nei vari modi, di queste coppie di S_5. L'intera configurazione è trasformata in sè dal gruppo delle omografie di S_6 che scambiano comunque gli 8 iperpiani (S_5) suindicati, conservandone tuttavia la distribuzione in 4 coppie; omografie in numero di $8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 384$. Fra queste, $16 = \frac{384}{24}$ lasciano fisse tutte 4 le anzidette coppie di iperpiani, limitandosi (salvo l'identità) a scambiare i due iperpiani di una o più coppie; si hanno così 15 omografie involutorie, ottenibili come prodotti di quelle 4 che scambiano i due S_5 di una sola coppia. Queste ultime sono omologie armoniche aventi il centro nel punto comune agli S_5 delle altre 3 coppie, e come spazio di omologia l'S_5 polare di questo punto rispetto alla quarta coppia, il quale è pure S_5 polare dello stesso punto rispetto a tutte le ∞^3 quadriche passanti per i 16 piani di M_3^8. Queste 15 involuzioni mutano pertanto in sè ogni quadrica del detto sistema ∞^3, e così anche la M_3^8, che è base di una rete di quadriche entro questo sistema ∞^3.

È noto (1) che una M_3^8 di S_6 a curve sezioni canoniche (non luogo di ∞^1 superficie cubiche) e contenente un piano si proietta univocamente da questo piano su S_3 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondono superficie di 4° ordine ψ^4, passanti per una curva η_9^9 contenuta in una superficie cubica ψ^3; quest'ultima superficie è immagine a sua volta del piano asse di proiezione. Nel caso presente, proiettando ad es. dal piano $(\alpha\beta\gamma\delta)$, cioè dal piano che incontra in rette $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

i piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si proiettano in 4 punti, vertici di un tetraedro ABCD;

i 6 piani della seconda configurazione incidenti a $(\alpha\beta\gamma\delta)$ si proiettano negli spigoli del detto tetraedro;

i piani $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, nelle facce di questo tetraedro;

il piano $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$, in un certo piano σ. Lo spazio S_5 dei due piani sghembi $(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ incontra ulteriormente M_3^8 in una rigata ellittica R^6 con due cubiche direttrici nei piani anzidetti; questa R^6 ha per immagine una cubica δ nel piano σ.

La superficie ψ^3, immagine del piano $(\alpha\beta\gamma\delta)$ asse di proiezione, ha i punti A, B, C, D come doppi, e passa per la cubica δ; le ψ^4 hanno gli stessi 4 punti doppi, e contengono pure i 6 spigoli del tetraedro ABCD, nonchè la cubica δ, appoggiata a questi spigoli (il che equivale complessivamente a 28 condizioni). In altri termini, la curva η_9^9 relativa alla M_3^8 più generale con piano (v. sopra) si è ora spezzata nell'insieme della cubica δ e dei 6 spigoli del tetraedro ABCD.

(1) FANO, *Scritti Berzolari*, n. 4.

Viceversa, ogni sistema lineare di ψ^4 soddisfacente alle condizioni suindicate rappresenta una M_3^8 di S_6 contenente 16 piani; con che è dimostrata l'effettiva esistenza di una M_3^8 così fatta.

Esiste pure la corrispondente W_3^{12} di S_7 con 8 punti quadrupli; e anche di essa l'esistenza è provata dal sistema lineare rappresentativo su S_3 (1). Considerando in M_3^8 il sistema $|2\varphi^8|$ doppio delle sezioni iperpiane, rappresentato su S_3 da $|2\psi^4|$; aggiungendovi gli 8 piani della prima configurazione, rappresentati dalle facce e dai vertici del tetraedro ABCD; e dividendo infine per 2 quest'ultimo sistema somma, troviamo come sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane di W_3^{12}, e quindi del sistema $|f^{12}|$ su M_3^8, il sistema delle superficie di 6° ordine ξ^6 passanti doppiamente per gli spigoli del tetraedro ABCD e semplicemente per la cubica δ: superficie appunto di genere zero e bigenere uno. Ai piani della seconda configurazione corrispondono su W_3^{12} superficie di 3° ordine con 4 punti doppi in altrettanti fra i punti 4^{pli} di W_3^{12} stessa.

Operando analogamente a partire da $|2\varphi^8|$ e $|2\psi^4|$, ma cogli 8 piani della seconda configurazione, otteniamo su M_3^8 un nuovo sistema lineare analogo a $|f^{12}|$, rappresentato in S_3 dal sistema delle superficie anche di 6° ordine aventi in A, B, C, D punti tripli, la cubica δ come doppia, e passanti semplicemente per gli spigoli del tetraedro ABCD, con piani tangenti fissi lungo di essi. Anche queste nuove superficie η^6 sono di genere zero e bigenere uno (di un tipo forse non mai incontrato finora); non ammettono quadriche aggiunte, ma hanno una biaggiunta di 4° ordine composta di ψ^3 e del piano σ. Il loro sistema rappresenta di nuovo una W_3^{12} di S_7.

È ovvio che i due sistemi lineari ∞^3 $|\xi^6|$ e $|\eta^6|$ devono essere birazionalmente equivalenti, e devono potersi scambiare con una involuzione Cremoniana, immagine di una delle 15 omografie involutorie dianzi considerate in S_6 e su M_3^8, e che dovrà in pari tempo mutare in sè stesso il sistema lineare $|\psi^4|$. Per es. la trasformazione immagine dell'omografia involutoria (unica) su M_3^8 che scambia i due piani $(\alpha\beta\gamma\delta)$ e α dovrà scambiare i sistemi omaloidici residui rispetto a $|\psi^4|$ della superficie cubica ψ^3, immagine del piano $(\alpha\beta\gamma\delta)$, e del punto A immagine di α. Ai piani dell'uno spazio (residui di ψ^3) corrispondono pertanto *le superficie di* 4° *ordine aventi in* A *un punto triplo, punti doppi in* B, C, D, *passanti per la cubica* δ, *e aventi inoltre piani tangenti fissi lungo gli spigoli del tetraedro* ABCD (2). Le generatrici del cono che da A proietta la cubica

(1) Mentre l'esistenza di una W_3^{2p-2} di S_p a superficie sezioni di genere zero e bigenere uno porta di conseguenza (n. 1, e se $p > 4$) quella della corrispondente M_3^{2p-6} di S_{p-1} a curve-sezioni canoniche e contenente 8 piani, non è finora dimostrata, in generale, la proposizione inversa. Stabilita l'esistenza di una M_3^{2p-6} con 8 piani, quella della W_3^{2p-2} va dedotta caso per caso.

(2) Per gli spigoli AB, AC, AD quest'ultima condizione è conseguenza delle precedenti.

δ sono rette fondamentali della trasformazione, e corrispondono ai punti di δ. Alle superficie di 6° ordine passanti doppiamente per gli spigoli del tetraedro ABCD, perciò con A triplo, e passanti semplicemente per la cubica δ, perciò incontranti le generatrici del detto cono in 2 punti variabili, corrispondono superficie anche di 6° ordine con A triplo, e passanti doppiamente per δ.

Questi sistemi lineari rappresentativi di M_3^8 e di W_3^{12} sono contenuti (o equivalenti ad altri contenuti) in quelli più ampi che incontreremo al n. 8.

