Gino Fano

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche

Mem. Acc. It., Vol. **8** (1937), p. 23–64

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1937_1>

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI A CURVE-SEZIONI CANONICHE

Memoria di GINO FANO (*)

RIASSUNTO. — Vengono studiate le varietà indicate nel titolo, del tipo M_3^{2p-2} nello spazio S_{p+1}, essendo p il genere delle curve–sezioni. Esse esistono solo per $p \leq 37$, e per $p > 10$ sono razionali, salvo un unico caso $p = 13$, tuttora di dubbia razionalità. Fra esse vengono particolarmente determinate quelle degli ordini più elevati, insieme coi sistemi lineari di superficie di generi uno che le rappresentano sullo spazio S_3.

1. Nella mia Nota: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, che ha formato oggetto di una comunicazione al Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna (1928) (1), ho esposta qualche osservazione preliminare sulle varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} ($p \geq 3$), non coni, a curve–sezioni canoniche (C_p^{2p-2} di S_{p-1}), delle quali è già noto che non sono razionali, se del tipo più generale, nei due casi $p = 3$ e $p = 4$ (2), mentre sono di dubbia razionalità i primi casi successivi. I casi $p = 5, 6, 7$ sono stati studiati più particolarmente (per quanto concerne i loro caratteri proiettivi, fra altro le rigate contenute in tali M_3^{2p-2}; perciò indipendentemente dalla questione della razionalità) nella mia recente Memoria: *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni a curve–sezioni canoniche* (3). Ad essa fa seguito il presente lavoro (4).

(*) Memoria presentata da S. E. Severi nell'Adunanza del 13 novembre 1936-XV.

(1) Atti del Congresso suindicato, vol. IV (pubbl. 1931), pag. 115.

(2) Vedi due mie Note negli « Atti della R. Acc. di Torino », vol. XLIII (1907–08), pag. 973; vol. L (1914–15), pag. 1067.

(3) *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari* (Tip. Rossetti, Pavia, 1936). Questa Memoria verrà designata in seguito con « Berz. ».

(4) I risultati principali di questo lavoro furono già enunciati in una Nota presentata il 5 giugno 1936–XIV alla R. Accademia Nazionale dei Lincei (« Rendiconti » detta Accademia (6), vol. XXIII, 1° sem. 1936, pag. 813).

È noto che le superficie F^{2p-2} di S_p aventi tutti i generi eguali alla unità ($p_a = p_g = P = 1$) e quindi curve–sezioni canoniche, anche se non coni, esistono per ogni valore intero di $p \geqq 3$; e anzi per ciascuno di questi valori ne esiste una famiglia, dipendente da 19 moduli, la cui superficie più generale contiene soltanto curve intersezioni complete (con V_{p-1} di S_p), cioè sezioni iperpiane e loro multipli. Queste ultime superficie (generali) dànno luogo pertanto a una infinità numerabile di casi, tutti birazionalmente distinti [1]. Invece alcune proprietà delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} aventi le F^{2p-2} suindicate come sezioni iperpiane, perciò anche curve–sezioni canoniche, e principalmente il fatto che le M_3^{2p-2} degli ordini minimi, corrispondenti cioè ai valori più piccoli di p, se non sono coni, contengono una ∞^1 di rette, cioè una rigata, di ordine, in massima, decrescente al crescere di p [2], davano a presumere che queste varietà potessero esistere (e così è realmente) solo per p non superiore a certi valori, pei quali l'ordine di quella rigata si riduce a zero. Era altresì a credere che le dette M_3^{2p-2}, benchè non razionali o di dubbia razionalità per i primi valori di p, dovessero invece risultare razionali per valori di p più elevati [3]; e pertanto lo studio di tali M_3^{2p-2} dovesse condurre, se pur non ancora a una classificazione completa dei sistemi lineari di superficie di generi uno dello spazio S_3, almeno a una maggiore conoscenza di questi sistemi, in particolare di quelli di dimensione più elevata.

A questa ricerca è dedicato il presente lavoro. Le M_3^{2p-2} di S_{p+1} qui studiate sono completamente regolari e hanno tutti i generi nulli: sono pertanto esclusi i coni aventi le medesime curve e superficie sezioni, cioè i coni proiettanti superficie F^{2p-2} di S_p di generi uno, i quali hanno genere aritmetico $P_a = -1$, e perciò irregolarità tridimensionale $= 1$ [4].

Le curve canoniche C_p^{2p-2} di S_{p-1}, e così le superficie F^{2p-2} di S_p e le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} che hanno queste curve come sezioni, sono tutte contenute in $\binom{p-2}{2}$ quadriche linearmente indipendenti dei rispet-

---

(1) Enriques, « Rendiconti R. Accad. d. Scienze dell'Istituto di Bologna », seduta 13 dicembre 1908; Severi, « Atti R. Ist. Veneto », vol. LXVIII (parte II), 1908–09, pag. 249 (adunanza 10 gennaio 1909).

(2) Salvo nel caso delle M_3^{2p-2} contenenti un fascio di superficie cubiche; caso che viene trattato a parte (n. 13 e seg.).

(3) Esse sono infatti razionali per $p > 10$ (cfr. n. 8), salvo un solo caso di tuttora dubbia razionalità, per $p = 13$, e cioè la M_3^{24} di S_{14} riferibile a una forma cubica generale di S_4, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le intersezioni di quest'ultima forma colla ∞^{14} quadriche del suo spazio.

(4) Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », 28 (1909), pag. 33; n. 28.

tivi spazi. Però, se la C^{2p-2} contiene una serie lineare g_3^1 (i cui gruppi sono in tal caso allineati, e disposti sulle generatrici di una rigata razionale normale R^{p-2}, non cono se $p \geq 5$), le quadriche passanti per detta curva contengono tutte anche questa rigata (¹). E in « Berz. » ho osservato che le F^{2p-} ˬ M_3^{2p-2} in parola, le quali abbiano anche una sola curva sezione con serie g_3^1, hanno altresì tutte le curve sezioni di questo medesimo tipo; e contengono, se $p > 4$, un fascio di cubiche ellittiche γ_1^3, o rispettivamente di superficie cubiche φ^3, nei piani o rispettivamente negli spazi S_3 di una varietà razionale normale V_3^{p-2} di S_p o V_4^{p-2} di S_{p+1}, comune pur essa a tutte le quadriche passanti per la F^{2p-2} o M_3^{2p-2} (²). Queste M_3^{2p-2} contenenti un fascio di φ^3 vanno perciò studiate (come già in «Berz.») a parte dalle rimanenti, che costituiscono il tipo più generale (per esse, vedi n. 13 e seg.).

Con γ_p^n, δ_p^n, $\cdots$ indicheremo sempre curve algebriche di ordine n e genere p; con φ^n, Φ^n, Γ^n superficie e con R^n superficie rigate di ordine n; con C_p^{2p-2} o C^{2p-2} curve canoniche di genere p (di ordine $2p-2$, in S_{p-1}); con F^{2p-2}, M_3^{2p-2} superficie (con tutti i generi eguali a uno) e varietà a 3 dimensioni, non coni, appartenenti a spazi S_p o rispettivamente S_{p+1}, aventi curve sezioni C^{2p-2}; con V_3^{p-2}, V_4^{p-2} varietà di questi medesimi spazi, ∞^1 razionali normali di piani o rispettivamente di S_3.

2. Verifichiamo anzitutto che le M_3^{2p-2} completamente regolari che dobbiamo qui determinare non possono essere luoghi di ∞^2 rette (tali che per ogni punto ne passi un numero finito ≥ 1).

Se per ogni punto di M_3^{2p-2} passasse una sola di queste rette, il loro sistema Δ determinerebbe fra due superficie sezioni F^{2p-2} una corrispondenza biunivoca, senza eccezioni essendo le F^{2p-2} prive di curve eccezionali, e colla curva intersezione C_p^{2p-2} luogo di punti uniti. Questa corrispondenza sarebbe proiettiva, dovendo mutare il sistema delle sezioni iperpiane dell'una F^{2p-2}, come sistema completo individuato dalla detta C_p^{2p-2}, nell'analogo sistema dell'altra; e anzi prospettiva, essendo la stessa C_p^{2p-2}, e quindi l'intero suo spazio S_{p-1}, luogo di punti uniti. La M_3^{2p-2} sarebbe dunque un cono, contro l'ipotesi. Supposto invece che per ogni punto di M_3^{2p-2} passino più rette di un sistema Δ irriducibile, gli spazi S_3 tangenti alla M_3 in due punti diversi di una stessa retta g (spazi che con-

---

(¹) Vedi anche Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III (Bologna, Zanichelli, 1924), pag. 106.

(²) Vedi anche P. Du Val, « Rendiconti R. Accad. Naz. dei Lincei », (6), vol. XV (1932), pag. 276.

terranno entrambi questa retta) determineranno uno spazio S_5 contenente tutte le rette di Δ infinitamente vicine a g (di ciascuna delle quali esso già contiene due punti), perciò anche tutti gli S_3 tangenti alla M_3 nei vari punti di g, nonchè l'intera rigata R delle rette di Δ incidenti a g. Le ulteriori rette di Δ uscenti dagli ∞^2 punti di R potranno eventualmente stare tutte sopra R; ma questa sarà allora una rigata con ∞^1 direttrici rettilinee, perciò una quadrica di S_3, o composta di quadriche; la M_3^{2p-2} sarà luogo di ∞^1 quadriche, e le F^{2p-2} sezioni saranno luoghi di ∞^1 coniche, contrariamente all'ipotesi che siano di generi uno. In ogni altro caso le rette ulteriori di Δ uscenti dai varî punti di R esauriranno Δ stesso; perciò lo spazio S_6 che contiene R e una qualsiasi g' di queste rette conterrà anche la rigata R$'$ delle rette di Δ appoggiata a g', e quindi tutte le ∞^2 rette di Δ appoggiate a una generatrice di R e a una di R$'$, cioè tutta la M_3^{2p-2}. Ne segue $p+1 \leq 6$, cioè $p \leq 5$; mentre d'altra parte nei casi $p \leq 5$ fra le varie M_3^{2p-2}, tutte ormai note, non ve n'è alcuna contenente ∞^2 rette, tali che ne passi almeno una per ogni punto.

Questo ragionamento prova altresì che, se una M_3^{2p-2} del tipo richiesto è tale che le sue sezioni F^{2p-2} contengano ciascuna un numero finito k di rette, e perciò la M_3^{2p-2} stessa contenga ∞^2 rette, queste dovranno distribuirsi in singole superficie, e perciò in k piani (cfr. anche n. 4).

3. Alcune osservazioni sulle F^{2p-2} e M_3^{2p-2}. — Sopra una curva canonica C_p^{2p-2} di S_{p-1} i gruppi di due serie lineari complete mutuamente residue rispetto alla serie canonica, g_n^π e $g_{2p-2-n}^{p-1-n+\pi}$, appartengono rispettivamente a spazi $S_{n-\pi-1}$ e $S_{p-2-\pi}$; e ciascuna delle due serie è segata per intero dalla totalità degli iperpiani S_{p-2} passanti per lo spazio di uno qualunque dei gruppi dell'altra.

Consideriamo ora sopra una F^{2p-2} di S_p due curve irriducibili, mutuamente residue rispetto alle sezioni iperpiane, e i sistemi lineari completi privi di punti basi da esse individuati: $|\gamma_\pi^n|$ e $|\gamma_{p-1-n+\pi}^{2p-2-n}|$, di dimensioni eguali ai rispettivi generi. Due curve generiche rispettivamente dei due sistemi si incontrano in $n-2\pi+2$ punti; questo numero dovendo essere >0, ossia $n>2\pi-2$, dette curve sono entrambe non speciali. Dico che esse sono altresì entrambe normali, cioè appartengono rispettivamente a spazi $S_{n-\pi}$ e $S_{p-1-\pi}$. Invero, se ad esempio le γ_π^n stessero in spazi $S_{n-\pi-1}$ o inferiori, il sistema $|\gamma_{p-1-n+\pi}^{2p-2-n}|$ loro residuo su F^{2p-2} avrebbe dimensione $\geq p-n+\pi$, cioè superiore al genere, e sarebbe perciò riducibile, contro l'ipotesi. Pertanto, *se le curve generiche* $\gamma_\pi^n, \gamma_{p-1-n+\pi}^{2p-2-n}$ *mutuamente residue sono entrambe irriducibili, esse sono altresì normali, non speciali; ciascuno dei due sistemi è segato per intero dagli iperpiani* S_{p-1} *che* *passano per una curva dell'altro; ciascuno di essi sega sulle* C_p^{2p-2} *sezioni generiche di* F^{2p-2} *serie lineari* g_n^π, $g_{2p-2-n}^{p-1-n+\pi}$ *complete* (poichè i loro gruppi appartengono a spazi $S_{n-\pi-1}$, $S_{p-2-\pi}$).

Se invece le curve γ_π^n ad esempio non sono normali, e per conseguenza segano sulle C^{2p-2} una serie g_n^π coi gruppi in spazi di dimensione $< n-\pi-1$, perciò incompleta, il sistema residuo sarà riducibile; conterrà dunque una parte fissa, razionale, comune a tutti gli spazi delle γ_π^n; oppure sarà composto con un fascio di curve, necessariamente di genere (virtuale) uno; o anche avverrà l'una e l'altra cosa ad un tempo.

L'eventuale parte fissa si può eliminare, aggiungendola invece alle γ^n, con che il sistema complessivo aumenterà di genere, quindi di dimensione, divenendo di nuovo irriducibile. Per esempio, una F^{2p-2} di S_p con fascio di γ_1^3 contiene come residuo, rispetto alle sezioni iperpiane, un sistema $|\delta_{p-3}^{2p-5}|$, di dimensione $p-3$. Se una delle γ_1^3 contiene come parte una retta r, questa ha come residuo rispetto al sistema $|\delta|$ un sistema di curve ε_{p-5}^{2p-6}, incontranti r in 3 punti (¹), e contenute come le δ in spazi S_{p-2}, quindi non normali. Le ε hanno come residue rispetto alle C^{2p-2} le curve riducibili γ_1^3+r; ma aggiungendo alle ε la r si hanno i due sistemi $|\delta|$ e $|\gamma|$, mutuamente residui, entrambi irriducibili.

