Gino Fano

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche

in: Atti I Congr. U.M.I. Firenze, 1937, p. 245–250

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1937_2>

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI A CURVE - SEZIONI CANONICHE,

di GINO FANO, a Torino.

Alle varietà indicate nel titolo, del tipo M_3^{2p-2} di S_{p+1}, non coni, con superficie sezioni aventi tutti i generi eguali all'unità, ho dedicata una comunicazione preliminare al Congresso internazionale di Bologna del 1928 (1). Aggiungo oggi qualche risultato ulteriore, ottenuto in questi ultimi due anni (2).

A chiunque si è occupato, anche poco, di geometria algebrica è nota la questione, che attende risposta da circa mezzo secolo (e la risposta sarà probabilmente negativa), della razionalità o meno della forma (o ipersuperficie) cubica generale dello spazio S_4, cioè della possibilità o meno di rappresentare birazionalmente questa varietà sullo spazio S_3, ossia di risolvere l'equazione generale di 3° grado fra 4 variabili mediante funzioni razionali e univocamente invertibili di 3 parametri. Mentre per la razionalità di una curva algebrica è necessario e sufficiente che ne sia nullo il genere, e per una superficie che ne siano nulli il genere aritmetico e il bigenere (3), la varietà cubica predetta presenta invece un caso di varietà a tre dimensioni presumibilmente non razionale, pur essendo completamente regolare e avendo nulli tutti i generi e plurigeneri. Le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} delle quali qui mi occupo sono pur esse regolari e con tutti i generi nulli, e potevano presumersi, almeno per i valori più piccoli di p, *più lontane dalla razionalità* che non la forma cubica generale di S_4; p. es., fra esse, la M_3^6 di S_5 ($p=4$) generale diventa birazionalmente equivalente alla detta forma cubica quando la si obblighi a contenere tre piani mutuamente incidenti. Da ciò l'idea mia, che risale a parecchio tempo

---

(1) Atti del detto Congresso (Bologna, Zanichelli) vol. IV, p. 115.

(2) V. i miei lavori recenti in: *Scritti matematici offerti a* LUIGI BERZOLARI (Pavia, Tip. Rossetti, 1936) p. 329; Rend. R. Accad. dei Lincei (6), vol. 23, I° sem. 1936, p. 813; Memorie R. Accad. d'Italia, vol. VIII (1936), p. 23.

(3) CASTELNUOVO, Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) (3), vol. X, (1896).

addietro e che ho coltivata ad intervalli di tempo, di cominciare collo studio di queste ulteriori varietà, che presentavano un problema fino ad un certo punto analogo e in casi che si potevano ritenere meno difficili. E tale questione ho trattata con metodo « sperimentale », per quel tanto che si può parlare di metodo sperimentale in matematica; esame accurato dei casi singoli, e successiva ricerca intesa a comprendere i risultati singoli in enunciati generali, e stabilire questi per via deduttiva.

Come le curve canoniche C_p^{2p-2} di S_{p-1} possono contenere (anche se $p > 4$) una serie lineare g_3^1, e stanno allora su rigate razionali normali R^{p-2}, così le M_3^{2p-2} in parola, quando hanno curve-sezioni di questo tipo, sono luoghi di ∞^1 superficie cubiche di spazi S_3, spazi formanti una V_4^{p-2} di S_{p+1}. Di questo caso, per brevità, non mi occupo.

Delle due varietà M_3^4 di S_4 e M_3^6 di S_5 ($p = 3, 4$) del tipo più generale ho dimostato già da tempo (4) che sono *irrazionali* e *birazionalmente distinte fra loro*. La prima non contiene, all' infuori delle sezioni iperpiane, altri sistemi lineari ∞^4 di superficie regolari di generi uno, ed è quindi priva di trasformazioni birazionali; la seconda ammette come sole trasformazioni birazionali le proiezioni doppie dalle sue ∞^1 rette e i loro prodotti. ENRIQUES ha dimostrato che tale M_3^6 è riferibile a un' involuzione S_3, dando così il primo esempio di involuzione irrazionale nello spazio S_3 (5). APRILE ha precisato che si tratta di involuzione di ordine 36 (6).