5. Passiamo ora a esaminare i casi di $p > 7$; e vediamo anzitutto se sia ancora possibile che sulla varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1} tre degli 8 piani, che indicheremo con α_1, α_2, α_3, siano mutuamente incidenti (sempre in punti distinti). Il piano π di questi tre punti incontrerà ancora i precedenti in rette; apparterrà quindi a tutte le quadriche passanti per M_3^{2p-6}, e perciò anche alla M_3^{2p-6} (ancora come piano in più degli 8 già previsti, non potendo due di questi 8 incontrarsi in una retta). Supponiamo anzi, per maggiore generalità, che questo piano π incontri in rette un numero $k \geqq 3$ di piani fra i primi 8 (come al n. prec., per $k = 4$); rette lati di un k-latero completo, i cui $\binom{k}{2}$ vertici saranno intersezioni degli stessi k piani a due a due, e punti doppi di M_3^{2p-6} (1). D'altra parte un iperpiano generico per π incontra ulteriormente M_3^{2p-6} in una superficie avente a comune con π una cubica piana δ passante per tutti i punti doppi di M_3^{2p-6} contenuti in π. Da ciò possiamo trarre le conclusioni seguenti:

1° È certamente $k \leqq 4$, quindi $k = 3$ oppure $k = 4$, poichè in caso diverso il piano π conterebbe almeno $\binom{5}{2} = 10$ punti doppi, non appartenenti a una cubica.

2° Nel caso $k = 3$ è da escludere che il piano π incontri anche in un solo punto un piano ulteriore fra gli 8 già previsti su M_3^{2p-6}. Tale punto non potrebbe stare infatti nè fuori delle tre rette $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_2$, $\pi\alpha_3$, perchè l'insieme di queste è in π una particolare cubica δ (v. sopra), la quale non passerebbe (come dovrebbe) per questo nuovo punto doppio di M_3^{2p-6}; e nemmeno potrebbe stare su una, per esempio $\pi\alpha_1$ di quelle rette, perchè sul cono quadrico (Γ_3^2 di S_4) ivi tangente a M_3^{2p-6} il nuovo piano apparterrebbe al sistema di α_1, quindi al sistema opposto di π, e dovrebbe perciò incontrare π in una retta. Considerando pertanto, sulla varietà W_3^{2p-2} di S_p immagine di M_3^{2p-6}, la superficie ξ che dovrebbe corrispondere al piano π, si trovano per essa caratteri contradditori, che portano a escludere l'ipotesi $k = 3$. La ξ dovrebbe infatti passare per i tre

(1) Il piano π non potrà essere doppio per M_3^{2p-6}, perchè le curve sezioni generiche di questa varietà, essendo canoniche, non possono avere punti doppi.

punti A_1, A_2, A_3, quadrupli per W, immagini dei piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e non per gli altri 5 punti analoghi; e vi avrebbe punti doppi, con coni tangenti immagini delle rette $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \alpha_3 \pi$ (1). Alle ∞^5 coniche segate su π dalle quadriche di S_{p-1}, cioè dalle superficie 2φ di M_3^{2p-6}, corrisponderebbero su ξ le intersezioni colle superficie 2Φ, cioè colle quadriche di S_p passanti (solamente) per gli 8 punti 4^pli^ di W_3^{2p-2}, dei quali 3 soli su ξ e doppi per questa. Questo sistema di curve dovrebbe essere di grado 4; e allora, indicato con n l'ordine di ξ, si avrebbe $4 = 4n - 3 \cdot 2$, quindi per n un valore non intero.

3° È invece ammissibile l'ipotesi $k = 4$; nel qual caso per l'ordine n della ξ alla relazione precedente va sostituita l'altra $4 = 4n - 4 \cdot 2$, da cui $n = 3$; e al piano π corrisponderebbe su W_3^{2p-2} una superficie cubica con 4 punti doppi (come già al n. 4). Però l'insieme di π e dei 4 piani ch'esso incontra in rette, insieme certo contenuto in un S_6, non deve allora stare in un iperpiano (S_{p-2}), poichè la curva intersezione di π colla superficie residua sarebbe di ordine > 3. Sarà dunque $p - 1 \leq 6$, $p \leq 7$; troviamo cioè i soli casi già esaminati in precedenza, in particolare per $k = 4$ quello del n. 4.

Pertanto, *se $p \leq 7$, è escluso che tre degli otto piani esistenti su M_3^{2p-6} si incontrino tutti a due a due. Se due di essi sono entrambi incidenti a un terzo, questi due non potranno incontrarsi.* Analogamente, su W_3^{2p-2}, tre degli 8 punti 4^pli^ non potranno essere tutti congiunti a due a due.

È pure escluso d'ora in avanti che sulla M_3^{2p-6} uno degli 8 piani, e sia α, ne incontri altri tre β, γ, δ in punti B, C, D allineati. Invero, se così fosse, la M_3^{2p-6} lungo questa retta BCD, contenente 3 suoi punti doppi, avrebbe uno spazio S_3 tangente fisso, contenente α e contenuto negli spazi S_4 dei coni quadrici ad essa tangenti nei punti doppi B, C, D. Tale S_3 incontrerebbe i piani β, γ, δ (mutuamente sghembi, perchè tutti incidenti ad α) secondo rette anche sghembe, giacenti su una superficie di 2° ordine. E le quadriche di S_{p-1} passanti per M_3^{2p-6}, nonchè M_3^{2p-6} stessa loro varietà base, conterrebbero di conseguenza quest'ultima superficie, e quindi (contenendo pure α) l'intero S_3 anzidetto; sicchè questo S_3 sarebbe parte di M_3^{2p-6}.

6. Sia dunque ora $p > 7$. Supposto che ciascuno degli 8 piani della configurazione incontri un certo numero x fra gli altri, e perciò non incontri i rimanenti $7 - x$, segue da quanto detto or ora che gli anzidetti x saranno sempre, a due a due, non incidenti; perciò $x - 1 \leq 7 - x$, da cui $x \leq 4$. Nei casi ancora da esaminarsi, ogni piano fra gli 8 sarà incidente a non più di 4 altri.

Sia precisamente $x = 4$. Considerati due qualunque degli 8 piani fra loro incidenti, fra i rimanenti ve ne saranno ancora 3 incidenti al primo, 3 incidenti al

(1) Ciò segue immediatamente dalla rappresentazione nota del piano α_1 (ad esempio) sul cono quartico (proiettante una superficie di Veronese) tangente a W_3^{2p-2} nel punto 4^plo^ corrispondente.

secondo, nessuno a entrambi. Inoltre i tre piani incidenti al primo non potranno incontrarsi fra loro a due a due; e così dicasi degli altri tre, incidenti al secondo. Complessivamente gli otto piani saranno distribuiti in 2 quaderne, tali che due piani di una stessa quaderna (per esempio il primo, e i tre ultimi, incidenti al secondo) non saranno mai incidenti, mentre invece piani di quaderne diverse sempre si incontreranno.

Gli 8 piani stanno pertanto tutti in uno spazio Σ di dimensione ≤ 8, determinato da 3 fra essi di una stessa quaderna (poichè tale spazio contiene evidentemente tutti i piani dell'altra quaderna, e per conseguenza anche il piano ulteriore della prima quaderna). Dico anzi che questo sistema di 8 piani e la stessa varietà M_3^{2p-6} in parola devono appartenere allo spazio S_8, sicchè sarà $p - 1 = 8$, $p = 9$. Invero la varietà W_3^{2p-2} di S_p immagine di M_3^{2p-6} avrà in questo caso due quaderne di punti quadrupli, tali che due punti di una stessa quaderna sono sempre a due a due non congiunti; perciò da 3 punti di una tale quaderna essa si proietterà in una W_3^{2p-14} di S_{p-3} ancora con un punto quadruplo, il che richiede $2p - 14 \geqq 4$, $p \geqq 9$. D'altra parte lo spazio Σ non può nemmeno essere (o stare in) un iperpiano dello spazio ambiente S_{p-1}. Invero, se lo spazio S_5 di due piani α, β della stessa quaderna incontra M_3^{2p-6} in una superficie residua, questa superficie, contenendo già nei piani dell'altra quaderna (tutti incidenti a α e β) 4 rette con tracce su α, β indipendenti, dovrà incontrare sia α che β almeno in una conica: complessivamente dunque l'intersezione residua della M_3^{2p-6} coll'iperpiano in parola avrebbe sia in α che in β almeno 3 coniche, il che non è possibile. In caso diverso, la superficie intersezione residua di M_3^{2p-6} con un iperpiano generico passante per i due piani sghembi α, β, dovendo insieme con questi due piani, da essa incontrati in cubiche ellittiche, formare una superficie di genere uno, avrebbe genere aritmetico -1. Se vi fosse un iperpiano, fra questi, contenente anche un ulteriore piano di M_3^{2p-6} non incontrante nè α nè β (come appunto si è supposto), la superficie residua di questi tre avrebbe genere < -1, e sarebbe quindi riferibile a una rigata di genere > 1; il che è incompatibile col contenere curve ellittiche.