Eliminata così, nel sistema residuo di $|\gamma^n|$, l'eventuale parte fissa, potremo concludere che se le γ^n così modificate non sono normali, il nuovo sistema residuo rispetto alle sezioni iperpiane dovrà essere composto mediante un fascio di curve ellittiche. E questo caso può effettivamente presentarsi. Consideriamo per esempio una F^8 di S_5 $(p=5)$ anche con fascio di γ_1^3, perciò contenuta in una V_3^3, ∞^1 di piani, che supponiamo non cono, e intersezione di questa con una forma cubica passante per un suo piano. Rispetto alle sezioni iperpiane C_5^8, il fascio $|\gamma_1^3|$ ha come residua una rete $|\delta_2^5|$. Il sistema lineare $|2\gamma_1^3+3\delta_2^5|$ rappresenta allora una F^{54} di S_{28}, sempre a curve sezioni canoniche, sulla quale le curve γ_1^3 e δ_2^5 hanno immagini γ_1^9 e δ_2^{12}. Sulla F^{54}, il fascio $|\gamma_1^9|$ ha per residuo rispetto alle sezioni iperpiane un sistema $|\xi_{19}^{45}|$ di curve anche normali; ma le residue del sistema doppio $|2\gamma_1^9|\equiv|\gamma_1^{18}|$, riducibile, sono curve η_{10}^{36}, non normali, bensì contenute in spazi S_{25}. E infatti sulle C_{28}^{54} di S_{27} sezioni di F^{54} il sistema $|\eta|$, di dimensione 10, sega una g_{36}^{10}, incompleta, perchè la residua della g_{18}^2 segata da $|2\gamma_1^9|$ è una g_{36}^{11}: i suoi gruppi stanno perciò in spazi S_{24}, e le curve η, di cui questi gruppi sono sezioni

---

(¹) Su F^{2p-2} la r è di grado -2, e incontra le δ in un punto; incontra perciò le $(\delta-r)$ in tre punti.

iperpiane, in spazi S_{25} (1). Similmente su F^{54} le terne di curve γ_1^9 appartengono a spazi S_{26}, e formano un sistema lineare ∞^3, avente per residuo un fascio di γ_1^{27} irriducibili, contenute in spazi S_{24}: quest'ultimo fascio sega sulle C_{28}^{54} una g_{27}^1 incompleta, contenuta in una g_{27}^3 (2).

Sopra una F^{2p-2} di S_p, curve irriducibili non normali e parzialmente contenute nelle sezioni iperpiane possono essere soltanto residue di un sistema riducibile, composto mediante $k > 1$ curve ellittiche di uno stesso fascio, oppure con parte fissa (razionale).

4. Consideriamo adesso una M_3^{2p-2}, una sua curva sezione C_p^{2p-2} irriducibile, e il fascio Φ delle superficie F^{2p-2} passanti per questa. Supponiamo che su ciascuna di queste F^{2p-2} risulti ben definito *un* sistema lineare completo irriducibile $|\gamma_\pi^n|$, di dimensione π, contenuto parzialmente nelle sezioni iperpiane, composto di curve normali, e seganti perciò sulla detta C_p^{2p-2} una g_n^π completa. Variando F^{2p-2} nel fascio Φ, non varierà tuttavia questa g_n^π: invero, se variasse, dovrebbe descrivere un sistema ∞^1 razionale (perchè in corrispondenza biunivoca col fascio Φ o con un'involuzione in esso); e allora i gruppi di queste ∞^1 g_n^π che contengono π punti generici assegnati della C_p^{2p-2} formerebbero una ∞^1 razionale di gruppi G_n non equivalenti, il che non è possibile (3). Se consideriamo pertanto, sulle singole F^{2p-2} del fascio Φ, le γ_π^n che passano per π punti assegnati generici della C_p^{2p-2} base, nonchè per gli altri $n-\pi$ che coi primi formano un gruppo della g_n^π, luogo di tali γ_π^n sarà una superficie Γ^n del medesimo ordine n (perchè incontrante le F^{2p-2} del fascio Φ nelle sole γ_π^n anzidette), di uno spazio avente dimensione superiore di una sola unità a quello di una γ_π^n, e contenuta perciò parzialmente nel sistema $|F^{2p-2}|$ delle sezioni iperpiane di M_3^{2p-2} (4). Esisterà naturalmente anche il sistema $|F^{2p-2}-\Gamma^n|$, il quale segherà sulle F^{2p-2} sezioni di M_3^{2p-2} il sistema completo $|C^{2p-2}-\gamma_\pi^n|$ (5).

---

(1) La rete $|\delta_2^{12}|$ definisce su F^{54} un'involuzione razionale I_2, alla quale appartengono ∞^9 curve del sistema $|\eta_{10}^{36}|$; non però la curva generica di questo.

(2) Queste γ_1^{27} sono coniugate delle γ_1^9 nell'involuzione I_2 considerata nella nota precedente.

(3) Severi, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte 1a (Bologna, 1926), pag. 205.

(4) Per il caso che γ sia una retta, e Γ per conseguenza un piano, cfr. anche l'ultimo capoverso del n. 2.

(5) Completo, perchè gli iperpiani di S_{p+1} passanti per una Γ^n sono altrettanti quanti quelli di S_p passanti per una γ^n.

Abbiamo fatta l'ipotesi che su ciascuna F^{2p-2} sezione iperpiana di M_3^{2p-2} il sistema lineare considerato $|\gamma_\pi^n|$ fosse ben definito, in modo univoco. Ma, supposto anche che sopra una generica delle dette F^{2p-2} vi siano due o più sistemi $|\gamma_\pi^n|$ completi, cogli stessi caratteri, il ragionamento applicato e la relativa conclusione saranno egualmente validi, purchè, quando la F^{2p-2} descrive il fascio Φ, i singoli sistemi lineari $|\gamma_\pi^n|$ su di essa descrivano serie ∞^1 anche tutte distinte. Esaminiamo pertanto se possa verificarsi l'ipotesi contraria, che cioè almeno due distinti sistemi lineari $|\gamma_\pi^n|$ e $|\delta_\pi^n|$ di una stessa F^{2p-2}, di eguali caratteri, al variare di tale F^{2p-2} nel fascio Φ, descrivano una ∞^1 unica. Entro quest'ultima i sistemi $|\gamma_\pi^n|$, $|\delta_\pi^n|$, ... di una stessa F^{2p-2} del fascio costituiranno i gruppi di una serie lineare, che avrà certo elementi doppi, o comunque multipli ($|\gamma_\pi^n| \equiv |\delta_\pi^n|$). Ora sulle F^{2p-2}, di generi uno, la divisione dei sistemi lineari (quando possibile) è operazione univoca (1); per conseguenza le curve dei due sistemi $|\gamma_\pi^n|$ e $|\delta_\pi^n|$, di caratteri eguali, ma generalmente distinti fra loro, devono reciprocamente incontrarsi in un numero ν di punti diverso dal loro comune grado $2\pi - 2$ (2). Deve anzi essere $\nu \geqq 2\pi$, perchè la serie lineare segata da ciascuno dei sistemi $|\gamma_\pi^n|$, $|\delta_\pi^n|$ sull'altro è di dimensione π, perciò di ordine $\geqq 2\pi$. Quando, su una particolare F^{2p-2} del fascio Φ, i sistemi $|\gamma_\pi^n|$ e $|\delta_\pi^n|$ vengono a coincidere, la curva virtuale $\gamma - \delta$, di ordine zero e grado $2(2\pi - 2 - \nu) \leqq -4$, deve ridursi a un punto o gruppo di punti, basi per il sistema ora unico $|\gamma| \equiv |\delta|$. Inoltre un breve ragionamento fatto altrove (3) porta a concludere che tale coincidenza può verificarsi soltanto sulle F^{2p-2} del fascio Φ aventi un punto doppio, e la differenza $\gamma - \delta$ deve ivi ridursi a questo solo punto doppio, contato tante volte quanta è la sua molteplicità q per il sistema $|\gamma| \equiv |\delta|$. Il grado virtuale di $|\gamma - \delta|$ è perciò $-2q^2$; e ne segue $-2q^2 \leqq -4$, $q \geqq 2$. D'altra parte nel caso limite della F^{2p-2} con punto doppio il sistema $|\gamma| \equiv |\delta|$ e il suo residuo

---

(1) Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, « Ann. Éc. Norm. Sup. » (3), vol. 25 (1908), pag. 449, n. 4.

(2) Se no sarebbe nullo il determinante della loro matrice caratteristica, o matrice discriminante $\begin{vmatrix} 2\pi - 2 & \nu \\ \nu & 2\pi - 2 \end{vmatrix}$, e i due sistemi, linearmente legati, avrebbero un multiplo (anzi equimultiplo) comune.

(3) Fano, *Sulle superficie algebriche che sono intersezioni complete di più forme*, « Atti R. Accad. di Torino », vol. XLIV (1908-09), pag. 633; in part. n. 5. Le considerazioni svolte nel successivo n. 6 potrebbero sostituirsi a quelle che qui seguono nel testo, più brevi, ma applicabili alle sole superficie di generi uno (delle quali qui si tratta).

rispetto alle sezioni iperpiane (¹) devono conservare ciascuno lo stesso ordine, lo stesso genere (se questo diminuisse, diminuirebbe anche la dimensione, ad esso eguale), e la dimensione dello spazio cui appartengono le singole curve (se no aumenterebbe la dimensione, e quindi il genere del sistema residuo). Proiettando pertanto la detta F^{2p-2} con punto doppio da questo punto, q^{plo} per le $\gamma \equiv \delta$, queste ultime curve daranno luogo sulla F^{2p-4} proiezione a curve γ_π^{n-q} di spazi $S_{n-\pi-1}$, normali, e ancora non speciali, perchè contenute parzialmente nelle sezioni iperpiane di F^{2p-4}. Se ne trae $\pi = (n - q) - (n - \pi - 1) = \pi - q + 1$, cioè $q = 1$, contrariamente alla conclusione precedente $q \geqq 2$.

In ogni caso pertanto, *qualsiasi sistema completo irriducibile di curve normali sulla* F^{2p-2} *sezione generica di* M_3^{2p-2} *e contenuto nel sistema delle sezioni iperpiane di* F^{2p-2} *stessa è segato sulle* F^{2p-2} *da un corrispondente sistema di superficie di egual ordine contenuto in* M_3^{2p-2}. *E se il sistema* $|F^{2p-2}|$ *delle sezioni iperpiane di* M_3^{2p-2} *è somma di due altri sistemi entrambi irriducibili, ciascuno di questi segna sulle* F^{2p-2} *medesime un sistema lineare completo e composto di curve normali.*

Se $|\gamma|$ è un fascio di curve ellittiche, potrà avvenire che, pur essendo i sistemi $|2\Gamma|, |3\Gamma|, \cdots$ ancora contenuti in $|F^{2p-2}|$, tuttavia i loro sistemi residui $|F^{2p-2} - 2\Gamma|, \cdots$ seghino sulle F^{2p-2} curve $|C^{2p-2} - 2\gamma|, \cdots$ non normali e sistemi lineari incompleti. Poichè il sistema $|F^{2p-2} - 2\Gamma|$, supposto esistente, deve segare le Γ nelle loro stesse sezioni iperpiane, γ_1^n ellittiche, le $F^{2p-2} - 2\Gamma$ dovranno formare insieme con due superficie Γ, razionali e incontrate da esse in curve ellittiche, una superficie complessiva di genere uno. Esse $F^{2p-2} - 2\Gamma$ saranno perciò di genere -1, riferibili a rigate ellittiche. Si comprende così come le loro sezioni iperpiane $C^{2p-2} - 2\gamma$ possano essere curve non normali.

Riprendendo l'esempio della fine del n. 3, consideriamo sulla V_3^3 di S_5 ivi menzionata il sistema lineare ∞^{29} di tutte le F^8 segate da forme cubiche per un suo piano; sistema rappresentante una M_3^{54} di S_{29}, contenente una congruenza del 1^0 ordine di coniche (immagini delle rette direttrici di V_3^3), e colle sezioni F^{54} del tipo già dato come esempio al n. precedente. Su queste F^{54} le γ_1^9 sono segate da un fascio di φ^9 (²); e gli iperpiani passanti per due φ^9 incontrano ulteriormente M_3^{54} secondo (sole) ∞^9 superficie Φ^{36}, appartenenti alla detta congruenza di coniche, e che

(¹) Vengono ora a coincidere anche i due sistemi $|C^{2p-2} - \gamma_\pi^n|$ e $|C^{2p-2} - \delta_\pi^n|$; e questi pure acquistano nel punto doppio di F la multiplicità q.

(²) Superficie non rigate di Del Pezzo (« Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », vol. I (1884–1887), pag. 241; n. 33).

a loro volta segano sulle F^{54} le sole η^{36} appartenenti all'involuzione I_2 di cui alla nota (1) di pag. 28, anzichè il sistema $|\eta|$ completo ∞^{10}. Le Φ^{36} hanno per immagini su V_3^3 le rigate ellittiche R^6 formate colle direttrici rettilinee. Le altre η^{36} possono segarsi solo con superficie Φ^{45}, residue delle φ^9, passanti per una γ_1^9. Le terne di φ^9 appartengono allo spazio S_{29}, e non sono pertanto contenute in sezioni iperpiane.