Per $p = 5$ si ha la M_3^8 di S_6, intersezione generale di 3 quadriche, la quale contiene già congruenze del I^0 ordine di curve razionali, con superficie razionali 4-secanti; è quindi riferibile a un' involuzione $\mathbf{I}_4$ di S_3. Qui le trasformazioni birazionali già si moltiplicano; vi sono le proiezioni doppie dai piani delle ∞^2 coniche, e altre trasformazioni che sulle curve delle dette congruenze (congruenze con superficie bisecanti, ma non razionali) subordinano involuzioni; sicchè non si riesce più a dominarne bene l'insieme (il gruppo). Unica differenza teoricamente interessante, praticamente finora non di grande utilità, è che sulle varietà M_3 irrazionali a generi nulli e non riferibili a coni, quindi in tutte quelle riferibili a involuzioni irrazionali di S_3, non si possono colle trasformazioni birazionali formare gruppi continui finiti, nel senso di LIE (7); non vi è una trasformazione birazionale infinitesima capace di generare un gruppo ∞^1 algebrico. Tuttavia, per questo caso $p = 5$, un geometra inglese della scuola del BAKER, il Sig. L. ROTH,

(4) Atti R. Accad. di Torino, vol. 43 (1907-08), p. 973; vol. 50 (1914-15), p. 1067.
(5) Rend. R. Accad. dei Lincei (5), vol. 21, I sem. 1912, pag. 81.
(6) Rassegna di Matem. e Fisica, anno I (1921), p. 133.
(7) FANO, Rend. R. Accad. dei Lincei (6), vol. 15, I sem. 1932, p. 3.

ha annunciato recentemente [8] di aver dimostrato che la M_3^8 di S_6 in parola è irrazionale: risultato importante in quanto implicherebbe l'esistenza in S_3 di una involuzione irrazionale $\mathbf{I}_4$. La dimostrazione non fu ancora pubblicata; da notizie avute per lettera risulta che l'A, riprendendo una vecchia mia direttiva, sia riuscito a dimostrare che tale M_3^8 non può contenere un sistema ∞^3 omaloidico di superficie.

Per $p=6$ si ha una M_3^{10} di S_7 riferibile nel caso più generale a un'involuzione $\mathbf{I}_6$ di S_3 (non a un'involuzione di ordine minore, per quanto finora risulta). Da $p=7$ in poi, pur senza averne una dimostrazione generale, le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} note e di dubbia razionalità sono tutte riferibili a involuzioni di coppie di punti di S_3.

Per queste varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} ho risolto ultimamente le due questioni seguenti:

1) Per $p>10$ esse sono tutte razionali, tranne un caso ($p=13$) riferibile alla varietà cubica di S_3. Ciò perchè queste varietà possono proiettarsi in altre, dello stesso tipo M_3^{2p-2} di S_{p+1} per un valore più piccolo di p, ma particolari, contenenti un piano, e, come residuo di questo piano rispetto alle superficie sezioni iperpiane, un sistema lineare di superficie razionali sufficiente ad assicurare la razionalità della M_3 [9]. Fra queste M_3^{2p-2}, quelle irrazionali sono dunque certo in numero molto limitato.