7. Varietà W_3^{16} di S_9 e M_3^{12} di S_8. — Nell'ipotesi $x = 4$ sarà dunque $p = 9$; e la varietà M_3^{2p-6} è perciò una M_3^{12} di S_8. Al n. 12 della mia Memoria « *Scritti Berzolari* » ho appunto incontrata una M_3^{12} di S_8, non contenente in generale piani, intersezione di una quadrica colla V_4^6 « di C. SEGRE », rappresentante le coppie non ordinate dei punti di due piani (1). Questa V_4^6 contiene due sistemi ∞^2 di piani, generabili proiettivamente, tali che due di questi piani sono inci-

(1) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », 5 (1891), p. 192, n. 3 e sg.; *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, « Mathem. Annalen », 40 (1891), p. 413, nn. 5–6.

denti o no secondo che appartengono a sistemi opposti oppure allo stesso sistema; e la M_3^{12}, che ho pure chiamata «di C. SEGRE», ha in questi piani due congruenze del 1^0 ordine di coniche. Poichè le quadriche di S_8 sono ∞^{44}, e la detta V_4^6 sta su sole ∞^8 fra esse (tante quante sono le quadriche di S_4 per 6 punti generici), questa V_4^6 conterrà ∞^{35} varietà M_3^{12} del tipo generale da me considerato nella Memoria citata; e si può quindi obbligare la quadrica segante M_3^{12}, e per conseguenza la M_3^{12} stessa, a contenere 4 piani arbitrari di V_4^6 di un medesimo sistema (il che richiede al più $6 \cdot 4 = 24$ condizioni distinte), e poi ancora 4 piani arbitrari dell'altro sistema (il che implica per ciascuno di questi, già incidente ai primi 4, soltanto 2 condizioni ulteriori) (1). Si ottengono così delle M_3^{12} contenenti 8 piani, ripartiti in 2 quaderne, precisamente come qui occorre. Dico ora, viceversa, che le M_3^{12} di S_8 qui cercate sono tutte ottenibili come testè indicato. Invero ogni M_3^{12} del tipo richiesto è incontrata ulteriormente dagli iperpiani passanti per uno qualunque α dei suoi piani in un sistema ∞^5 di superficie, a intersezioni razionali, e di grado 3 (come facilmente si calcola); essa si proietta perciò da quel piano in una V_3^3 di S_5, ∞^1 razionale normale di piani, sulla quale il piano stesso ha per immagine una superficie ψ^5 di DEL PEZZO a sezioni ellittiche (2), intersezione di V_3^3 con una quadrica passante per uno qualunque dei suoi ∞^1 piani. Le ∞^2 rette direttrici di V_3^3 sono pertanto immagini di una congruenza del 1^0 ordine di coniche su M_3^{12}; coniche unisecanti il piano α, nonchè gli altri tre β, γ, δ della stessa quaderna. E i piani di queste ∞^2 coniche formano appunto una V_4^6, generabile ad esempio colle 3 forme proiettive ∞^2 di spazi S_6 che dagli spazi $S_5 \equiv \alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ proiettano il piano punteggiato δ.

Analogamente, l'altra quaderna di piani contenuta in M_3^{12} conduce a una seconda congruenza di coniche, i cui piani stanno parimente sulla stessa V_4^6. I piani α, β, γ, δ appartengono a questo secondo sistema.

Questa particolare M_3^{12}, contenente 8 piani, è evidentemente razionale, contenendo congruenze del 1^0 ordine di coniche con piani unisecanti.

Entro ciascuno dei due sistemi di ∞^2 piani contenuti in V_4^6, i 4 piani appartenenti a M_3^{12} sono basi di un fascio di V_3^6, anche queste ∞^1 razionali normali di piani, con ∞^2 coniche direttrici nei piani dell'altro sistema. Queste ∞^1 V_3^6, sia dell'uno che dell'altro sistema, sono segate da M_3^{12} (ossia da una quadrica passante per M_3^{12} e non per V_4^6), all'infuori dei 4 piani base, in uno stesso fascio di

(1) Si riconosce anzi facilmente che ogni quadrica contenente 4 piani di V_4^6 di uno dei due sistemi ne contiene di conseguenza anche 4 (variabili) dell'altro sistema: nello stesso modo come una quadrica di S_3 passante per due generatrici di un'altra quadrica appartenenti a uno stesso sistema di questa ne contiene anche due del sistema opposto.

(2) *Sulle superficie dell'n^{simo} ordine* .... « Rend. Circolo Matem. di Palermo », vol. I (1884–87), p. 241.

superficie ψ^8 di DEL PEZZO di 2ª specie (1), coi 2 fasci di coniche contenuti rispettivamente nelle 2 congruenze di M_3^{12}. Le residue di queste ψ^8 rispetto alle intersezioni di M_3^{12} con quadriche costituiscono un sistema lineare ∞^9 di superficie f^{16}, a curve sezioni di genere 9, normali, non speciali, aventi i piani di V_4^6 di ambo i sistemi come 4 secanti, e gli 8 piani contenuti in M_3^{12} come fondamentali. Indicando ancora con φ^{12} le superficie sezioni iperpiane di M_3^{12}, tra queste varie superficie contenute nella M_3^{12} passano le relazioni di equivalenza:

$$f^{16} + \psi^8 = 2\varphi^{12} = 2\psi^8 + 8 \text{ piani (2)}$$

e quindi anche:

$$f^{16} = \psi^8 + 8 \text{ piani} \quad , \quad 2f^{16} = 2\varphi^{12} + 8 \text{ piani}$$

Sulle f^{16} il sistema lineare ∞^8 delle sezioni iperpiane C_9^{16} di S_7, normali non speciali, e il sistema lineare caratteristico, anche ∞^8 e composto di C_9^{16} appartenenti a S_8, quindi canoniche, sono mutuamente aggiunti. Tali f^{16} sono dunque superficie regolari di genere zero e bigenere uno, e conducono a rappresentare la M_3^{12} sopra una W_3^{16} di S_9, con 8 punti quadrupli, immagini dei piani di M_3^{12}. Le ∞^1 sezioni iperpiane di W_3^{16} passanti per questi 8 punti quadrupli sono immagini del fascio di ψ^8 su M_3^{12}.