5. *Se il sistema lineare* $|F^{2p-2}|$ *delle sezioni iperpiane di una* M_3^{2p-2} *è somma di due sistemi irriducibili e per esso non fondamentali* (1), *le superficie di questi due sistemi sono razionali, e le linee loro mutue intersezioni sono ellittiche.*

Quest'ultima proprietà risulterà ovvia, quando sia stata riconosciuta la razionalità delle superficie dei due sistemi suddetti. Per ciascuno di questi, indicatone con n l'ordine e con π il genere delle curve sezioni, è (n. 3) $n > 2\pi - 2$; si tratta dunque di superficie razionali o riferibili a rigate (2). Nessuno dei due sistemi può tuttavia comporsi di rigate irrazionali, perchè sulle F^{2p-2} esso segnerebbe un sistema di curve di genere $\geqq 1$, perciò anche di dimensione $\geqq 1$; il sistema stesso di superficie avrebbe dunque dimensione $\geqq 1$, e se queste fossero tutte rigate, la M_3^{2p-2} conterrebbe ∞^2 rette, il che si è già escluso (3). Indicato pertanto con $|\Gamma|$ uno qualunque dei sistemi suddetti di superficie e con $|\gamma|$ il sistema da esso segato sopra una F^{2p-2} generica:

se $|\gamma|$ è di dimensione, perciò anche di genere *zero* oppure *uno*, le Γ (in questa seconda ipotesi non rigate) sono certo razionali;

in ogni altro caso il sistema delle Γ, supposte non razionali, perciò riferibili a rigate irrazionali, dovrebbe appartenere a una congruenza del primo ordine di linee di un certo ordine $k > 1$; perciò il sistema $|\gamma|$ su ogni F^{2p-2} apparterrà all'involuzione I_k ivi segata dalla detta congruenza. La serie caratteristica del sistema $|\gamma|$, cioè la serie canonica delle γ, sarà composta colla I_k; e questo è possibile soltanto per $k = 2$, e se le γ sono iperellittiche. Le Γ hanno dunque sezioni iperpiane iperellittiche (di genere > 1), e non sono rigate; sono dunque daccapo razionali (4).

---

(1) È quindi escluso il caso di un punto doppio isolato della M_3^{2p-2}, il cui sistema residuo si comporrebbe ancora di superficie di generi uno. Non è escluso invece il caso di una retta doppia.

(2) Castelnuovo-Enriques, « Annali di Matematica » (3), vol. VI (1900), pag. 165; n. 17.

(3) Potrebbe tuttavia uno dei due sistemi essere un fascio di superficie a sezioni ellittiche e generalmente razionali (di ordine ≤ 9), e una di queste essere una rigata ellittica, e precisamente un cono.

(4) Enriques, « Mathem. Ann. », 46 (1895), pag. 179; v. in part. n. 7.

Se il sistema residuo di Γ è a sua volta la somma di due o più altri, potranno le superficie di questi incontrarsi secondo curve razionali. Così pure, se Γ è contenuto ancora in quel sistema residuo, le superficie $|F^{2p-2} - 2\Gamma|$ potranno essere riferibili a rigate irrazionali (cfr. l'esempio del n. 4).

6. Nello spazio S_p, le superficie F^{2p-2} a curve sezioni canoniche dipendono da 19 moduli. Ognuna di esse appartiene a una famiglia irriducibile, composta di al più ∞^{19} sistemi, ciascuno dei quali costituito da $\infty^{p(p+2)}$ superficie proiettivamente identiche (complessivamente perciò queste superficie dipendono da $p(p+2)+19$ costanti) (¹). E per ogni valore di $p \geqq 2$ (²) vi è *una* di queste famiglie composta precisamente di ∞^{19} sistemi come testè indicato, e la cui F^{2p-2} più generale non contiene altri sistemi lineari di curve all'infuori del sistema delle sezioni iperpiane e dei suoi multipli (contiene cioè soltanto curve intersezioni complete con forme, o ipersuperficie, di S_p); e p è il genere delle sezioni iperpiane (ossia del sistema di dimensione minima fra quelli anzidetti). Chiameremo « di 1ª specie », per ogni valore di p, le F^{2p-2} di quest'ultima famiglia.

Non è invece di 1ª specie per esempio la superficie F^{16} di S_9 riferibile a una F^4 generale di S_3 e le cui sezioni iperpiane sono immagini delle intersezioni di questa F^4 colle quadriche del suo spazio. Anch'essa dipende (come la F^4 generale) da 19 moduli, ma contiene, oltre al sistema lineare delle sezioni iperpiane e ai suoi multipli, anche un sistema sottomultiplo del primo: il sistema $|\gamma_3^8|$, di grado 4 e dimensione 3, immagine delle sezioni piane della F^4. Essa è dunque distinta dalle F^{16} generale di 1ª specie (³), nè può appartenere alla stessa famiglia irriducibile, perchè in tal caso dovrebbe dipendere da un minor numero di parametri (in altri termini, il sistema di queste ultime F^{16}, come varietà algebrica contenuta nella precedente irriducibile, dovrebbe avere dimensione inferiore).

Ogni F^{2p-2} di S_p è riferibile birazionalmente a almeno una F di 1ª specie (con conveniente p), prendendo ad esempio come sezioni iperpiane di questa il sistema lineare semplice di genere (o dimensione) minimo, ma almeno ∞^2, esistente su di essa (o uno dei sistemi così fatti, se ve n'è più d'uno).

Considerando le F^{2p-2} proiettivamente identiche come un unico elemento, quelle di 1ª specie, per un dato p, costituiscono una varietà M_{19}; e per alcuni valori di p – non tutti – esistono anche, come vedremo meglio in seguito (n. 9–10), altre famiglie, costituenti in senso analogo ulte-

---

(¹) Severi, nota cit. a pag. 24 (¹).

(²) Anche per $p=2$, le F^{2p-2} essendo allora piani doppi con sestica limite, e le loro sezioni iperpiane le rette di questi piani doppi.

(³) Enriques, nota cit. a pag. 24, (¹); N. B. a pag. 6.

riori varietà di dimensioni $\leqq 19$. Le sezioni iperpiane di una stessa M_3^{2p-2}, ricavandosi l'una dall'altra con continuità, appartengono tutte, nel senso anzidetto, a una medesima varietà di dimensione $\leqq 19$.

Per una F^{2p-2} di 1ª specie, qualunque sia p, l'avere un punto doppio conico, oppure il dover contenere una conica o una retta, costituisce sempre *una* condizione semplice, effettivamente soddisfatta da superficie che dipendono da 18 moduli. Per il punto doppio la cosa può ritenersi evidente, se si pensa ad esempio la totalità di queste F^{2p-2} proiettata in modo generico sopra un S_3. Per la conica, basta osservare che ogni F^{2p-2} di S_p contenente una conica è proiezione di una F^{2p} di S_{p+1} con punto doppio conico da quest'ultimo punto (e quindi birazionalmente equivalente a quest'altra superficie, avente curve sezioni canoniche di genere $p+1$) (¹). Per la retta, si può convincersene p. es. nel modo seguente. Se una F^{2p-2} di S_p contiene un punto doppio e una conica passante per tale punto (dipende perciò da 17 parametri), essa è proiezione di una F^{2p} di S_{p+1} contenente un punto doppio (centro di proiezione) e una retta per questo punto, e viceversa (²); retta e punto doppio impongono perciò a quest'ultima superficie condizioni equivalenti a quelle che conica e punto doppio impongono alla prima; e il contenere una retta implica per conseguenza *una* condizione. Pertanto per ogni famiglia di F^{2p-2} di prima specie la M_{19} suindicata contiene una M_{18} di superficie contenenti (almeno) una retta; e in una ∞^k algebrica ($k \geqq 1$) di quelle superficie ve ne saranno ∞^{k-1} che contengono una e in generale una sola retta, ovvero una retta in più di quante contenute in una F^{2p-2} generica della ∞^k. In particolare ogni M_3^{2p-2}, le cui superficie sezioni sono F^{2p-2} di 1ª specie, contiene, all'infuori degli eventuali piani, ∞^1 rette formanti una rigata, eventualmente riducibile, per ciascuna delle quali rette passano ∞^{p-1} sezioni iperpiane, e perciò complessivamente ∞^p di tali sezioni fra le ∞^{p+1}. Se vi sono (come vedremo che vi sono) M_3^{2p-2} non contenenti rette, le loro sezioni iperpiane dovranno essere F^{2p-2} *non* di 1ª specie.

Del pari, in una ∞^k algebrica ($k \geqq 1$) di superficie F^{2p-2} di 1ª specie ve ne saranno ∞^{k-1} che contengono una e in generale una sola conica, o rispettivamente una conica in più; e ogni M_3^{2p-2} con superficie sezioni di 1ª specie conterrà ∞^2 coniche, per i cui piani passeranno complessivamente gli ∞^p iperpiani seganti F^{2p-2} con coniche, o rispettivamente con una conica in più.

(¹) Questo ragionamento è applicabile alle sole F^{2p-2} di 1ª specie, che esistono per ogni valore di p; non alle altre, che esistono solo per valori particolari di p, e che non godono nemmeno tutte della proprietà enunciata.

(²) La F^{2p} rappresenta il sistema lineare di F^{2p-2} somma delle sezioni iperpiane e della conica. Al punto doppio e alla retta di F^{2p} corrispondono su F^{2p-2} rispettivamente la conica e il punto doppio.

7. Varietà M_3^{2p-2} contenenti una rigata $\boldsymbol{R}$. — Ci riferiamo ora a varietà M_3^{2p-2} con superficie sezioni di 1ª specie, perciò contenenti ∞^1 rette, generatrici di una rigata $\boldsymbol{R}$, e ∞^2 coniche – escluse tuttavia, come fin da principio, quelle contenenti un fascio di superficie cubiche φ^3 (« Berz. », n. 2) delle quali ci occuperemo in seguito (n. 13 e seg.). Ogni generatrice di $\boldsymbol{R}$ potrà incontrarne un certo numero μ di altre; per i valori più piccoli di p, compresi i casi studiati in « Berz. », la rigata $\boldsymbol{R}$ è generalmente irriducibile (pur potendo spezzarsi per M_3^{2p-2} particolari), e il carattere μ – che è altresì il numero delle intersezioni della curva doppia di $\boldsymbol{R}$ con una generatrice generica – ha i valori qui sotto indicati:

$p = 3$; varietà M_3^4 di S_4 ; $\mu = 81$.
$p = 4$; » M_3^6 di S_5 ; $\mu = 31$ (1).
$p = 5$; » M_3^8 di S_6 ; $\mu = 17$.
$p = 6$; » M_3^{10} di S_7 ; $\mu = 11$.
$p = 7$; » M_3^{12} di S_8 ; $\mu = 8$, oppure 7.
$p = 8$; » M_3^{14} di S_9 ; $\mu = 6$ (2).

Quando la rigata $\boldsymbol{R}$ sia riducibile, il numero μ delle generatrici della intera $\boldsymbol{R}$ che si appoggiano a una determinata fra esse può cambiare da una all'altra delle parti irriducibili di $\boldsymbol{R}$. Inoltre, per uno stesso valore di p (per esempio $p = 7$) vi possono essere più tipi di M_3^{2p-2} con μ differenti. In tutti questi casi indicheremo con μ_0 il valor massimo di μ (certo finito) per quel dato p.

Consideriamo ora, sulla rigata complessiva $\boldsymbol{R}$ di una M_3^{2p-2}, due generatrici r, s, che possiamo supporre sghembe (3); la M_3^{2p-2} e la s siano inoltre

---

(1) Per $p = 3$, $p = 4$, vedi Marletta, *Sulla varietà delle rette* . . . , « Atti Accad. Gioenia in Catania », serie 4ª, vol. XVI (1902). I casi $p = 5, 6, 7$ sono studiati in « Berz. ».

(2) Una M_3^{14} di S_9 a curve sezioni canoniche ($p = 8$) si proietta da una sua retta (certo esistente) in una M_3^{10} di S_7 contenente una rigata cubica normale R^3 di S_4, immagine della retta asse di proiezione. Gli iperpiani passanti per tale S_4 incontrano ulteriormente la M_3^{10} secondo ∞^2 superficie φ^7, che a loro volta segano su R^3 una rete di γ_1^5, con 6 punti basi, doppi per M_3^{10}, e immagini delle rette di M_3^{14} incidenti alla retta asse di proiezione. Così è per la M_3^{14} sezione generica della Grassmanniana delle rette di S_5 (Fano, « Rendiconti R. Accad. Naz. dei Lincei » (6), vol. XI, 1° semestre 1930, pag. 329), come pure (altri esempi facili a costruirsi) per la M_3^{14} rappresentante il sistema lineare delle F^4 di S_3 passanti per una γ_0^6, ovvero per una γ_4^7.

(3) Se R avesse le generatrici tutte a due a due incidenti, sarebbe un cono, e il carattere μ sarebbe nullo. Si potrebbe quindi applicare senz'altro il procedimento dato nel testo pel caso $\mu = 0$.

scelte in modo che per esse il carattere μ raggiunga il massimo μ_0. Dalla r questa M_3^{2p-2} si proietta in una M_3^{2p-6} di S_{p-1}, anche a curve sezioni canoniche, di genere $p-2$ anzichè p, sulla quale la retta s' proiezione di s incontrerà tutte le rette proiezioni delle generatrici di $\boldsymbol{R}$ incidenti a s (fra le quali, se $\boldsymbol{R}$ non è una quadrica, possiamo supporre che nessuna si appoggi in pari tempo a r), e in più le rette proiezioni delle coniche di M_3^{2p-2} incidenti sia a r che a s (e forse altre ancora: le proiezioni ad esempio di eventuali cubiche aventi r come corda e appoggiate a s). Il carattere μ_0 è dunque certo aumentato nella proiezione; esso ha per la M_3^{2p-6}, cioè in corrispondenza al genere $p-2$, un valore più elevato che per la M_3^{2p-2}, ossia pel genere p. In altri termini, al crescere di p il carattere μ_0 deve certamente diminuire, almeno ogni qualvolta p aumenti di due unità. Da ciò si trae che per un valore convenientemente elevato di p, qualora esista ancora una M_3^{2p-2} di S_{p+1} contenente una rigata $\boldsymbol{R}$, dovrà per questa essere $\mu = 0$, ossia una generatrice di questa dovrà non più incontrarne altre. E allora su quest'ultima M_3^{2p-2} il sistema lineare somma delle sezioni iperpiane e della rigata $\boldsymbol{R}$ si comporrà ancora di superficie di generi uno, e rappresenterà una nuova M_3 dello stesso tipo, di cui la precedente è proiezione (da una linea di cui $\boldsymbol{R}$ è immagine), e non più contenente rette, salvo piani isolati che già fossero contenuti nella precedente [1].