2) Mentre per ogni valore intero di $p>3$ esistono curve canoniche di genere p, nonchè superficie F^{2p-2} di S_p regolari di generi uno a curve sezioni canoniche [10], invece la successione di queste M_3^{2p-2} di S_{p+1}, al crescere di p, è limitata; termina con due diversi tipi di M_3^{72} di S_{38} ($p=37$). Varie ragioni concorrevano a far ritenere probabile che così fosse. Queste varietà, dalle linee di ordine più piccolo in esse contenute (vi sono generalmente ∞^1 rette, ∞^2 coniche, ∞^3 cubiche,...), si proiettano in altre della medesima successione, corrispondenti a valori più piccoli del carattere p, e particolari (per questo nuovo p), in quanto contengono una rigata immagine della linea da cui si è fatta la proiezione. Fra altro esse possono ricondursi (tranne nel caso generale $p=3$) a spazi S_3 doppi con superficie di diramazioni del 6° ordine aventi singolarità crescenti al crescere di p, oppure (se $p>4$) a forme di 4° grado di S_4 sempre più specializzate (L. ROTH); e questo appunto induce a ritenere che la successione a un certo punto debba arrestarsi, cioè che le M_3^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche da un

---

(8) Rend. R. Accad. dei Lincei (6), vol. 24, II° sem. 1936, p. 351

(9) FANO, Annali di Matem. (3), vol. 24 (1925), p. 49; *Scritti matematici offerti ad* ENRICO D'OVIDIO (Torino, Bocca, 1918), p. 342

(10) ENRIQUES, Rend. Accad. Bologna, 13 dic. 1908; SEVERI, Rend. R. Istituto Veneto, vol. 68, parte II (1908-09), p. 249.

certo p in poi siano coni. D'altra parte io da tempo avevo osservato che queste M_3^{2p-2}, per gli ordini più bassi, contengono una rigata di ordine, in massima, decrescente al crescere di p (per $p=3$, 4, 5, 6, 7, 8, rispett. di ordine 320, 180, 128, 100, 84 oppure 72 (due diversi tipi), 70), dando così a pensare che la successione abbia ad arrestarsi quando quest'ordine si riduce a zero, in modo in certo senso analogo a ciò che avviene per le superficie non rigate a curve sezioni ellittiche (cioè sezioni pur queste di genere uno) ([11]) contenenti rette in numero finito decrescente al crescere dell'ordine delle superficie stesse, e che si arrestano alla superficie di ordine 9, priva di rette.

All'atto pratico, meglio che all'ordine della detta rigata conviene fare attenzione alla sua curva doppia, e al numero anche decrescente (81, 31, 17, 11, 8 oppure 7, 6) dei punti in cui questa curva doppia incontra le generatrici . Quando quest'ultimo numero si è ridotto a zero, sommando la rigata (non ancora scomparsa) al sistema lineare delle sezioni iperpiane, si ha un sistema lineare di superficie ancora di generi uno e di maggior dimensione, quindi come varietà rappresentativa una M_3^{2p-2} della stessa successione con p più elevato, non più contenente rette (della quale M_3^{2p-2} la precedente è proiezione). Si riesce così, con qualche ulteriore avvertenza, a stabilire che, oltre un certo valore (assegnabile) di p, le M^{2p-2} di S_{p+1}, in parola, o non contengono rette (semplici), o sono proiezioni di altre consimili non contenenti rette (all'infuori eventualmente di piani isolati).

Rimangono pertanto a determinare le M_3^{2p-2} non contenenti rette (semplici), all'infuori di piani isolati. La ricerca di esse si riconduce a quella delle superficie F^{2p-2} di S_p loro sezioni iperpiane; e precisamente, per ogni singola M_3^{2p-2}, una *generica* di queste sezioni deve essere tale che, pur variando essa nel sistema lineare di queste sezioni e così eventualmente specializzandosi, non possa mai venire a contenere una retta, oppure una retta in più di quelle già contenute nella superficie sezione generica (e che danno luogo a piani della M_3^{2p-2}). L'esempio più semplice è dato dalla superficie F^{16} di S_9 ($p=9$) rappresentante il sistema lineare di curve segato dalle quadriche su una F^4 generale di S_3 ([12]): essa, pur variando comunque con continuità in S_9 e comunque specializzandosi, rimane sempre riferibile a una (sia pur particolare) F^4 di S_3, e rappresenta sempre il sistema lineare segato dalle quadriche su questa nuova F^4: non può dunque venir a contenere in più che curve di ordine pari, perciò non mai rette. La detta F^{16} generale contiene naturalmente un sistema lineare ∞^3 di C_3^8, metà