Poichè i punti quadrupli di W_3^{16} si ripartiscono in due quaderne tali che due di una stessa quaderna o di quaderne diverse sono sempre non congiunti, o rispettivamente congiunti, la W_3^{16} da 6 di questi punti, 3 per ciascuna quaderna, si proietta univocamente su uno spazio S_3. I 6 centri di proiezione hanno per immagini sei piani, ripartiti in due terne o triedri; gli ulteriori punti quadrupli di W_3^{16} si proiettano nei vertici rispett. del secondo e primo triedro. Alle sezioni iperpiane di W_3^{16} corrispondono in S_3 le superficie di 7° ordine del sistema somma degli ∞^3 piani e dei due triedri anzidetti; vale a dire *le superficie di 7° ordine* $\boldsymbol{k}$ *passanti doppiamente per i 6 spigoli dei due triedri* (e aventi per conseguenza punti tripli nei vertici di questi). Esse sono superficie regolari di genere zero e bigenere uno; non hanno aggiunte di 3° ordine (per le quali si richiederebbero 20 condizioni), mentre l'insieme dei due triedri ne costituisce l'unica biaggiunta di 6° ordine. Questa incontra le $\boldsymbol{k}^7$ nelle sole loro linee multiple, più le 9 rette mutue intersezioni dei piani dei due triedri, che sono rette eccezionali delle $\boldsymbol{k}^7$. Per il sistema $|\boldsymbol{k}^7|$ sono fondamentali i 6 piani e i vertici dei due triedri (nei quali vertici le $\boldsymbol{k}^7$ hanno cono tangente fisso).

(1) Mem. cit., « Rend. Palermo », vol. I, § IX.

(2) Quest'ultima relazione segue dal fatto che su V_4^6 due V_3^6 di sistema opposto ne costituiscono insieme l'intersezione con una quadrica; perciò gli 8 piani e una ψ^8 contata 2 volte possono segarsi su V_4^6 con 2 quadriche, dunque su M_3^{12} con una quadrica.

Raddoppiando il sistema anzidetto di superficie del 7° ordine, togliendone i 6 piani e i 2 vertici dei due triedri, e dividendo per 2 il sistema così ottenuto, si ha il sistema lineare rappresentante la M_3^{12} di S_8 dianzi considerata; sistema composto delle *superficie del 4° ordine passanti* (*semplicemente*) *per i 6 spigoli dei due triedri anzidetti*, e aventi per conseguenza i vertici di questi due triedri come punti doppi (il che equivale in tutto a 26 condizioni).

Ritornando per un momento alla V_3^{10} di S_6 di GODEAUX qui considerata nell'ultimo capoverso del n. 3 e contenente 4 piani e 3 quadriche, e prendendo su di essa il sistema di superficie somma delle sezioni iperpiane e di queste quadriche, si ha la rappresentazione di una V_3^{16} di S_9 (di cui la V_3^{10} del n. 3 è proiezione dai punti doppi immagini delle 3 quadriche), caso particolare della V_3^{16} con 8 punti quadrupli testè studiata. Essa è ampiamente studiata nella Nota stessa di GODEAUX già citata al n. 3, ed è pur essa immagine della varietà ∞^3 delle coppie dell'involuzione $x'_i = \frac{1}{x_i}$ in S_3; i due sistemi lineari di superficie di 4° ordine (tutte trasformate in sè dalla detta involuzione) ivi indicati con (2) e (3) a p. 908, di gradi rispettivamente 32 e 24, sono immagini dei sistemi $|f^{16}|$ e $|\varphi^{12}|$ di W_3^{16} (e con essi in corrispondenza (2,1)). La particolarità di V_3^{16} rispetto alla nostra W_3^{16} più generale consiste nell'avere 3 punti doppi, e una sezione iperpiana composta di 4 superficie di Veronese (che si proiettano nei 4 piani di V_3^{10}).

8. Varietà W_3^{24} di S_{13} e M_3^{20} di S_{12}. — Negli altri casi possibili di varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1} a curve sezioni canoniche di genere $p-2$ e contenenti 8 piani come qui richiesto, ciascuno degli 8 piani dovrà incontrarne non più di tre altri. Esisteranno allora certo tre piani fra gli 8 a due a due sghembi: se ciascun piano ne incontra altri tre, saranno sempre mutuamente sghembi i tre piani incidenti a uno stesso; se ciascun piano ne incontra meno di tre, per ogni coppia di piani non incidenti ve ne sarà almeno un terzo sghembo a entrambi. Inoltre fissati 3 piani mutuamente sghembi, ciascuno di questi sarà incidente a non più di 3 fra gli altri 5; si avranno così $3 \cdot 3 = 9$ intersezioni al più, ripartite fra questi 5 piani, sicchè uno almeno dei 5 conterrà non più di una sola fra tali intersezioni. Corrispondentemente, sulla varietà W_3^{2p-2} di S_p tre fra gli 8 punti quadrupli saranno a 2 a 2 non congiunti, e un quarto sarà congiunto a non più di uno dei primi. Da questi 4 punti la W_3^{2p-2} si proietterà in una varietà di ordine $\leqq 2p-2-15 = 2p-17$ appartenente allo spazio S_{p-4}; sicchè sarà $p-4 \leqq (2p-17)+3-1$, ossia $p \geqq 11$.

Consideriamo ora sulla M_3^{2p-6} due piani α, α' non incidenti. Un iperpiano generico passante per α (ad esempio) incontrerà ulteriormente M_3^{2p-6} in una superficie razionale avente a comune con α una cubica ellittica δ. Quando questo iperpiano, variando, viene a passare per α', può avvenire che dalla detta superficie si stacchi una parte fissa contenuta nello spazio $S_5 \equiv \alpha\alpha'$ e incontrante α (e analogamente α') secondo una linea parte della cubica δ (retta o conica), e può darsi che ciò non avvenga.

Verificandosi la prima ipotesi, questa superficie dello spazio $S_5 \equiv \alpha\alpha'$ sarà sopra M_3^{2p-6} una superficie isolata, anzi a curve sezioni che saranno isolate sulle φ^{2p-6} sezioni iperpiane di M_3^{2p-6} e perciò razionali; sarà quindi una superficie rigata (non superficie di Veronese, che non contiene nè rette, nè coniche in piani non incidenti quali $\alpha\alpha'$). Sarà anche superficie normale, avendo come residue rispetto alle sezioni iperpiane superficie generalmente irriducibili; perciò di ordine $\leqq 4$. (La M_3^{12} di S_8 studiata al n. 7 è appunto incontrata ulteriormente dallo spazio S_5 di due piani sghembi secondo una rigata $\mathbf{R}^4$ con coniche direttrici nei detti piani).

Invece nella seconda ipotesi un iperpiano generico passante per α, α' incontrerà ulteriormente M_3^{2p-6} in una superficie ψ avente a comune con α, α' cubiche ellittiche, perciò di genere aritmetico -1, riferibile a una rigata ellittica; e il sistema di queste superficie ψ (sistema almeno ∞^4, poichè $p \geqq 11$, e lo spazio ambiente è perciò almeno un S_{10}) apparterrà a una congruenza di linee razionali, e precisamente di coniche (1). Le ψ saranno dunque ∞^1 ellittiche di coniche, con cubiche direttrici nei 2 piani α, α'. Ogni altro piano π contenuto in M_3^{2p-6} sarà incontrato dall'iperpiano di una ψ generica e quindi dalla ψ stessa in una retta, la quale, come linea razionale su una ψ, non potrà essere che parte di una conica della detta congruenza. Di più questa retta, entro π, potrà variare soltanto in un fascio, perchè soltanto ∞^1 coniche della congruenza potranno spezzarsi. Se π non incontrasse nè α nè α', ciò richiederebbe che per il centro P di quel fascio passasse una retta incidente a α, α', π in punti tutti distinti, contenuta quindi nello spazio $S_5 \equiv \alpha\alpha'$ e in tutte le ψ, e perciò non parte di coniche della congruenza. Le parti residue delle ∞^1 coniche di cui le rette del fascio P (π) sono componenti sarebbero allora rette fra loro distinte, tutte incontranti α e α', costituenti perciò una rigata entro lo spazio $\alpha\alpha'$, contrariamente all'ipotesi fatta.