Partendo dai valori già trovati per $p = 7$ e $p = 8$, cioè $\mu_0 = 8$ e risp. $\mu_0 = 6$, si può dunque concludere che per $p > 7 + 2.8$, ossia $p > 23$, se ancora esistono M_3^{2p-2} di S_{p+1} del tipo ora in esame, queste avranno il carattere μ nullo; vale a dire se ancora contengono rette, all'infuori di piani isolati, saranno proiezioni di varietà analoghe di spazi superiori non più contenenti rette (pure all'infuori di piani isolati). Determinando pertanto (n. 9 e seg.) tutte le M_3^{2p-2} di S_{p+1} senza rette o con soli piani

---

[1] Se $\mu > 0$, ossia se la rigata $\boldsymbol{R}$ ha ancora una curva doppia $\boldsymbol{C}$, la somma suindicata si comporrebbe di superficie di generi uno solo se per esse la $\boldsymbol{C}$ si considerasse come curva doppia assegnata (fissa). Il sistema somma comprenderebbe però generalmente la $\boldsymbol{R}$ come parte fissa. — Se $\mu = 0$ e se la $\boldsymbol{R}$ è segata sopra M_3^{2p-2} da una forma di ordine k che incontra ulteriormente M_3^{2p-2} in una superficie Φ, quest'ultima dovrà incontrare le generatrici di $\boldsymbol{R}$ in $k+1$ punti («Berz.», n. 1); e pertanto il sistema somma sopra indicato, segato su M_3^{2p-2} dalle forme di ordine $k+1$ passanti per Φ, avrà le generatrici di $\boldsymbol{R}$ come linee fondamentali, cui corrispondono punti semplici sulla M_3 rappresentativa del sistema somma medesimo. Supposto che la rigata $\boldsymbol{R}$ con carattere $\mu = 0$ sia di ordine ν e genere π, la linea immagine di essa sulla nuova M_3 (di spazio superiore) sarà pure di genere π, e di ordine n tale che $\nu = n - 2\pi + 2$ (cfr. la mia Nota negli «Atti del Congresso internazionale di Bologna», citata al n. 1), perciò $n = \nu + 2\pi - 2$. E la nuova M_3 sarà di ordine $2p - 2 + 2(\nu + \pi - 1)$.

isolati, queste e le loro proiezioni forniranno complessivamente tutte le M_3^{2p-2} cercate per le quali $p > 23$ – quelle pertanto degli ordini massimi. Per $p \leq 23$ potranno esisterne, oltre le precedenti e loro proiezioni, anche altre, sempre con rigate $\boldsymbol{R}$.

Ricordando che le M_3^{2p-2} contenenti rette si proiettano da una di queste rette in varietà M_3^{2p-6} di S_{p-1} contenenti una rigata cubica $\boldsymbol{R}^3$, immagine della retta asse di proiezione, osserviamo ancora che queste ultime, da una generatrice di R^3, si proiettano in M_3^{2p-10} di S_{p-3} contenenti un piano, proiezione di R^3. E ciò equivale complessivamente a proiettare la M_3^{2p-2} iniziale dallo spazio S_3 ad essa tangente in un punto della sua rigata $\boldsymbol{R}$. Nel prossimo numero dimostreremo che queste M_3^{2p-10} contenenti un piano, e perciò anche le M_3^{2p-2} di S_{p+1} con rigata $\boldsymbol{R}$, sono certo razionali se $p > 10$.

In seguito risulterà pure che le M_3^{2p-2} non contenenti rette, all'infuori eventualmente di piani isolati, sono anch'esse razionali, tranne due soli casi (dubbi), per $p = 10$ e $p = 13$.

8. Varietà M_3^{2p-2} contenenti un piano. — Si abbia una M_3^{2p-2} di S_{p+1} $(p \geqq 4)$ contenente un piano π. Per questo piano passano, in S_{p+1}, ∞^{p-2} iperpiani S_p, i quali incontrano ulteriormente la M_3^{2p-2} secondo superficie razionali φ^{2p-3} aventi a comune con π curve γ_1^3; le sezioni iperpiane di queste φ^{2p-3} hanno genere $p-2$, e incontrano le corrispondenti γ_1^3 in tre punti. Se questo sistema lineare $|\varphi^{2p-3}|$ è semplice – tale cioè che le φ^{2p-3} passanti per un punto generico non passino di conseguenza per altri punti variabili col primo – esso consentirà di rappresentare birazionalmente la M_3^{2p-3} sopra un'altra varietà a 3 dimensioni con superficie sezioni razionali (immagini delle φ^{2p-3}); questa stessa varietà e quindi la data M_3^{2p-2} saranno perciò razionali, salvo il caso che il sistema $|\varphi^{2p-3}|$ sia di grado 3, a intersezioni variabili ellittiche (1).

Occorre pertanto esaminare se il sistema lineare $|\varphi^{2p-3}|$ possa appartenere a una congruenza di linee (e sarà certo così per $p = 4$), oppure a una involuzione entro M_3^{2p-2}.

Le intersezioni variabili delle φ^{2p-3} sono, su di esse, residue della γ_1^3 rispetto alle sezioni iperpiane, perciò di ordine $2p-6$. Poichè sopra ogni φ^{2p-3} ve n'è un sistema ∞^{p-3}, esse potranno essere composte con curve di una congruenza entro M_3^{2p-2} soltanto se queste ultime sono di ordine $\leq \dfrac{2p-6}{p-3}$; e quindi coniche (l'esistenza di una congruenza di rette fu

(1) Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie sezioni razionali*, « Annali di Matematica » (3), vol. XXIV (1915), pag. 49 e seg.

già esclusa al n. 2). I piani di queste coniche dovranno incontrare π secondo rette (dovendo ogni spazio passante per π e per un punto di una conica contenere questa per intero). Su ogni φ^{2p-3} le ∞^1 coniche ivi contenute formeranno un fascio razionale; le sezioni iperpiane delle φ^{2p-3} saranno perciò curve γ_{p-2}^{2p-3} iperellittiche normali (di S_{p-1}), e i piani delle ∞^1 coniche, per ogni φ^{2p-3}, formeranno una V_3^{p-2}, ∞^1 razionale normale di piani. Poichè questi piani sono incidenti a π secondo rette, la V_3^{p-2} sarà un S_0–cono avente π come piano direttore, oppure un S_1–cono colla retta asse in π; le φ^{2p-3} saranno intersezioni di questa V_3^{p-2} con una forma cubica passante per una R^{p-3} direttrice (che potrà spezzarsi in una rigata direttrice di ordine minore e piani generatori). Le quadriche passanti per una φ^{2p-3} contengono tutte di conseguenza il piano π (che incontra le φ^{2p-3} secondo cubiche), e quindi anche la corrispondente V_3^{p-2}. E i piani di tutte le ∞^2 coniche su M_3^{2p-2} formeranno una V_4^{p-2}, comune a sua volta a tutte le quadriche di S_{p+1} passanti per la M_3^{2p-2}.

Se questi ∞^2 piani incontrano π complessivamente nella totalità delle sue rette, le V_3^{p-2} saranno S_0–coni, aventi a due a due un solo piano comune; e due φ^{2p-3} s'incontreranno secondo una sola conica. In tal caso sarà $2p - 6 = 2$, quindi $p = 4$; si tratta cioè della M_3^6 di S_5, intersezione di una quadrica e di una forma cubica aventi un piano comune, e presumibilmente non razionale (¹).

Se gli stessi ∞^2 piani incontrano π secondo sole ∞^1 rette distinte, necessariamente di un fascio, fra le V_3^{p-2} vi saranno ∞^1 S_1–coni aventi a due a due come piano comune il solo π. È allora di nuovo $p = 4$, e si ha egualmente una M_3^6 con piano; soltanto la quadrica (V_4^{p-2}) che la contiene è ora un S_0–cono (²).

Infine, i piani delle ∞^2 coniche di M_3^{2p-2} possono anche incontrare π secondo un'unica retta fissa; le V_3^{p-2} sono allora tutte S_1–coni, con questo medesimo asse. La V_4^{p-2}, a curve sezioni razionali (γ^{p-2} di S_{p-2}), sarà una ∞^1 razionale normale di S_3, anch'essa S_1–cono, oppure, nel solo caso $p = 6$, un S_1–cono di S_7 proiettante da una retta s una superficie φ^4 di Veronese (³). Nel primo caso la M_3^{2p-2} avrà le C_p^{2p-2} canoniche sezioni gia-

---

(¹) Essendo $p = 4$, le superficie φ^{2p-3} formano un sistema lineare soltanto ∞^2, appartenente perciò di necessità a una congruenza di linee.

(²) Gli ∞^2 piani delle coniche di M_3^6 hanno ora come sezioni con un S_4 generico le rette di una quadrica di S_4, non cono, appoggiate a una retta fissa di questa stessa quadrica.

(³) Vedi ad esempio BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ediz. (Pisa, 1923), pag. 400.

centi su rigate R^{p-2}, perciò con serie g^1_3, e sarà (« Berz. », n. 2) luogo di un fascio di φ^3 contenute negli spazi S_3 di V_4^{p-2}; rientra pertanto nei casi che studieremo ai n. 13 e seg. Nel secondo caso si ha una M_3^{10} di S_7, intersezione del detto cono proiettante una φ^4 di Veronese con una forma cubica vincolata a contenere il cono Γ_3^2 che proietta dallo stesso asse s una conica della φ^4, e a passare in più per il piano (π) che proietta un ulteriore punto P della φ^4. Le curve sezioni di questa M_3^{10} sono riferibili a quintiche piane, prive di punti doppi (¹). Le φ^{2p-3}, qui φ^9, sono intersezioni della forma cubica suddetta coi coni quartici che da s proiettano le sezioni iperpiane di φ^4 passanti per P, all'infuori del piano $\varphi \equiv sP$ e dei due piani contenuti nel detto cono Γ_3^2.

Supposto ora che le curve γ^{2p-6} mutue intersezioni delle φ^{2p-3} siano irriducibili, indichiamo con k il numero (costante) delle loro intersezioni colle γ_1^3 delle stesse φ^{2p-3} contenute in π; numero che è altresì il grado del sistema lineare $|\gamma_1^3|$ in π. Le γ^{2p-6} avranno genere $p-2-k$, e su ogni φ^{2p-3} il loro sistema lineare avrà come serie caratteristica una g^{p-4}_{2p-6-k}. Può il sistema lineare $|\varphi^{2p-3}|$ sulla M_3^{2p-2} appartenere a un'involuzione I_m, colla quale anche queste serie g^{p-4}_{2p-6-k} sarebbero composte? La dimensione $p-4$ di tale serie dovrà essere in ogni caso $\leq \dfrac{2p-6-k}{m}$; relazione che può scriversi $(p-4)(m-2) \leq 2-k$, e quindi, poichè $k \geq 2$, non ammette (se $p>4$) altra soluzione che $m=2$, $k=2$. In questo caso la M_3^{2p-2} proposta starà su una V_4, luogo di ∞^3 rette congiungenti le coppie della I_2 e tutte incidenti al piano π; V_4 comune anche nel caso presente a tutte le quadriche passanti per la M_3^{2p-2}, e quindi pur essa di ordine $p-2$, a curve sezioni razionali. Il caso in cui tale V_4^{p-2} sia una ∞^1 razionale di spazi S_3 viene di nuovo rinviato al n. 13 e seg.; il caso invece in cui essa sia un S_1–cono proiettante una φ^4 di Veronese è ora da escludere, perchè conduce soltanto alla varietà precedente, nella quale il sistema lineare $|\varphi^{2p-3}|$ appartiene a una congruenza di coniche.

Concludendo, se $p>6$ (con che rimane esclusa la M_3^{10} di S_7 dianzi incontrata), e se la M_3^{2p-2} non contiene un fascio di superficie cubiche φ^3 (di S_3), gli iperpiani passanti per il piano π segano sulle M_3^{2p-2} stessa un sistema semplice ∞^{p-2} di superficie razionali, di grado $2p-6-k$, a intersezioni variabili di genere $p-2-k$. La varietà rappresentativa

---

(¹) Appunto perciò questa M_3^{10} non è stata considerata in « Berz. », dove, al n.° 8, si è supposto che le curve sezioni della M_3^{10} fossero curve canoniche generali di genere 6.

di quest'ultimo sistema è dunque certo razionale, tranne nel solo caso (dubbio) $2p - 6 - k = 3$, $p - 2 - k = 1$, cioè $p = 6$, $k = 3$ (ved. «Berz.», n. 8–9): è perciò certo razionale se $p > 6$.

Le varietà M_3^{2p-2} *di* S_{p+1} *contenenti un piano* (e non un fascio di φ^3) *sono tutte razionali per* $p > 6$.