([11]) DEL PEZZO, Rend. Circ. Matem. di Palermo, vol. I, (1884-87), p. 241.
([12]) ENRIQUES, l. c., N. B. e p. 6.

del sistema delle C^{16} sezioni iperpiane; e da ciò si trae facilmente che una M_3^{16} di S_{10} avente tale F^{16} come sezione generica contiene a sua volta un sistema lineare di superficie di ordine 8, metà del sistema delle sezioni iperpiane, perciò di grado 2 (delle quali superficie le C_3^8 sono sezioni iperpiane), e che conduce in questo caso a rappresentare la M_3^{16} sopra uno spazio S_3 doppio. Casi analoghi si hanno sostituendo alla F^4 generale di S_3 una qualsiasi $F^{2\pi-2}$ di S_π a curve-sezioni canoniche non contenente altri sistemi lineari di curve all'infuori del sistema di queste stesse sezioni e dei suoi multipli; e alle quadriche di S_3, la totalità delle forme di S_π di un ordine assegnato qualsiasi $\geqq 2$. Si trovano così, fra altro, tutte le M_3^{2p-2} di S_{p+1} rappresentate su S_3 da sistemi lineari doppi di quelli a intersezioni variabili ellittiche enumerati tempo addietro da ENRIQUES ([13]). Fra questi ultimi sistemi è compreso uno di dimensione massima ($p=37$), costituito dalle superficie di 6^0 ordine aventi a comune un punto quadruplo e una conica infinitesima doppia infinitamente vicina a questo punto. Vi sono però anche altri casi, nei quali, sulle superficie sezioni F^{2p-2}, il sistema lineare $|C_p^{2p-2}|$ delle curve canoniche sezioni iperpiane, anzichè essere semplicemente multiplo di un altro sistema, è rappresentabile per mezzo di altre curve in esso parzialmente contenute sotto la forma $\Sigma k_i \gamma_i$ colle k_i numeri interi $\geqq 2$. Anche queste γ_i sono allora sezioni iperpiane di superficie di egual ordine contenute nella M_3^{2p-2}; e per mezzo di queste ultime si riesce a costruire su M_3^{2p-2} un sistema lineare di superficie razionali, ad intersezioni razionali od ellittiche, che conduce facilmente alla determinazione dei vari casi possibili.

Concludendo, osserviamo ancora che per una varietà algebrica a 3 dimensioni la massima dimensione di un sistema lineare di superficie regolari di generi uno in essa contenuto è certamente un invariante assoluto. Per le due varietà generali M_3^4 di S_4 e M_3^6 di S_5 della nostra successione questo invariante vale rispettivamente 4 e 5; per le varietà seguenti nelle successioni delle M^{2p-2} di S_{p+1} esso è ovviamente $\geqq p+1$; per le varietà razionali vale 38. È presumibile perciò che esistano effettivamente nella detta successione varietà, ovviamente irrazionali, per le quali esso abbia valori intermedi; e che la forma cubica generale di S_4, riferibile a un caso $p=13$, costituisca l'ultimo termine prima di giungere alla razionalità. Per questa forma cubica io ho anzi mostrato in passato ([14]) che, se è irrazionale, non può contenere sistemi lineari

---

([13]) Rend. R. Accad. dei Lincei, (5) vol. I sem. 1894, p. 481 - 531; Mathem Annalen. 46 (1895), p. 179.

([14]) Lavori cit. degli Annali di Matem. (1915) e *Scritti d'* OVIDIO, (1918). v. nota (9).

semplici di superficie razionali se non di grado 3, a intersezioni variabili ellittiche (come le sezioni iperpiane). Ora possiamo aggiungere che, nella stessa ipotesi della irrazionalità, essa non può nemmeno contenere sistemi lineari di superficie regolari di generi uno di dimensione > 14 (cioè superiore alla dimensione del sistema delle sue intersezioni con quadriche).