Pertanto: *Se esistono su* M_3^{2p-6} *due piani* α, α' *non incidenti e tali che il loro spazio* S_5 *non incontri ulteriormente* M_3^{2p-6} *in una superficie, non potrà esistere per questa varietà alcun piano non incontrante nè* α *nè* α'. Ogni piano ulteriore di M_3^{2p-6} dovrà incontrare uno almeno di questi due.

(1) Non rette, perchè la varietà M_3^{2p-6} non può contenere una congruenza di rette (FANO, «Mem. Accad. Italia», n. 2). E se le linee razionali suindicate sono di ordine $k > 1$, sulla superficie F^{2p-6} sezione iperpiana generica di M_3^{2p-6} il sistema lineare segato dalle ψ apparterrà, esso e la sua serie caratteristica, a un'involuzione di ordine k. Poichè questa serie (come si calcola facilmente) è di ordine $2p-14$ e di dimensione $p-8$ (è serie di gruppi canonici, ma incompleta), dovrà essere $k \leq \frac{2p-14}{p-8}$, e quindi (poichè $p \geq 11$) $k = 2$.

D'altra parte, esclusi i casi precedenti, ciascun piano di M_3^{2p-6} deve incontrarne non più di 3 altri: perciò nell'ipotesi anzidetta, che cioè lo spazio $\alpha\alpha'$ non incontri ulteriormente la M_3^{2p-6} in una superficie, fra i rimanenti 6 piani (oltre α, α') tre incontreranno α senza incontrarsi fra loro a 2 a 2, e indichiamoli con β', γ', δ'; e gli altri tre β, γ, δ saranno incidenti a α' e non fra loro. Ne segue ancora che β, ad esempio, dovrà incontrare due dei tre piani β', γ', δ', per esempio questi ultimi due; e analogamente per gli altri. Saranno pertanto incidenti tutte e soltanto le coppie di piani designati con lettere distinte, una con apice e l'altra senza.

Gli spazi $S_5 \equiv \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ sono analoghi a $\alpha\alpha'$, e non incontrano la M_3^{2p-6} fuori dei due piani indicati. Invece ciascuno degli spazi $S_5 \equiv \alpha\beta$ e analoghi (determinati da coppie di piani entrambi senza apice, o entrambi con apice) l'incontra ulteriormente in una superficie fissa, che si riconosce facilmente essere una quadrica. Per gli spazi $\alpha\beta$ e $\gamma'\,\delta'$ ad esempio si ha una stessa quadrica, contenente il quadrangolo semplice sghembo di vertici consecutivi $\alpha\gamma', \gamma'\beta, \beta\delta', \delta'\alpha$; e queste quadriche sono perciò 6 in tutto (1).

I quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a due a due non incidenti stanno certo in uno spazio S_{11}, che contiene pure gli altri 4 piani $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ e le 6 quadriche anzidette; complessivamente dunque una superficie di ordine 20, a curve sezioni (come si calcola facilmente) di genere 11. Essendo l'ordine 20 eguale (anzichè superiore) a $2 \cdot 11 - 2$, questa superficie può essere sezione iperpiana di M_3^{2p-6}, però sezione completa, non parte di sezione iperpiana (2); la dimensione $p - 1$ dello spazio ambiente è dunque ≤ 12, ossia $p \leq 13$. Se $p = 13$, la corrispondente W_3^{2p-2} di S_p con 8 punti quadrupli è una W_3^{24} di S_{13}, la quale dai detti punti quadrupli (dato il modo in cui a due a due sono congiunti o non congiunti) si proietta in una W_3^4 di S_5 contenente 8 piani, immagini dei punti quadrupli: ciascuno di questi piani ne incontra in rette altri tre (immagini con esso di coppie di punti congiunti), altri quattro in un solo punto, e non incontra affatto il piano rimanente. Questa W_3^4 di S_5 è la varietà base di un particolare fascio di quadriche di S_5, ed è rappresentata in S_3 dal sistema lineare ∞^5 delle quadriche circoscritte a un tetraedro, le cui facce e vertici sono immagini degli 8 piani contenuti in W_3^4 (3). *Esiste pertanto una* W^{24} *di* S_{13} *del tipo richiesto, rappresentata su* S_3 *dal sistema lineare* ∞^{13} *di tutte le superficie di* 6^0 *ordine passanti doppiamente per gli*

(1) Fra le coniche della congruenza considerata di sopra e appoggiate ai piani α, α', ve ne sono ∞^1 spezzate in una retta del fascio di centro $\alpha'\beta$ entro β e in una retta ulteriore, naturalmente incidente ad α; queste rette ulteriori sono le generatrici della quadrica testè incontrata appartenenti al sistema delle 2 congiungenti $\alpha\gamma', \gamma'\beta$; $\alpha\delta', \delta'\beta$. Queste stesse congiungenti, unite invece alle rette del fascio di centro $\alpha\beta'$ nel piano α, formano coniche riducibili della congruenza analoga relativa ai piani β, β'.

(2) Fano, «Memorie Accad. d'Italia», n. 3.

(3) Nella geometria della retta di S_3, questa W_3^4 è l'immagine di un complesso tetraedrale.

spigoli di un tetraedro (sistema somma del sistema di quadriche anzidetto e delle facce e vertici del tetraedro base). *E la corrispondente* M_3^{20} *di* S_{12} *è rappresentata dal sistema* ∞^{12} *delle superficie di* 4^0 *ordine passanti semplicemente per gli spigoli dello stesso tetraedro* (e aventi per conseguenza punti doppi nei vertici di questo) (1). Gli spigoli del tetraedro sono immagini delle 6 quadriche contenute in M_3^{20}; le stelle di rette che hanno per centri i vertici del tetraedro sono immagini delle congruenze di coniche appoggiate alle coppie di piani $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\cdots$; la la particolare F^4 composta delle 4 facce del tetraedro è immagine della sezione iperpiana di M_3^{20} (incontrata poc'anzi) composta degli 8 piani e 6 quadriche.

Non esistono invece analoghe varietà W_3^{2p-2} di S_p (e corrispondenti M_3^{2p-6} di S_{p-1}) per $p = 11, 12$. Invero la W_3^{2p-2} dovrebbe proiettarsi da 4 suoi punti 4^{pli} a due a due non congiunti nel primo caso in una W_3^4 appartenente a S_7, che non esiste; nel secondo caso in una W_3^6 di S_8, ∞^1 razionale normale di piani, sulla quale i 4 centri di proiezione dovrebbero avere per immagini superficie di Veronese, pure inesistenti.

9. Dimostriamo ora che, all'infuori dei casi già considerati, non esistono altre M_3^{2p-6} di S_{p-1} contenenti 8 piani, o rispettivamente W_3^{2p-2} di S_p con 8 punti quadrupli, come richiesto.

Vediamo anzitutto se siano possibili altri casi in cui ciascuno degli 8 piani di M_3^{2p-6} incontri (come al n. prec.) 3 dei rimanenti. Indicando di nuovo con α un piano qualunque fra gli 8, con β', γ', δ' i tre incidenti a questo e perciò fra loro mutuamente sghembi, se vi è un piano ulteriore α' della configurazione non incidente a nessuno di questi ultimi tre, questo (non incontrando nemmeno α) sarà incidente ai tre rimanenti β, γ, δ; e si riconosce allora facilmente che si ritorna alla M_3^{20} ($p = 13$) del n. prec.

Supponiamo ora invece – riferendoci per comodità agli 8 punti quadrupli di W_3^{2p-2}, che indicheremo coi numeri 1, 2, $\cdots$ 8 – che a uno di questi, p. es. al punto 1, siano congiunti i tre 3, 5, 7; e che ciascuno dei rimanenti quattro (2, 4, 6, 8) sia congiunto a uno almeno fra i detti tre (3, 5, 7). Da ciascuno dei punti 3, 5, 7 esciranno due di queste congiungenti, tutte distinte (devono essere tre, compresa quella diretta al punto 1); e si può supporre senza scapito di generalità che 2 sia congiunto al solo 3, 4 a 3 e 5, 6 a 5 e 7, 8 al solo 7. Saranno inoltre congiunte le coppie 4 e 8, 8 e 2, 2 e 6.