D'altra parte si è già rilevato (n. prec.) che queste M_3^{2p-2}, se contenenti una rigata $\boldsymbol{R}$, si proiettano – complessivamente, dallo spazio S_3 tangente in un punto di questa rigata – in varietà M_3^{2p-10} di S_{p-3}, a curve sezioni canoniche di genere $p - 4$, contenenti un piano; esse sono perciò razionali se $p - 4 > 6$, cioè $p > 10$. E al n. 13 e seg. vedremo che anche le M_3^{2p-2} con fascio di φ^3 sono razionali se $p > 7$. Pertanto:

Le varietà M_3^{2p-2} *a curve–sezioni canoniche e contenenti una rigata* $\boldsymbol{R}$ *sono tutte razionali per* $p > 10$.

Le altre M_3^{2p-2}, non contenenti rette, si proiettano tuttavia dallo spazio S_3 tangente in un loro punto P generico in varietà M^{2p-10} di S_{p-3}, a curve sezioni canoniche di genere $p - 4$, contenenti una superficie φ^4 di Veronese, immagine di P; e queste, da una conica della φ^4, in varietà M^{2p-16} di S_{p-6}, ancora a curve sezioni canoniche di genere $p - 7$, contenenti un piano, proiezione della φ^4. Esse sono perciò razionali se $p - 7 > 6$, cioè $p > 13$ (come risulterà confermato dalla loro determinazione diretta, ai n. 10–12).

9. Osservazioni ulteriori sulle superficie F^{2p-2}. —Le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} prive di rette, o contenenti soltanto piani isolati, hanno superficie sezioni F^{2p-2}, come già detto, non di 1ª specie (poichè in ogni sistema algebrico ∞^k di F^{2p-2} di 1ª specie ve ne sono ∞^{k-1} che contengono rette, o rispettivamente una retta in più di quelle generiche).

Un primo esempio di F^{2p-2} non di 1ª specie, già accennato al n. 6, è dato dalla F^{16} di S_9 che rappresenta nel consueto senso il sistema lineare segato su una F^4 generale di S_3 dalle quadriche di questo stesso spazio. Poichè ogni linea algebrica di S_3, in particolare ogni linea tracciata su una F^4 di S_3, è incontrata dalle quadriche in un numero pari di punti, la detta F^{16} non potrà contenere che curve di ordine pari: in nessun caso dunque rette. E ciò anche se la F^{16} si particolarizza comunque, cioè varia nella famiglia irriducibile, dipendente da 19 moduli, che la contiene; poichè sempre qualunque sua curva sarà l'immagine proiettiva della serie lineare segnata su una curva di S_3 dalle ∞^9 quadriche di questo spazio, serie di ordine pari.

Analogamente dicasi prendendo, in luogo della F^4 di S_3, una qualsiasi F^{2p-2} di S_p di 1ª specie del tipo più generale (dipendente da 19 moduli, e non contenente perciò altre curve tranne il sistema delle sezioni iperpiane, tutte irriducibili, e i suoi multipli), e su di essa il sistema segatovi dalla totalità delle quadriche di S_p, o anche dalla totalità delle forme di un qualsiasi ordine assegnato $k > 1$. La superficie rappresentativa di questo ultimo sistema è di ordine $k^2 (2p - 2)$; su di essa i vari sistemi lineari sono egualmente tutti multipli di uno fra essi, di caratteri minimi; ma quest'uno è a sua volta sottomultiplo d'indice $k \geqq 1$ del sistema delle sezioni iperpiane, e tutte le curve della superficie sono per conseguenza di ordine multiplo di k. Sono di questo tipo tutte le F^{2p-2} di S_p (coni sempre esclusi) non di 1ª specie e dipendenti da 19 moduli [1] [2]. Queste ultime F^{2p-2}, e tutte quelle delle famiglie irriducibili cui esse appartengono, si diranno « di 2ª specie ». Esse esistono come già detto, solo per particolari valori di p: quelli del tipo $p = k^2 (p' - 1) + 1$, con k, p' interi. E le eventuali M_3^{2p-2} con sezioni iperpiane di questo tipo saranno certo prive di rette.

Per trovare eventuali altre F^{2p-2} (non di 1ª nè di 2ª specie) e cercare di precisarne qualche carattere distintivo, facciamo le seguenti considerazioni.

Supponiamo che una F^{2p-2} di 1ª specie contenga, in più delle sezioni iperpiane e loro multipli, una curva γ_π^n irriducibile, normale, non speciale, contenuta parzialmente nel sistema delle sezioni iperpiane (caso già considerato al n. 3). Le residue di questa γ_π^n sono curve $\gamma_{p-1-n+\pi}^{2p-2-n}$ incontranti la prima in $n - 2\pi + 2$ punti, formanti perciò insieme con essa particolari C_p^{2p-2} con $n - 2\pi + 2$ punti doppi. Perchè una C_p^{2p-2} canonica si spezzi in tal modo, occorrono al più $n - 2\pi + 2$ condizioni [3]; e se sopra ogni F^{2p-2}

---

(1) Esempi di superficie così fatte si hanno anche per $p = 2$, cioè partendo dal piano doppio con sestica di diramazione. Così, per $p = 2$, $k = 3$ si ha la F^{18} di S_{10} intersezione generale del cono Γ_3^9 proiettante una φ^9 di S_9 di Del Pezzo (« Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », vol. I (1884–87) pag. 241) con una quadrica. Essa contiene soltanto curve di ordine 6 o multiplo di 6.

(2) Questi primi esempi, e altri che incontreremo in seguito, pongono la questione se una superficie F^{2p-2} di S_p contenente un sistema lineare $|\gamma|$ *non* divisibile per un certo intero $k > 1$ possa, variando con continuità, acquistare in qualche caso particolare il sistema lineare mancante, divisore d'indice k di $|\gamma|$. Da questi esempi sembrerebbe di no, in quanto una superficie cogli stessi caratteri della prima e che contenga in più un sistema divisore di $|\gamma|$ appartiene in questi casi a una famiglia le cui superficie non possono contenere rette, e perciò diversa dalla precedente.

(3) Sommando i numeri dei parametri da cui dipendono, in S_{p-1}, una γ_π^n e una $\gamma_{p-1-n+\pi}^{2p-2-n}$, entrambe normali non speciali, e togliendone il numero delle condizioni perchè tali linee si incontrino in $n - 2\pi + 2$ punti, cioè $(n - 2\pi + 2)(p - 3)$, si ha $\frac{(p-1)(p+4)}{2} - (n - 2\pi + 2)$, dove la frazione minuendo è il numero

esistessero sezioni così spezzate, sarebbe da attendersi che queste, sulla F^{2p-2}, dipendessero da almeno $p - (n - 2\pi + 2)$ parametri.

D'altra parte, sopra una F^{2p-2}, se una sezione si spezza nel modo indicato, ciò avviene precisamente per tutte quelle composte di una qualunque fra le ∞^{π} curve γ_p^n e di una qualunque fra le $\infty^{p-1-n+\pi}$ curve $\gamma_{p-1-n+\pi}^{2p-2-n}$, cioè per $\infty^{p-1-n+2\pi}$ sezioni. E poichè quest'ultimo numero supera la precedente differenza di un'unità, se ne trae che per una F^{2p-2} di 1ª specie il dover contenere una γ_π^n come indicato costituisce *non più di una* condizione, ossia le F^{2p-2} contenenti curve γ_π^n dipendono da 18 oppure da 19 moduli. Se dipendessero da 19 moduli, dovendo esse contenere soltanto un sistema lineare di caratteri minimi e i successivi suoi multipli, dovrà $|\gamma_\pi^n|$ essere un sottomultiplo delle sezioni iperpiane; e F^{2p-2} non sarebbe di 1ª specie. Viceversa, se F^{2p-2} è di 1ª specie, si potrà imporle di contenere una qualsiasi γ_π^n come sopra indicato e di caratteri tali ch'essa non risulti sottomultipla delle sezioni iperpiane [1]; e ciò implicherà per F^{2p-2} *una* condizione, come già si è veduto (n. 4) per una retta e per una conica.

Una F^{2p-2} di 1ª specie può contenere altresì due o più curve γ del tipo indicato, e quelle altre che ne conseguono. Supposto che le sezioni iperpiane C_p^{2p-2} di F^{2p-2} possano esprimersi per mezzo di curve in esse parzialmente contenute sotto la forma $C_p^{2p-2} = \sum_1^{m-1} k_i\gamma_i + \gamma_m$ (colle k_i intere positive, e uno almeno dei coefficienti, che supponiamo sia quello di γ_m, eguale all'unità), la F^{2p-2} sarà appunto ancora di 1ª specie, potendo considerarsi ottenuta dalla F^{2p-2} più generale di 1ª specie coll'imporle di contenere le $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m-1}$ e conseguentemente anche la $\gamma_m = C_p^{2p-2} - \gamma_1 - \gamma_2 - \cdots - \gamma_{m-1}$. In questo caso la F^{2p-2} può obbligarsi con una condizione ulteriore (se ancora ne disponiamo) a contenere una retta (o una retta in più, se già ne contiene qualcuna); e pertanto una M_3^{2p-2} avente sezioni iperpiane del tipo della precedente rientra ancora nel caso del n. 7.

Alla stessa conclusione si perviene se la F^{2p-2}, in più delle sezioni iperpiane e loro multipli, contiene soltanto curve non contenute in sezioni iperpiane. A queste superficie può egualmente imporsi di contenere in più una retta. Se la F^{2p-2} ammette una base minima comprendente la sezione iperpiana, essa potrà considerarsi come una superficie generale di 1ª specie alla quale si sia imposto di contenere in più le altre curve

---

dei parametri da cui dipende una C_p^{2p-2} canonica in S_{p-1}. Le $n - 2\pi + 2$ condizioni potrebbero però non essere tutte distinte.

(1) Non dovranno pertanto esistere numeri interi positivi n, k tali che sia $2p - 2 = k^2 n$, $p = k\pi + \binom{k}{2}(2\pi - 2) - k + 1$.

della detta base minima (¹). In caso diverso, la sezione iperpiana potrà esprimersi mediante una base minima sotto la forma

$$C_p^{2p-2} = \sum_i k_i \gamma_i - \sum_j l_j \delta_j$$

colle k_i e l_j intere positive. Riferendo allora la F^{2p-2} alla superficie rappresentata dal sistema $|C_p^{2p-2} + \sum_j l_j \delta_j| = |\sum_i k_i \gamma_i|$, a quest'ultima superficie, in base alle osservazioni precedenti, potrà imporsi di acquistare in più una retta, in particolare una retta incontrante in un (solo) punto le curve immagini delle C_p^{2p-2}; e a questa retta corrisponderà sulla F^{2p-2} anche una retta.

Dopo di ciò, rimane a esaminare soltanto l'ipotesi che le sezioni iperpiane della F^{2p-2} siano esprimibili, per mezzo di curve contenute parzialmente nel loro sistema lineare, sotto la forma $\sum_{i=1}^{m} k_i \gamma_i$, le k_i essendo ora numeri interi positivi tutti > 1. Possiamo supporre che nessun sistema $|\gamma|$ sia somma di due altri di ordini inferiori; in particolare che nessuno di essi sia contenuto parzialmente in alcun altro. E se le C_p^{2p-2} potessero esprimersi sotto questa forma in più di un modo (cioè con sistemi differenti di γ_i), intendiamo riferirci a uno arbitrario fra questi.

La F^{2p-2} sarà di 2ª specie se fra i coefficienti k_i, tutti > 1, ve ne è uno divisore di tutti gli altri.

Se ciò non avviene, per esempio se le k_i, pur tutte > 1, sono numeri complessivamente primi fra loro, la F^{2p-2}, come apparirà tosto da un esempio, può non essere nè di 1ª nè di 2ª specie, e si dirà allora di 3ª specie (²). Ciascuna di queste superficie appartiene a una famiglia irriducibile completa dipendente da un numero di moduli minore di 19 (i casi di 19 moduli essendo esauriti dalle F^{2p-2} di 1ª e 2ª specie). È appunto di 3ª specie ad esempio la superficie F^{54} di S_{28} considerata al n. 3 (riferibile alla più generale F^8 di S_5 con fascio di γ_1^3), contenente un fascio di γ_1^9 e

---

(¹) Se una curva γ di F^{2p-2} non è contenuta nelle sezioni iperpiane, e non ne è multipla, sarà tuttavia contenuta parzialmente in un sistema k^{plo} (per un conveniente minimo k) delle sezioni stesse. Sulla superficie rappresentante questo sistema k^{plo} la curva γ_0 immagine di γ è contenuta parzialmente nelle sezioni iperpiane, senza esserne sottomultipla; e imporre alla F^{2p-2} di contenere γ equivale a imporre a quest'ultima superficie di contenere la γ_0, a sua volta contenuta, come si è detto, nelle sezioni iperpiane.

(²) Nella mia nota citata a pag. 23, (⁴) le superficie « di 3ª specie » sono state definite in modo un po' diverso, tale da comprendere anche particolari superficie di 1ª e 2ª specie.

una rete di δ_2^{12}, tali che per le sezioni iperpiane si ha $C_{28}^{54} = 2\gamma_1^9 , + 3\delta_2^{12}$. Questa F^{54} dipende (come la F^8 suindicata) da 18 moduli, ed è nello spazio S_{28} la superficie più generale di una famiglia dipendente da 18 moduli, non contenuta in una famiglia più ampia di F^{54} dipendente da 19 moduli.

Invero la superficie più generale di quest'ultima eventuale famiglia dovrebbe contenere soltanto un sistema lineare di curve di caratteri (ordine, genere, grado) minimi, con tutti i suoi multipli: supposto che questo sistema minimo fosse di grado m, e il sistema delle C^{54} multiplo di esso d'ordine k, dovrebbe essere $54 = mk^2$, il che (in numeri interi, e con $k > 1$) è possibile solo per $k = 3$, $m = 6$. Ora un sistema così fatto, di grado 6 e quindi di genere 4, non può esistere sulla F^{54} considerata (o sulla F^8 di S_5 cui essa è riferibile). Invero sulla F^{54} considerata, dipendente da 18 moduli, la γ_1^9 e la δ_2^{12} formano una base minima (e più immediatamente lo si vede per le curve corrispondenti sulla detta F^8); occorrerebbe quindi che il sistema $|2\gamma_1^9 + 3\delta_2^{12}|$ fosse divisibile per 3 (valore di k); il che, posta quella base, non è possibile. — Se a una F^{54} generale di 1ª specie, dipendente perciò da 19 moduli, noi imponiamo di contenere una γ_1^9, essa contiene di conseguenza curve $\eta^{36} = C_{28}^{54} - 2\gamma_1^9$, ma non curve δ_2^{12}. Se non si impongono altre condizioni, e perciò le curve C_{28}^{54}, γ_1^9 formano una base minima, ad ogni altra curva della superficie $mC^{54} + n\gamma_1^9$, con m, n eventualmente anche negativi, spetta il grado $54.m^2 + 0.n^2 + 18\,mn = 18\,m\,(3m + n)$; grado che non può mai risultare $= 2$, come occorrerebbe per la γ_2^{12}. E similmente, imponendo alla F^{54} generale di 1ª specie di contenere una δ_2^{12}, essa conterrà di conseguenza anche un fascio di $\eta_1^{18} = C^{54} - 3\,\delta_2^{12}$, ma non un fascio di γ_1^9.

Per determinare tutte le M_3^{2p-2} non contenenti rette, ovvero contenenti soltanto un numero finito di piani, basterà pertanto esaminare le varietà con superficie sezioni F^{2p-2} sulle quali le curve canoniche C_p^{2p-2} sono esprimibili sotto la forma $C_p^{2p-2} = \sum_{i=1}^{m} k_i \gamma_i$, colle k_i tutte $\geqq 2$; fra esse sono certamente comprese tutte quelle suindicate. Le F^{2p-2} di 2ª specie condurranno a M_3^{2p-2} prive di rette; le altre potranno condurre anche a M_3^{2p-2} sia con piani che con rigate (come apparirà dai casi che incontreremo al n. 12). La M^{54} di S_{29} già incontrata al n. 4, e che ha come superficie sezione generica la F^{54} poc'anzi considerata, è certamente priva di rette: invero ai piani della V_3^{54}, cui essa è riferibile, corrispondono su M_3^{54} superficie φ^9 di Del Pezzo a sezioni ellittiche, non contenenti rette; e alle altre linee di V_3^3, incontranti i detti piani in $l\,(\geqq 1)$ punti, corrispondono linee di ordine $\geqq 2l$, quindi anche non mai rette.

10. Varietà M_3^{2p-2} con superficie sezioni di 2ª specie. — Sopra una generica di queste F^{2p-2} sezioni sia $|\gamma|$ il sistema lineare sottomultiplo del sistema delle sezioni iperpiane e di ordine minimo; perciò sottomultiplo di indice massimo $k > 1$; sistema certo unico e ben definito, poichè la divisione dei sistemi lineari di curve sopra tali F^{2p-2}, quando possibile, è operazione univoca ([1]). Il ragionamento del n. 4 permette allora di concludere che sopra la M_3^{2p-3} esisterà corrispondentemente un sistema lineare di superficie $|\Gamma|$ avente le γ come sezioni iperpiane, e a sua volta divisore di indice k del sistema $|F^{2p-2}|$ delle sezioni superficiali. In altri termini, *sopra queste M_3^{2p-2} il sistema $|F^{2p-2}|$ delle sezioni iperpiane è multiplo, di un certo indice $k > 1$, di un sistema lineare minore $|\Gamma|$.*

Dai nn. 3–5 risulta che le Γ sono in tal caso superficie razionali. Inoltre il loro sistema è almeno ∞^3; non può essere infatti una superficie isolata, nè un fascio; e i multipli di un sistema completo ∞^2, perciò appartenente a una congruenza di linee, appartengono pure a questa congruenza. E le curve intersezioni variabili delle Γ saranno ellittiche se $k = 2$, cioè se il sistema $|F^{2p-2}|$ è doppio di $|\Gamma|$; razionali se $k > 2$. Indicato con n il grado del sistema $|\Gamma|$, sarà $2p - 2 = n \cdot k^3$.

Se $k > 2$, il sistema $|\Gamma|$ è certamente semplice, e la varietà M_3^{2p-2} razionale. Essa potrà rappresentarsi sullo spazio S_3 in modo che al sistema $|\Gamma|$ corrisponda uno dei sistemi seguenti ([2]):

a) sistema ∞^3 dei piani;

b) sistema ∞^4 delle quadriche passanti per una conica (sistema rappresentante una quadrica di S_4);

c) sistema ∞^6 delle quadriche tangenti in un punto assegnato ad un piano pure dato (sistema rappresentante il cono di S_6 proiettante una φ^4 di Veronese);

d) sistema di rigate R^m con retta base $(m-1)^{pla}$ e eventualmente altri elementi basi (sistema rappresentante una ∞^1 razionale normale di piani). Il sistema *a*) rientra in questo tipo per $m = 1$; e così, per $m = 2$, il sistema *b*), qualora la conica base si spezzi in due rette distinte o coincidenti.

Il sistema lineare di superficie immagine delle sezioni iperpiane $|F^{2p-2}|$ sarà in ogni caso multiplo di uno dei precedenti *a*) $\cdots$ *d*); e deve comporsi di superficie di generi uno.

Nel caso *a*) sono superficie di generi uno quelle del sistema *quadruplo* di $|\Gamma|$, cioè le F^4 di S_3. Troviamo così una prima M_3^{2p-2} senza rette: la

---

([1]) Severi, *La base minima...*, « Annales Ecole Norm. Sup. » (3), vol. XXV (1908), pag. 449 (in particolare, n. 4).

([2]) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche a intersezioni variabili iperellittiche*, « Mathem. Annalen », 46 (1895), pag. 179 (in part. n. 10).

M^{64} di S_{34} ($p = 33$) rappresentata dal sistema totale delle F^4 di S_3. Questa M^{64} contiene soltanto curve algebriche di ordine 4 o multiplo di 4.

Nel caso *b*) sono superficie di generi uno quelle del sistema *triplo* di $|\Gamma|$; si ha allora la M^{54} di S_{29} ($p = 28$) rappresentata su S_3 dal sistema delle superficie di 6° ordine con conica tripla; e sopra una quadrica di S_4 dal sistema delle superficie sue intersezioni con forme cubiche. Tale quadrica può essere un cono, di 1ª o 2ª specie; la conica base in S_3 si spezza allora in due rette, distinte o coincidenti.

Nei casi *c*) e *d* (quest'ultimo se $m > 1$) il sistema doppio di $|\Gamma|$ si compone ancora di superficie razionali, e il sistema triplo di superficie di genere > 1; i sistemi puramente multipli di $|\Gamma|$ non forniscono pertanto nessuna M_3^{2p-2} del tipo cercato.

Se invece le Γ hanno intersezioni ellittiche, la M_3^{2p-2} è certo razionale se il sistema $|\Gamma|$ è di grado $n > 3$ (¹), ma è di dubbia razionalità se $|\Gamma|$ è di grado 3, quindi riferibile al sistema delle sezioni iperpiane di una forma cubica generale di S_4, oppure di grado 2, riferibile a un S_3 doppio con superficie di diramazione del 4° ordine. Il sistema $|F^{2p-2}|$ è allora doppio di $|\Gamma|$; perciò di grado $8n$ $(= 2p - 2)$. Essendo in tal caso $n \leq 9$, ne segue $2p - 2 \leq 72$, $p \leq 37$.

Per $n = 2$ troviamo una M_3^{16} di S_{10} ($p = 9$) rappresentabile sullo spazio S_3 doppio con F^4 di diramazione, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano anche F^4 (semplici) tangenti alla precedente lungo le curve γ_9^8 sue intersezioni con quadriche. Questa M_3^{16} contiene ∞^9 sezioni iperpiane (fra le ∞^{10}) rappresentate da quadriche doppie, e perciò appartenenti all'involuzione I_2 che ha per immagine lo spazio S_3 doppio. Le rette congiungenti le coppie di punti di questa I_2 sulla M_3^{16} passano tutte per uno stesso punto, comune ai detti ∞^9 iperpiani; e da questo punto la M_3^{16} è proiettata doppiamente in una M_3^8 di S_9, immagine del sistema delle quadriche di S_3. La M_3^{16} è intersezione del cono di S_{10} proiettante questa M_3^8, con una quadrica.

Per $n = 3$ troviamo la M_3^{24} di S_{14} ($p = 13$) riferibile a una forma cubica generale di S_4 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le F^6 intersezioni di questa forma cubica colle quadriche del suo spazio (²).

(¹) Enriques, lavoro ult. cit., parte III. Vedi anche Scorza, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, « Annali di Matem. » (3), vol. XV (1908), pag. 217.

(²) Con riferimento al risultato del n. 8, questa M_3^{24}, di tuttora dubbia razionalità, ha bensì $p = 13$, e quindi > 10, ma non contiene rette. E all'ultimo capoverso del n. 8 è detto appunto che le M_3^{2p-2} non contenenti rette sono certo razionali se $p > 13$.

Infine per $n > 3$ troviamo le varietà razionali rappresentate sullo spazio S_3 dai sistemi lineari di superficie *doppi* di quelli di grado n $(4 \leqq n \leqq 9)$ a intersezioni variabili ellittiche, elencati da ENRIQUES al n. 20 della nota ultima citata [1]: varietà del tipo M_3^{8n} in S_{4n+2} $(p = 4n + 1)$, rappresentabili sulle V_3^n di S_{n+1} di ENRIQUES a sezioni ellittiche in modo che alle F^{8n} sezioni iperpiane della prima corrispondano le intersezioni di queste ultime con quadriche. Fra queste M_3^{8n} è di nuovo compresa, per $n = 8$, la M_3^{64} di S_{34} rappresentata dal sistema lineare di tutte le F^4 di S_3 (sistema doppio di quello delle quadriche, a intersezioni ellittiche). Le altre sono rappresentate su S_3 da particolari sistemi di superficie del 6° ordine, e per una di esse di 8° ordine. Senza farne l'enumerazione completa, che segue immediatamente da quella citata di ENRIQUES, mettiamo in evidenza, fra queste M_3^{8n}, quelle di ordine più elevato ($n = 8$, escluso il caso già indicato in precedenza, e $n = 9$):

1° Varietà M_3^{64} di S_{34} $(p = 33)$ riferibile al cono Γ_3^8 di S_9 proiettante una φ^8 di DEL PEZZO di 1ª specie, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le intersezioni del cono Γ_3^8 con quadriche. La retta e le ∞^1 coniche di φ^8 sono proiettati secondo un piano e coni quadrici, ai quali corrispondono su M_3^{64} una φ^4 di Veronese e ∞^1 Φ^8 di 2ª specie [2]. Al vertice del cono Γ_3^8 corrisponde un punto P anche 8^{plo} per M_3^{64}, semplice per φ^4, e doppio per le Φ^8; queste ultime segano su φ^4 le ∞^1 coniche del fascio di centro P.

Dal piano di una conica generica di φ^4 (non passante per P) questa M_3^{64} si proietta in una M_3^{58} di S_{31}, che incontreremo al n. 12, c). Essa stessa è a sua volta proiezione della M_3^{72} di S_{38} che incontreremo in questo n.° (caso 3°), dallo spazio S_3 tangente ad essa in un suo punto generico.

2° Un'altra varietà M_3^{64} di S_{34}, riferibile al cono Γ_3^8 di S_9 proiettante una Φ^8 di DEL PEZZO di 2ª specie in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le superficie segate su questo cono da quadriche. Questa M_3^{64} è rappresentata su S_3 dal sistema delle superficie di ordine 8 aventi a comune un punto 6^{plo} P, due rette quadruple passanti per questo punto, e una conica doppia infinitesima infinitamente vicina a P e appoggiata a quelle due rette (quindi anche cono tangente fisso in P).

---

(1) « Mathem. Annalen », 46 (1895), pag. 179.

(2) DEL PEZZO, Mem. cit. al n. 4, vedi in part. § IX. Sono però Φ^8 particolari, perchè dotate (come è detto sopra) di punto doppio, e rappresentate dal sistema delle quartiche piane con 2 punti basi doppi infinitamente vicini (ossia con tacnodo base).

Se le due rette quadruple sono infinitamente vicine, si ha una M_3^{64} particolare con conica doppia passante anche per P, la quale da un punto generico di questa conica si proietta nella M_3^{62} del n. 12, d).

3° Varietà M_3^{72} di S_{38} ($p = 37$; unico caso di $n = 9$), rappresentabile sul cono F_3^9 di S_{10} proiettante una φ^9 di DEL PEZZO, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le superficie intersezioni di questo cono con quadriche. Questo sistema di superficie può rappresentarsi sullo spazio S_3 col sistema delle superficie di 6° ordine aventi un punto base quadruplo P e una conica doppia infinitesima infinitamente vicina ad esso. Il cono che da P proietta questa conica è l'unica aggiunta di quelle superficie di 6° ordine (1) (2).

Queste 3 varietà ($n = 8, 9$) contengono tutte una congruenza del 1° ordine di coniche, con un punto comune, multiplo di ordine 8 o 9 per la M_3.

11. DETERMINAZIONE DELLE ULTERIORI VARIETÀ M_3^{2p-2} DI S_{p+1}. — Per le ulteriori varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1}, le superficie sezioni F^{2p-2} hanno curve sezioni canoniche C_p^{2p-2} rappresentabili su di esse (n. 9) sotto la forma $\Sigma\, k_i \gamma_i$ colle k_i intere e $\geqq 2$, nonchè in numero > 1 (salvo sempre quelle con fascio di φ^3, n. 13 e seg.).

In base al ragionamento del n. 4, a queste γ_i (nessuna delle quali è residua di un sistema riducibile) corrisponderanno sopra M_3^{2p-2} superficie Γ_i aventi tali curve come sezioni, in modo che $F^{2p-2} = \Sigma\, k_i \Gamma_i$.