Proiettando W_3^{2p-2} dai detti 8 punti, gli intorni di essi (superficie di Veronese, ciascuna delle quali viene proiettata da tre suoi punti generici) dànno piani;

(1) Il sistema lineare ∞^{12} (di grado 24, genere 13) che queste superficie del 4^0 ordine segano su una delle precedenti F^6 è considerato da L. GODEAUX al n. 2 della Nota: *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un*, II, « Bull. de l'Acad. Royale de Belgique, Classe des Sciences », 1926, p. 892.

e punti congiunti dànno (come al numero precedente) piani incontrantisi in una retta (immagine dello spazio S_3 tangente a W_3^{2p-2} lungo quella congiungente). Da ciò si trae facilmente che gli 8 piani ottenuti sulla varietà proiezione stanno in uno spazio S_5, nonchè su ∞^2 quadriche di questo spazio (alle quali essi impongono complessivamente 18 condizioni); e che queste quadriche non sono tutti coni (1). Su una generica di queste quadriche, contenente due sistemi distinti di piani, piani aventi a comune una retta devono appartenere a sistemi opposti; e al medesimo sistema piani che ne incontrano uno stesso in rette. Dovrebbero perciò appartenere a uno stesso sistema per esempio i piani (immagini dei punti) 1, 4, 6, e all'altro sistema i piani 3, 5, 7; il che è incompatibile col fatto che per esempio 8 deve incontrare in rette sia 4 che 7 (e così 2, sia 3 che 6).

L'ipotesi fatta da principio sulle mutue congiungenti dei punti 1, 2,$\cdots$, ossia sulla esistenza di un caso ulteriore in cui ciascun piano della M_3^{2p-6} ne incontri altri tre, rimane dunque esclusa; e, all'infuori dei casi già dianzi incontrati, restano possibili soltanto quelli eventuali in cui ciascuno degli 8 piani incontri non più di due dei rimanenti. Inoltre dall'analisi fatta al n. prec. risulta che in ogni caso ulteriore lo spazio S_5 di due piani sghembi (fra gli 8) contenuti nella M_3^{2p-6} dovrà incontrare ulteriormente questa varietà in una superficie rigata **R**, almeno una quadrica, con direttrici negli stessi due piani (l'ipotesi contraria risultando esaurita dalla discussione precedente). Infine, se ogni piano della M_3^{2p-6} ne incontra soltanto 2 altri, o meno ancora, la proiezione della corrispondente W_3^{2p-2} di S_p dagli 8 punti quadrupli sarà una W_3 di ordine inferiore a $2p-2$ per almeno $4.8-8=24$ unità, quindi di ordine $\leq 2p-26$, in S_{p-8}; perciò $p-8 \leq 2p-24$, ossia $p \geq 16$.

Scelto ad arbitrio un piano α fra gli 8, ve ne saranno fra questi almeno 5 che non incontrano il primo; 3 qualunque dei 5 stanno con α in uno spazio Σ di dimensione ≤ 11, contenente per di più le rigate **R** dei 3 spazi S_5 che α determina con questi stessi 3 piani. D'altra parte lo spazio Σ è ancora contenuto in infiniti iperpiani dello spazio ambiente S_{p-1}; e le superficie residue di α rispetto alle sezioni iperpiane di M_3^{2p-6} devono incontrare α stesso in cubiche δ. Per gli iperpiani passanti per Σ queste cubiche devono contenere come parti le direttrici in α delle 3 rigate **R**; queste direttrici saranno per conseguenza rettilinee; le **R** saranno quadriche; e le cubiche δ, per questi iperpiani, risulteranno così già esaurite.

Proiettando M_3^{2p-6} dal piano α su uno spazio S_{p-4} (proiezione certo univoca (2)), al piano α corrisponderà sulla varietà proiezione una superficie ψ rap-

(1) In caso diverso, il vertice o rispettivamente la retta asse del cono generico del sistema dovrebbe appartenere alla varietà base di questo sistema, composta solamente degli 8 piani. Anche l'ipotesi che questa base sia, o comprenda una parte di dimensione 3 (e ordine ≤ 3) si esclude facilmente.

(2) FANO, «Memoria Accad. d'Italia», n. 8.

presentata dal sistema lineare delle cubiche δ (1), e luogo delle tracce degli S_3 tangenti a M_3^{2p-6} nei singoli punti di α. Alle rette intersezioni di α colle quadriche **R** (quadriche contenute in spazi S_4 passanti per α) corrispondono anche rette di ψ. E le rette del piano α alle quali corrispondono rette di ψ, in forza della nota rappresentazione di ψ su α mediante il sistema lineare di cubiche $|\delta|$, non possono essere che congiungenti di coppie di punti basi di $|\delta|$ stesso (e precisamente di coppie non mai allineate con un terzo punto base). Sono dunque complessivamente almeno 5 rette (in corrispondenza ai 5 piani di M_3^{2p-6} non incontranti α), ciascuna congiungente 2 e non più di 2 punti basi di $|\delta|$, tali inoltre che 3 qualunque fra esse costituiscono insieme una δ, e contengono perciò complessivamente tutti i punti base del sistema. Ciò premesso, i punti base del sistema $|\delta|$ saranno almeno 4 (2), perchè se no non darebbero luogo, come occorre, a almeno 5 congiungenti distinte. E nemmeno possono essere 4, perchè se no fra le 5 congiungenti occorrenti vi sarebbero le rette che uniscono certi 3 dei 4 a due a due, e questa terna non contiene l'ulteriore punto base. Infine con 5 o più punti base è pure impossibile trovare 5 congiungenti tali che 3 *qualunque* di esse contengano complessivamente tutti quei punti. Invero ciascun punto base deve appartenere a due almeno delle 5 rette: se no quest'unica retta sarebbe parte necessaria di ogni terna, contrariamente a quanto precede. Nè per uno stesso punto base possono passare tre delle rette, perchè questa terna conterrebbe 4 soli punti basi. Occorre dunque che per ogni punto base passino precisamente due delle rette, cioè che queste siano lati di un n-gono semplice, con $n \geqq 5$ (eventualmente di due n-goni, ciascuno con $n \geqq 4$); ed è allora manifestamente impossibile che 3 qualunque fra esse contengano tutti i vertici.

Resta così esaurita la dimostrazione che ci eravamo proposta al principio del presente numero.

10. Caso $p = 4$; varietà W_3^6 di S_4. — Rimangono ancora da esaminare il caso $p = 4$, nel quale la varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1} è uno spazio S_3 doppio; e gli altri casi eventuali in cui $p > 4$ e il sistema lineare $|\Phi|$, finora semplice e rappresentativo della M_3^{2p-6}, appartiene, come per $p = 4$, a un'involuzione.

Per $p = 4$ la W_3^{2p-2} di S_p è una W_3^6 di S_4 con superficie sezioni F^6 di S_3 di genere zero e bigenere uno, passanti doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. La W_3^6 ha pertanto 6 piani doppi, intersezioni di 4 spazi S_3 a due a due, e passanti perciò tutti per uno stesso punto. Assunto quest'ultimo punto come punto fon-

(1) Superficie di ordine n di uno spazio S_n; DEL PEZZO, Mem. cit. « Rend. Palermo », vol. 1.