Indicata con $\left[\frac{k_i}{2}\right]$ la parte intera ($\geqq 1$) del numero k_i, si consideri su M_3^{2p-2} il sistema lineare di superficie $\Sigma \left[\frac{k_i}{2}\right] \Gamma_i$: sistema certo irriduci-

---

(1) Assunto il punto P come punto fondamentale [4] delle coordinate, e rappresentato il cono che da esso proietta la conica infinitesima coll'equazione $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, l'equazione del sistema lineare rappresentante questa M_3^{72} è la seguente:

$$x_4^2 (x_2^2 - x_1 x_3)^2 + x_4 (x_2 - x_1 x_3)\, f_3 + f_6 = 0$$

dove f_3, f_6 sono forme ternarie affatto generali di gradi 3, 6 nelle x_1, x_2, x_3: equazione dipendente appunto da 38 parametri.

(2) Nel piano, la dimensione massima di un sistema lineare di curve di genere uno è 9, e il sistema è allora birazionalmente equivalente a quello di tutte le γ^3 piane. Si poteva quindi pensare che nello spazio godesse di analoga proprietà il sistema lineare ∞^{34} di tutte le F^4. Invece non è così: vi sono in S_3 due diversi sistemi lineari di superficie di generi uno e dimensione 38; uno è quello indicato qui sopra, nonchè nella nota prec. (1), e trovasi già accennato nella mia comunicazione citata al Congresso Internazionale di Bologna (1928), n. 3; per l'altro, vedi questo lavoro, n. 12, f).

bile, composto di superficie razionali, non appartenente a una congruenza di linee, se no a questa dovrebbero appartenere anche tutte le F^{2p-2}. Il sistema doppio del precedente, $\Sigma\, 2\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$, sarà ancora contenuto nel sistema $|F^{2p-2}|$ delle sezioni iperpiane, e possiamo supporre vi sia contenuto parzialmente, cioè che una almeno delle k_i sia numero dispari ($\geqq 3$), se no $|F^{2p-2}|$ sarebbe il sistema lineare doppio di un altro, e la M_3^{2p-2} sarebbe una di quelle determinate nella 2ª parte del n. 10. Il sistema $\Sigma\, 2\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$ si comporrà ancora di superficie razionali; il sistema metà $\Sigma\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$ avrà per conseguenza le curve intersezioni variabili anche razionali, e sarà perciò semplice; infine il sistema residuo di $2\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$ rispetto alle sezioni iperpiane $|F^{2p-2}|$ sarà la somma dei sistemi Γ_i con coefficienti k_i dispari, ciascuno contato una sola volta. Quest'ultimo sistema sarà perciò ancora contenuto nel sistema $\Sigma\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$, e si potrà supporre esso vi sia contenuto parzialmente, perchè, se coincidesse con questo, le k_i risulterebbero tutte $= 3$, e si ricadrebbe nel caso *b*) del n. 10. Il sistema $\Sigma\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$ consentirà pertanto di rappresentare la M_3^{2p-2} proposta sullo spazio S_3, in modo che ad esso corrisponda uno dei sistemi lineari *a*), *b*), *c*), *d*) elencati al n. 10. Al sistema $|F^{2p-2}|$ corrisponderà in S_3 un sistema lineare più ampio del doppio e meno ampio del triplo del precedente.

Rimangono perciò possibili i soli due casi *c*), sistema rappresentativo di un cono di S_6 proiettante una φ^4 di Veronese da un punto P fuori del suo spazio; e *d*), sistema rappresentante una ∞^1 razionale normale di piani. In ambo i casi al sistema $\Sigma\, 2\left[\frac{k_i}{2}\right]\Gamma_i$ corrisponderà quello segato sulla precedente varietà dalle quadriche; e al sistema $|F^{2p-2}|$ la somma di quest'ultimo e di una superficie Φ razionale, eventualmente riducibile, incontrata dalle quadriche secondo curve ellittiche (affinchè la superficie somma complessiva risulti di genere uno). La superficie Φ sarà dunque di 2º ordine [1], cioè una quadrica (di S_3).

Nell'ipotesi *c*), questa quadrica è uno dei coni quadrici (q) che da P proiettano le coniche della φ^4 di Veronese. Alle F^{2p-2} corrispondono sul cono proiettante la φ^4 superficie $\dot{F}^{10}$ intersezioni con forme cubiche passanti

---

[1] Indicato con n l'ordine di questa superficie, la sua intersezione con una quadrica sarebbe di genere $\geq n-1$: perchè sia di genere uno, occorre pertanto (e basta) sia $n = 2$.

per uno dei detti coni q. Si trova così una M_3^{62} di S_{33} $(p = 32)$, rappresentata su S_3 dal sistema delle superficie di 5° ordine con punto triplo che è altresì tacnodo, quindi con una retta doppia infinitesima infinitamente vicina al punto triplo (1). Alle ∞^2 generatrici del cono proiettante la φ^4 corrispondono su M_3^{62} coniche: ai coni quadrici q, superficie Φ^{12} a sezioni di genere 2, luoghi di ∞^1 fra quelle coniche. Poichè le F^{10} del cono P, immagini delle sezioni iperpiane di M_3^{62}, hanno in P un punto doppio, e come cono tangente uno (variabile) degli ∞^2 coni q, formanti una rete, al punto P corrisponde un piano contenuto in M_3^{62}; e alle F^{10} segate da forme cubiche col punto P doppio, sezioni iperpiane di M_3^{62} condotte per questo piano.

Nell'ipotesi d) la varietà M_3^{2p-2} in parola risulta rappresentata sopra una ∞^1 razionale normale di piani, e sia una V_3^n di S_{n+2}, in modo che alle F^{2p-2} sezioni iperpiane della prima corrispondano su questa le superficie di ordine $2n + 2$ somme delle intersezioni con quadriche e di una quadrica q (di S_3) direttrice; perciò superficie intersezioni con forme cubiche passanti per $n - 2$ piani di V_3^n. Per $n = 2$ queste varietà rientrano nel caso b) del n. 10. Per $n > 2$ rileviamo subito che la V^n non potrà essere un cono di 2ª specie, o S_1-cono, proiettante dalla retta asse una C^n razionale normale; perchè la forma cubica suindicata conterrebbe sempre questa retta asse, la quale sarebbe doppia per le F^{2n+2}: queste ultime sarebbero perciò razionali, anzichè di genere uno (e conterrebbero d'altronde, nei piani di V_3^n, un fascio razionale di coniche).

La V_3^n pertanto, o non sarà un cono, o sarà un cono di 1ª specie (S_0-cono). Nel primo caso essa dovrà avere una quadrica direttrice q, non cono; e le forme cubiche che segano le F^{2n+2}, passando per $n-2$ piani di V_3^n, conterranno altresì un egual numero di generatrici di q di un medesimo sistema. Affinchè esse, come evidentemente occorre, non contengano l'intera q, dovrà essere $n - 2 \leq 3$; perciò $n = 3$, $n = 4$, oppure $n = 5$.

Per $n = 3$ si ritrova la M_3^{54} di S_{29} $(p = 28)$ già considerata ai nn. 4, 9; essa è priva di rette, ed è rappresentata in S_3 dal sistema della superficie

(1) Assunto il punto triplo come punto fondamentale [4] delle coordinate e il piano tangente tacnodale come piano $x_1 = 0$, questo sistema di superficie del 5° ordine è rappresentato dall'equazione:

$$x_4^2\, x_1^2\, f_1 + x_4\, x_1\, f_3 + f_5 = 0$$

dove f_1, f_3, f_5 sono forme nelle sole x_1, x_2, x_3, di gradi eguali ai rispettivi indici, e affatto generali. Si hanno perciò in tutto appunto $3 + 10 + 21 = 34$ parametri omogenei.

di 5° ordine aventi a comune una retta doppia e un punto triplo che non si appartengono.

Per $n = 4$ si ha un'altra M_3^{54} di S_{29}, rappresentata su S_3 dal sistema delle F^4 passanti per una retta data (¹); proiezione quindi della M_3^{64} di S_{34} corrispondente al caso *a*) del n. 10, da una sua quartica razionale normale. Questa nuova M_3^{54} contiene una rigata razionale R^6 immagine della detta quartica, e non altre rette; contiene pure un fascio di φ^9 di Del Pezzo, e ha sezioni iperpiane $F^{54} = 4\varphi^9 + 3R^6$. Di questa M_3^{54} e del suo sistema rappresentativo non occorre tener conto, essendo tale sistema contenuto in quello più ampio di tutte le F^4 di S_3.

Infine, per $n = 5$ dobbiamo prendere le mosse da una V_3^5, ∞^1 razionale normale di piani in S_7, non cono e con quadrica direttrice, e considerarvi le F^{12} segate da forme cubiche passanti per 3 piani generatori. Da un piano generatore arbitrario questa V_3^5 si proietta in un S_1 – cono quadrico di S_4, e le F^{12} suddette nelle F^6 intersezioni complete di quest'ultimo cono con forme cubiche. Troviamo così soltanto un caso particolare del sistema del n. 10, *b*) (²).

(¹) La V_3^4 di S_6 qui considerata si rappresenta in S_3, proiettandola da un suo piano arbitrario, col sistema delle quadriche passanti per una retta *s*. Il sistema triplo di questo, diminuito di due piani per *s* (immagini di piani di V_3^4), dà appunto il sistema delle F^4 passanti per *s*.

(²) La postulazione di una V_3^n di S_{n+2}, ∞^1 razionale normale di piani, non cono o anche cono, rispetto alle forme cubiche del suo spazio è $10(n+1)$. La si calcola facilmente imponendo a una forma cubica di contenere una R^n sezione iperpiana di V_3^n; poi una seconda e una terza R^n, di cui essa già contiene una e rispettivamente due C^n sezioni; infine un punto ulteriore. Il sistema lineare di tutte le Φ^{3n} intersezioni di V_3^n con forme cubiche ha perciò dimensioni $10n + 9$. Se pertanto questa forma cubica si obbliga a passare per $n - 2$ piani di V_3^n, finchè queste condizioni sono tutte indipendenti (la V_3^n perciò non è cono, oppure è $n = 3$), il sistema lineare di F^{2n+2} così ottenuto su V_3^n ha sempre dimensione $(10n + 9) - 10(n - 2) = 29$, perciò *indipendente da n*. Il limite $n \leq 5$ trovato per le V_3^n non coni non significa che per $n > 5$ non esistano su queste V_3^n superficie F^{2n+2} di generi uno, ma soltanto che, in forza del ragionamento fatto, per $n \leq 5$ si hanno già tutti i casi birazionalmente distinti. Invero le V_3^n di S_{n+2} non coni con direttrici minime (∞^2, o ∞^1, oppure una sola) di ordine $k > 1$ si proiettano da $k - 1$ loro piani in analoghe varietà di ordine $n - 3k$ e egual numero di direttrici rettilinee; e le F^{2n+2} di generi uno intersezioni delle prime con forme cubiche per $n - 2$ piani (F^{2p-2}, per $n = p - 2$) si proiettano in analoghe superficie ($F^{2n-6k+2}$) sulla V_3^{n-3k}. Cambia l'ordine delle superficie, ma non cambiano i caratteri birazionali del loro sistema lineare (genere della superficie generica, grado, genere della curva intersezione variabile).

12. Se invece la V_3^n è un S_0 - cono, il cui vertice indicheremo con P, la quadrica direttrice q sarà anch'essa cono, col medesimo vertice; e le forme cubiche passanti per $n-2$ piani di V_3^n, quindi per altrettante generatrici del cono q, conterranno di conseguenza questo intero cono (rendendo così impossibile la costruzione che a noi occorre) soltanto se $n-2>6$, ossia $n>8$. Sono dunque possibili nell'attuale ipotesi i casi $2<n\leq 8$. Il cono direttore q può anche spezzarsi in un piano direttore e un piano generatore, finchè $n-2\leq 3$, ossia $n\leq 5$.

Osserviamo ancora che sopra una V_3^n con cono quadrico direttore q gli ∞^{n-2} iperpiani (S_{n+1}) passanti per q (o per uno qualunque dei coni q, se ve ne sono infiniti) segano *tutti* i gruppi di $n-2$ piani. Prendendo perciò, come a noi occorre, una forma cubica passante per q e per $n-2$ di quei piani, tali piani e il cono q staranno sempre in un S_{n+1} (sia pure in uno solo, se vi è un unico q, cioè se $n>4$), e pertanto la detta forma cubica potrà avere in P un punto semplice, restando soltanto vincolata a avervi come spazio tangente l'S_{n+1} anzidetto (o uno fra essi, se $n\leq 4$).