(2) Fra questi sono certo comprese le intersezioni del piano α con quelli fra gli 8 ad esso incidenti; ma non è escluso vi possano essere altri punti base (sempre doppi per M_3^{2p-6}) oltre le dette intersezioni.

damentale [o] del sistema di coordinate, e i 4 spazi S_3 anzidetti come spazi $x_i = 0 \, (i = 1, 2, 3, 4)$, l'equazione di W_3^6 sarà del tipo (1):

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \{ x_0^2 + 2 x_0 f_1 (x_1 x_2 x_3 x_4) + f_2 (x_1 x_2 x_3 x_4) \} + \varphi_2 (x_2 x_3 x_4 \, , \, x_1 x_3 x_4 \, , x_1 x_2 x_4 \, , x_1 x_2 x_3) = 0$$

dove f_1, f_2 sono forme di gradi rispettivamente 1 e 2 nelle $x_1, \cdots x_4$, e φ_2 è forma quadratica nelle espressioni $x_2 x_3 x_4, \cdots$, la quale può supporsi contenente i soli termini coi quadrati di queste 4 espressioni, comprendendo i termini rimanenti nel prodotto $x_1 x_2 x_3 x_4 f_2$. Il punto [o] è 4[plo] per W_3^6; le rette uscenti da esso segano su W_3^6 le coppie di una involuzione $\mathbf{I}_2$; e da esso W_3^6 si proietta in un S_3 doppio (p. es. $x_0 = 0$) con superficie di diramazione:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \{ x_1 x_2 x_3 x_4 (f_1^2 - f_2) - \varphi_2 \} = 0$$

di ordine 10, composta dei 4 piani tracce degli spazi $x_1 = 0, \cdots x_4 = 0$ e proiezioni dell'intorno di [o] su W_3^6, e di una F^6 proiezione dell'intersezione di W_3^6 collo spazio $x_0 + f_1 = 0$.

Dagli spazi S_3 passanti per [o] la W_3^6 è incontrata secondo F^6 anche di genere zero e bigenere uno, aventi [o] come punto quadruplo, e 6 rette doppie tutte passanti per questo punto, spigoli di un angolo tetraedro completo. Queste (particolari) F^6 si proiettano da [o] in piani doppi con curva di diramazione composta di 4 rette, lati di un quadrilatero, e di una sestica passante doppiamente per i 6 vertici di questo quadrilatero (2).

Sulle F^6 sezioni iperpiane generiche di W_3^6 il sistema aggiunto alle curve piane è segato dalle ∞^3 superficie cubiche ξ aggiunte, cioè passanti (semplicemente) per le 6 rette doppie, spigoli di un tetraedro. Su W_3^6, le superficie Φ^6 di genere uno sono pertanto segate dai coni che dal punto [o] proiettano le dette ∞^3 superficie cubiche, cioè dai coni cubici passanti per i 6 piani $x_i = x_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3, 4; i \neq k)$; coni di equazione:

$$\lambda_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_2 x_1 x_3 x_4 + \lambda_3 x_1 x_2 x_4 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0 .$$

Le Φ^6 appartengono all'involuzione $\mathbf{I}_2$; non passano in generale per [o], e si proiettano doppiamente da [o] nelle ξ. Poichè il sistema $|\xi|$ (nei singoli

(1) GODEAUX, Nota cit. al n. 1, p. 137.

(2) Con una trasformazione quadratica avente i 3 punti fondamentali in altrettanti vertici del detto quadrilatero, fra i quali 2 vertici opposti, la curva di diramazione suindicata si muta in una curva complessiva di 8° ordine composta di una sestica con 2 tacnodi e due altri punti doppi, uno dei quali nell'intersezione delle 2 tangenti tacnodali, e di queste stesse 2 tangenti: caso particolare dunque – con un punto doppio in più – della curva di diramazione data da ENRIQUES per il piano doppio più generale di genere zero e bigenere uno con curva bicanonica di ordine zero. (lav. cit. delle « Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) » (3), to. XIV, 1907, p. 327, n. 10 e sg.).

iperpiani) è omaloidico, $|\Phi|$ è di grado due, con intersezioni variabili di 6° ordine e genere 2; riferibile quindi a un S_3 doppio (varietà M_3^{2p-6} di S_3) con superficie di diramazione di 6° ordine, i piani doppi essendo immagini delle Φ.

La W_3^6 non è razionale, in quanto ha come caso limite – quando nella sua equazione manchino i termini contenenti x_0 – il cono proiettante una F^6 di S_3 di genere zero e bigenere uno; cono avente bensì tutti i generi nulli, ma non razionale, tale non essendo la congruenza di 1° ordine delle sue generatrici, e nemmeno « unirazionale », cioè riferibile a un'involuzione dello spazio S_3, perchè anche in quest'ultimo caso alle sue generatrici dovrebbe corrispondere in S_3 una congruenza del 1° ordine, perciò razionale (1).

11. Supponiamo ora, se possibile, che pur con $p > 4$ il sistema lineare $|\Phi|$ sulla W_3^{2p-2} di S_p appartenga a un'involuzione $\mathbf{I}_k$ (di gruppi di k punti). Poichè il sistema lineare $|\Phi|$ ha dimensione $p-1$ e grado $2p-6$, e perciò il sistema lineare di curve da esso segnato sopra una Φ generica ha dimensione $p-2$ e serie caratteristica g_{2p-6}^{p-3}, potrà essere soltanto $k=2$ (come per $p=4$), cioè l'involuzione $\mathbf{I}$ dovrà comporsi di *coppie* di punti.

Per ogni coppia dell'involuzione $\mathbf{I}_2$ passano ∞^{p-2} superficie F, sezioni iperpiane di W_3^{2p-2}; e in corrispondenza alle ∞^3 coppie di $\mathbf{I}_2$ si troverebbero così ∞^{p+1} superficie F. Poichè fra queste soltanto ∞^p sono distinte, è chiaro che, così facendo, o una F generica si avrà ∞^1 volte e conterrà perciò ∞^1 coppie di $\mathbf{I}_2$, oppure le F così ottenute saranno soltanto ∞^{p-1} e ciascuna di queste conterrà ∞^2 coppie di $\mathbf{I}_2$, apparterrà dunque a questa involuzione.

Il primo caso si esclude facilmente. Si consideri infatti, in tal caso, sopra una F generica una delle ∞^1 coppie di $\mathbf{I}_2$, e una generica δ fra le sezioni iperpiane della stessa F passanti per tale coppia. Sopra tale F le superficie Φ, appartenenti alla $\mathbf{I}_2$, segnano il sistema totale delle curve aggiunte alle sezioni iperpiane, e pertanto quella coppia imporrebbe a un gruppo canonico della curva δ un'unica condizione, il che non è possibile.

Nel secondo caso alla $\mathbf{I}_2$ appartengono ∞^{p-1} superficie F, sezioni iperpiane di W_3^{2p-2}, il cui sistema indicheremo con Σ. La $\mathbf{I}_2$, dovendo mutare su W_3^{2p-2} sistemi lineari di superficie in sistemi anche lineari, muterà in sè stesso il minimo sistema lineare di F contenente Σ, e anzi ogni singola F di questo sistema lineare. E poichè questo sistema lineare minimo contenente Σ non può essere il sistema totale ∞^p delle F (superficie non tutte unite), se ne trae che Σ, sistema ∞^{p-1} è esso stesso lineare, cioè si compone delle F segate da iperpiani (S_{p-1}) passanti, per un punto fisso O. E le coppie di $\mathbf{I}_2$, dovendo ciascuna di esse presentare una sola condizione agli iperpiani passanti per O, saranno allineate con O. D'altra parte le Φ, appartenenti tutte alla $\mathbf{I}_2$, segano sulle F curve canoniche C_p^{2p-2}: sulle

(1) FANO, « Rend. R. Accad. dei Lincei » (6), vol. 15, 1° sem. 1930, p. 3.

F del sistema Σ (cioè contenute in iperpiani passanti per O) queste C_p^{2p-2} canoniche apparterranno pur esse alla $\mathbf{I}_2$, e staranno perciò su coni ellittici Γ^{p-1} di S_{p-1} di vertice O, sui quali verranno segate da quadriche (quadriche non passanti in generale per O, il che mostra che le Φ generiche pur esse non passano per O). Le ∞^1 coppie di $\mathbf{I}_2$ su queste C_p^{2p-2} formano involuzioni ellittiche con $2p-2$ punti doppi (1), costituenti una sezione iperpiana della curva: la sezione coll'iperpiano (S_{p-2}) polare di O rispetto a una qualsiasi quadrica che seghi la C_p^{2p-2} sul cono Γ^{p-1}. Variando la C_p^{2p-2} sopra una stessa Φ, questa quadrica potrà sempre scegliersi in modo da essere sezione di una medesima quadrica di S_p contenente la detta Φ, e perciò i punti doppi di $\mathbf{I}_2$ sopra tale Φ staranno in uno stesso S_{p-1} (polare di O rispetto alla detta quadrica contenente Φ). Infine la superficie di W_3^{2p-2} luogo degli ∞^2 punti doppi di $\mathbf{I}_2$ (all'infuori eventualmente di O), essendo incontrata da ciascuna Φ secondo una sezione iperpiana di quest'ultima superficie, sarà a sua volta (come per $p=4$) una determinata F^{2p-2}, sezione iperpiana di W_3^{2p-2} con uno spazio $S_{p-1} \equiv \Delta$.

Le F del sistema Σ, segate su W_3^{2p-2} da iperpiani passanti per O, sono incontrate a loro volta dagli S_{p-2} di questi iperpiani passanti pure per O in curve C_p^{2p-2} normali, non speciali, appartenenti, esse e le loro serie canoniche, alla $\mathbf{I}_2$; tali curve sono pertanto iperellittiche, stanno su coni razionali Γ^{p-3} di vertice O, e hanno per conseguenza O come punto quadruplo. Anche la W_3^{2p-2} ha in O un punto quadruplo (come per $p=4$) (2), dal quale si proietta in una W_3^{p-3} doppia di S_{p-1} (per $p=4$, un S_3 doppio) a curve sezioni razionali. Su questa W_3^{p-3} le F passanti per O hanno per immagini le sezioni iperpiane (doppie), mentre le Φ hanno per immagini superficie doppie di ordine $p-1$ a sezioni ellittiche (3). Sulle C_p^{2p-2} iperellittiche contenute nei coni razionali Γ^{p-3}, $2p-2$ fra i $2p+2$ punti doppi della g_2^1 cadono nelle intersezioni collo spazio Δ; gli altri 4 cadranno nei 4 punti sovrapposti in O. Per conseguenza il cono tangente in O a W_3^{2p-2} avrà le sue generatrici tutte osculatrici a W_3^{2p-2} stessa (come già per $p=4$). D'altra parte le superficie F (sezioni di W_3^{2p-2}) passanti per O, benchè di tipo particolare, sono pur sempre di genere zero e bigenere uno (poichè anche su di esse il sistema delle sezioni iperpiane e quello delle intersezioni colle Φ sono mutuamente aggiunti), e le loro sezioni iperpiane per O hanno egualmente genere p. Perciò sopra tali F, considerato il punto O come curva fondamentale, questa curva

(1) In base alla formola di Zeuthen applicata alla corrispondenza (2, 1) fra la curva C_p^{2p-2} e l'involuzione ellittica di coppie di punti su di essa.

(2) Sulla W_3^{2p-2} i due sistemi lineari $|2F|$, doppio delle sezioni iperpiane, di grado $8(2p-2)$, e $|2\Phi|$, di grado $8(2p-6)$, sono segati rispettivamente dalla totalità delle quadriche di S_p e dai coni quadrici di vertice O. La differenza fra i due sistemi è ora costituita dal punto stesso O, contato due volte; il che conduce appunto alla differenza di grado $4 . 2^3 = 32$.

(3) Per $p=4$ (n. 10), le superficie cubiche ξ.

deve risultare impropria; dovrà dunque comporsi di parti, nessuna delle quali incontri le sezioni iperpiane per O in più di un punto: in altri termini O dovrà essere per W_3^{2p-2} punto 4-spaziale. E la superficie di diramazione della W_3^{p-3} doppia si comporrà della F^{2p-2} sezione di W_3^{2p-2} coll'iperpiano Δ (o di una proiezione di questa), e di 4 piani, tracce degli S_3 tangenti a W_3^{2p-2} in O.

Per $p > 4$ la W_3^{p-3} di S_{p-1} (che per $p = 4$ era un S_3 doppio), contenendo i 4 piani suddetti, sarà una ∞^1 razionale normale di piani (per $p = 5$, un cono quadrico di S_4); e su di essa dovrà stare la F^{2p-2} di diramazione menzionata, di genere zero e bigenere uno. Poichè questa, sopra W_3^{2p-2}, è sezione iperpiana, equivalente alla somma delle sezioni iperpiane per O e del punto O stesso, sopra W_3^{p-3} sarà equivalente alla somma di una sezione iperpiana contata due volte e dei 4 piani immagini di O; dovrebbe dunque incontrare gli ∞^1 piani di W_3^{p-3} secondo coniche, il che è incompatibile coll'essere di bigenere > 0. Pertanto, se $p > 4$, è escluso che il sistema lineare $|\Phi|$ su W_3^{2p-2} appartenga a un'involuzione.

12. I risultati ottenuti nella presente Memoria possono così riassumersi:

Le varietà algebriche a 3 dimensioni W_3^{2p-2} *di spazi* S_p, *non coni, con superficie sezioni di caratteri* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (genere zero, bigenere uno, curva bicanonica di ordine zero) *esistono solo quando il genere p delle curve sezioni ha uno dei valori* $p = 4, 6, 7, 9, 13$.

Per $p = 4$, la W_3^6 di S_4 ha un punto quadruplo e sei piani doppi passanti per questo punto, mutue intersezioni di quattro spazi S_3; non è razionale, e nemmeno unirazionale.

Le ulteriori W_3^{2p-2} *di* S_p *suindicate* ($p = 6, 7, 9, 13$) *sono tutte razionali; hanno otto punti quadrupli isolati, e sono riferibili* (valendosi del sistema lineare ∞^{p-1} di superficie di generi uno già costruito da L. Godeaux) *a varietà* M_3^{2p-6} *di* S_{p-1} *a curve sezioni canoniche, contenenti otto piani, immagini dei punti* 4^{pli} *di* W_3^{2p-2}.

Inoltre: *I sistemi lineari semplici di superficie dello spazio* S_3 *aventi genere zero e bigenere uno e curva bicanonica di ordine zero possono ridursi con una trasformazione Cremoniana a uno dei tre sistemi qui sotto indicati, o a uno contenuto in essi:*

1. *sistema* ∞^6 *delle superficie di* 7^0 *ordine con 3 cubiche sghembe doppie, tutte passanti per uno stesso gruppo di 5 punti*, perciò giacenti, a coppie, su quadriche (n. 3);

2. *sistema* ∞^9 *delle superficie di* 7^0 *ordine passanti doppiamente per i 9 spigoli di due triedri* (n. 8);

3. *sistema* ∞^{13} *delle superficie di* 6^0 *ordine passanti doppiamente per i 6 spigoli di un tetraedro* (n. 4, 9).

Le M_3^{2p-6} di S_{p-1} con 8 piani cui sono riferibili le W_3^{2p-2} anzidette sono tutte rappresentate su S_3 da sistemi lineari di superficie del 4^0 ordine.

Torino, gennaio 1937–XV.