Esaminiamo ora i vari casi di superficie F^{2n+2} su varietà V_3^n, S_0 - coni di S_{n+2}, come dianzi indicato, per $3\leq n\leq 8$.

a) Per $n=3$, la V_3^n è un cono cubico proiettante una rigata normale R^3 di S_4, quindi con piano direttore e ∞^2 coni quadrici q. Su di essa, le forme cubiche passanti per un piano generatore segano superficie F^8 con punto doppio nel vertice P del cono. Questo sistema lineare $|F^8|$ rappresenta di nuovo una M_3^{54} di S_{29}, ma diversa dalla precedente. Agli ∞^1 piani di V_3^3 corrispondono su M_3^{54} superficie φ^8 di Del Pezzo (di 1ª specie); al vertice P, un piano σ contenente le ∞^1 rette delle φ^8, le quali vi formano fascio; ai coni q, superficie Φ^{12} a sezioni di genere due; al piano direttore, una φ^4 di Veronese. Tra queste superficie si hanno le relazioni:

$$F^{54}=3\varphi^4+5\varphi^8+2\sigma\,(^1)\quad ;\quad \Phi^{12}=\varphi^4+\varphi^8.$$

Questa M_3^{54} non contiene altre rette, all'infuori di quelle del piano σ. Essa è proiezione della M_3^{62} di S_{33} incontrata al n. 11, ipotesi *c*) (anche contenente un piano) dallo spazio S_3 tangente ad essa in un punto generico O. Le Φ^{12} generiche di M_3^{62} si proiettano in quelle di M_3^{54}; le ∞^1 fra

---

(1) Il sistema lineare $\Sigma\left[\dfrac{k_i}{2}\right]\Gamma^i$ del n. 11 è qui il sistema $|\varphi^4+2\varphi^8+\sigma|$ composto di superficie di ordine 21, immagine appunto delle R^3 sezioni iperpiane del cono V_3^3. Sulla superficie F^{54} si ha del pari $C^{54}=3\gamma_0^4+5\gamma_1^8+2r$ (essendo γ_0^4, γ^8 le sezioni di φ^4, φ^8, r la retta sezione del piano σ). La r (immagine dell'intorno di P sopra un cono q) non incontra la γ_0^4, incontra in un punto le γ_1^8 (è quindi direttrice del fascio $|\varphi^8|$), ed è (su F^{54}) di grado -2; incontra perciò le sezioni F^{54} (come deve) in un numero di punti $=3.0+5.1+2.(-2)=1$.

esse che passano per O si proiettano nel fascio di φ^8; il punto stesso O ha per immagine la φ^4 di Veronese [1].

b) Per $n = 4$ il cono $V_3^n \equiv V_3^4$ contiene infiniti coni quadrici q, collo stesso suo vertice P e in generale irriducibili (è proiezione di una R^4 con ∞^1 coniche direttrici). Due piani generatori del cono, avendo a comune il vertice, impongono a una forma cubica complessivamente solo 19 condizioni; perciò le forme cubiche passanti per questi 2 piani segano su V_3^4 un sistema di superficie F^{10} di dimensione 30, con punto doppio fisso nel vertice P, e rappresentante una M_3^{56} di S_{30} ($p = 29$). Ai piani di V_3^4 corrispondono su M_3^{56} di nuovo superficie φ^8 di Del Pezzo di 1ª specie; ai coni q, invece, superficie Φ^8 di 2ª specie, particolari, con punto doppio [2]. Questi ∞^1 punti doppi delle Φ^8 hanno per luogo una retta s, doppia per la M_3^{56}, e immagine del vertice P di V_3^4 (i singoli punti di s sono immagini dell'intorno di P sui singoli q): colla s coincidono tutte le rette (semplici) delle varie φ^8, di modo che la M_3^{56} è priva di rette, all'infuori della retta doppia s. Si ha:

$$F^{56} = 4\,\varphi^8 + 3\,\Phi^8 + 2\,s.$$

---

(1) Il cono V_3^3 di S_5 qui considerato si proietta univocamente su S_3 da una retta di un suo piano generatore, non passante nel vertice P; alle sezioni iperpiane di V_3^3 corrispondono le quadriche aventi a comune una retta e il piano tangente in un punto di questa (proiezione di P). Assunto tale punto come fondamentale [4] del sistema di coordinate, il piano tangente in esso come $x_1 = 0$, e la retta base come retta $x_1 = x_2 = 0$, questo sistema di quadriche può rappresentarsi coll'equazione:

$$x_4\,x_1 + x_3\,\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

dove φ_1, φ_2 sono forme binarie generali nelle x_1, x_2 di gradi 1, 2. Il sistema ∞^{29} rappresentante la M_3^{54} in parola, essendo il triplo del precedente, diminuito successivamente di un piano del fascio $x_1 = x_2 = 0$, potrà ottenersi elevando a cubo l'equazione precedente, sostituendo alle potenze e prodotti di fattori φ_1, φ_2 forme generiche degli stessi gradi, e dividendo poi tutto il primo membro per un fattore lineare generico $a_1 x_1 + a_2 x_2$, previa soppressione di quei termini (nel caso presente il solo termine $x_4^3\,x_1^3$) che non contengono un fattore di questo tipo. Si trova così l'equazione:

$$x_4^2\,x_1^2\,(ax_1 + bx_2 + cx_3) + x_4\,x_1\,(x_3^2\,f_1 + x_3\,f_2 + f_3) + (x_3^3\,g_2 + x_3^2\,g_3 + x_3\,g_4 + g_5) = 0$$

dove le f e le g sono forme binarie in x_1, x_2, di gradi eguali ai rispettivi indici; equazione dipendente linearmente da 30 parametri omogenei, e manifestamente contenuta come caso particolare in quella della nota (1) a pag. 49. Mancano in questa i 4 termini di grado > 3 in x_3, x_4 complessivamente, in relazione al fatto che si tratta di superficie colla retta $x_1 = x_2 = 0$ doppia.

(2) Rappresentabili sul piano col sistema delle quartiche aventi a comune due punti doppi infinitamente vicini (vedi la nota (2) a pag. 46).

Le rigate R^4 sezioni iperpiane di V_3^4 hanno per immagini le superficie $|\,2\varphi^8 + \Phi^8 + s\,|$, di ordine 24.

b') Il cono V_3^4 può avere un piano direttore π, incidente secondo rette agli ∞^1 piani generatori (gli ∞^1 coni q del caso b) risultano allora da questi stessi ∞^1 piani, insieme col piano π, parte fissa). In tal caso, gli spazi S_5 tangenti in P alle forme cubiche che segano le F^{10} contengono tutti il piano π, e queste forme segano perciò sui piani generatori cubiche piane aventi a comune il punto P e la relativa tangente (nel piano π). Ai piani generatori corrispondono pertanto su M_3^{56} superficie φ^7 con punto doppio A e contenenti due rette, una delle quali (u) passante pel punto doppio, l'altra (v) no.

Le rette u e le v delle ∞^1 superficie φ^7 formano due fasci, in piani distinti α, β, con uno stesso centro X. Le F^{56} sezioni iperpiane passanti per X corrispondono alle F^{10} segate su V_3^4 da forme cubiche incontranti il piano π secondo terne di rette tutte appartenenti al fascio $P\,(\pi)$; quelle che contengono in più l'intero piano α o β corrispondono alle forme cubiche aventi il punto P come doppio o rispettivamente passanti per π. Le superficie φ^8 del caso precedente sono spezzate in $\varphi^7 + \alpha$, le Φ^8 in $\varphi^7 + \beta$; i punti A, doppi per le singole φ^7, hanno ancora per luogo una retta doppia s. E si ha:

$$F^{56} = 7\varphi^7 + 4\alpha + 3\beta + 2s \text{ [1]}.$$

---

[1] Questi due coni V_3^4 di S_6 [b), b')] si proiettano entrambi univocamente su S_3 dal piano di una loro retta, non passante pel vertice, e di un loro punto ulteriore generico. Le loro sezioni iperpiane si proiettano in rigate cubiche generali nel caso b), rigate di Cayley nel caso b'), aventi a comune la retta doppia (e sia $x_1 = x_2 = 0$), i piani tangenti in un punto di questa, proiezione di P (il punto [4], coi piani tangenti $x_1 = 0$, $x_2 = 0$); infine, nel caso b) una generatrice per questo punto ($x_1 = x_3 = 0$), nel caso b') la generatrice infinitamente vicina alla direttrice nel piano tangente fisso, e sia questo $x_1 = 0$. Questi due sistemi ∞^6 di rigate R^3 sono rappresentati dalle equazioni:

$$x_4\, x_1\, x_2 + x_3\, \varphi_2 + x_1\, \varphi_2' = 0$$

$$x_4\, x_1\, x_2 + x_3\, x_1\, \varphi_1 + \varphi_3 = 0$$

dove le φ e φ' sono forme binarie in x_1, x_2, di gradi eguali ai rispettivi indici. Le due M_3^{56} dei casi b) e b') saranno pertanto rappresentate dai due sistemi tripli dei precedenti, diminuiti ciascuno di due piani generici del fascio $x_1 = x_2 = 0$; vale a dire dai due sistemi di superficie di 7° ordine:

$$b)\ \ x_4^2\, x_1^2\, x_2^2\, (x_1 + \lambda x_3) + x_4\, x_1\, x_2\, (x_3^2\, f_2 + x_3\, x_1\, f_2' + x_1^2\, f_2'')$$
$$+ (x_3^3\, f_4 + x_3^2\, x_1\, f_4' + x_3\, x_1^2\, f_4'' + x_1^3\, f_4''') = 0$$

$$b')\ \ x_4^2\, x_1^2\, x_2^2\, f_1 + x_4\, x_1\, x_2\, (x_1^2\, x_3^2 + x_1\, x_3\, f_2 + f_4) + (x_1^3\, x_3^3\, f_1' + x_1^2\, x_3^2\, f_3 + x_1\, x_3\, f_5 + f_7) = 0$$

dove tutte le f, , f', $\cdots$ sono forme binarie nelle x_1, x_2 di gradi eguali ai rispettivi indici. I due sistemi dipendono entrambi da 30 parametri.

c) Per $n = 5$ si ha un cono V_3^5 di S_7, in generale con unico cono quadrico q direttore. Tre suoi piani generatori impongono alle forme cubiche complessivamente 28 condizioni, e il sistema lineare $|F^{12}|$ segato su V_3^5 dalle forme cubiche passanti per questi 3 piani rappresenta una M_3^{58} di S_{31} $(p = 30)$. Tali forme cubiche hanno come spazio S_6 tangente nel vertice P del cono V_3^5 lo spazio (fisso) dei 3 piani generatori suddetti e del cono q; segano dunque sugli ∞^1 piani generatori cubiche passanti per P e con tangente fissa, appartenente a q. I piani generatori hanno per immagini superficie φ^7 con uno stesso punto doppio X (di multiplicità 8 per M_3^{58}); le loro rette u passanti per X formano un fascio X (α); le rette ulteriori v formano una rigata R^4, immagine del cono q, con direttrice rettilinea contenuta nel piano α. E si ha:

$$F^{58} = 6\varphi^7 + 3R^4 + 4\alpha.$$

Questa M_3^{58} è proiezione della M_3^{64} considerata al n. 10, 1°), da una conica contenuta nella φ^4 di Veronese; la direttrice rettilinea di R^4 è traccia dell'S_4 tangente a φ^4 lungo questa conica. Le sezioni iperpiane di M_3^{64} sono immagini delle superficie $|F^{58} + R^4|$ (1).

c') Se il cono V_3^5 ha un piano direttore π, tre suoi piani generatori, incidenti a π secondo rette, impongono alle forme cubiche obbligate a contenerli solo 27 condizioni complessivamente, anzichè 28. Tali forme segano perciò su V_3^5 un sistema lineare di F^{12} rappresentante una M_3^{60} di S_{32} $(p = 31)$. Esse incontrano inoltre π secondo 3 rette di un fascio, e i singoli piani generatori di V_3^5 secondo cubiche che nel vertice P del

---

(1) Questa V_3^5 di S_7 si proietta univocamente su S_3 dallo spazio S_3 di due sue rette, contenute in piani generatori arbitrari ξ, η, e non passanti per P. Il vertice P si proietta in un punto P_0, che assumiamo come [4]; il cono quadrico q in una retta p_0 passante per P_0 $(x_1 = x_2 = 0)$; i piani generatori nei piani del fascio p_0; le ∞^7 sezioni iperpiane, nelle rigate cubiche con p_0 doppia e due piani tangenti fissi nel punto P_0, immagini rispettivamente di ξ e η. Questo sistema ∞^7 di rigate R^3 è allora rappresentato dall'equazione:

$$x_4 x_1 x_2 + x_3 \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \qquad [1]$$

dove φ_2, φ_3 sono forme binarie generali nelle x_1, x_2 di gradi 2, 3. Alle superficie F^{12} intersezioni di V_3^5 con forme cubiche passanti per 3 piani generatori corrispondono le superficie del sistema lineare triplo del precedente, diminuito di 3 piani generici del fascio p_0; l'equazione del loro sistema lineare si trova con procedimento analogo a quello della nota (1) a pag. 52, ed è:

$$x_4^2 x_1^2 x_2^2 + x_4 x_1 x_2 (x_3^2 f_1 + x_3 f_2 + f_3) + (x_3^3 g_3 + x_3^2 g_4 + x_3 g_5 + g_6) = 0$$

dipendente da 31 parametri. È questo il sistema rappresentativo della M_3^{58} di S_{31} considerata di sopra.

cono non soltanto sono tangenti alla traccia di questo piano su π, ma vi hanno un flesso con detta tangente. Ai piani generatori di V_3^5 corrispondono su M_3^{60} superficie φ^6 con due punti doppi; uno conico A, immagine della tangente di flesso, comune a tutte le φ^6; l'altro biplanare, variabile su una retta s, doppia per M_3^{60} (1) (2). La congiungente dei due punti doppi è l'unica retta della φ^6; e la M_3^{60} contiene il piano As, luogo di queste ∞^1 rette (e non altre rette).

d) Per $n = 6$ (cono V_3^6 di S_8, con cono quadrico direttore irriducibile q) si trova, con analoghe considerazioni, una M_3^{62} di S_{33} ($p = 32$), contenente un fascio di φ^7 con punto doppio fisso X. Le rette v delle φ^7 non passanti per X formano un cono quadrico Γ^2 con vertice $Y \neq X$, immagine del cono q; le rette u coincidono tutte colla XY, doppia per M_3^{62} (ma semplice per le singole φ^7) (3).

Il sistema $|F^{62} + \Gamma^2|$ rappresenta una particolare M_3^{64} di S_{34} con conica doppia (n. 10, 2°, in fine), della quale la precedente è proiezione da un punto generico della conica doppia.

e) Per $n = 7$ (cono V_3^7 di S_9, con cono quadrico direttore q) le forme cubiche passanti per $n - 2 = 5$ piani generatori del cono V_3^7 hanno tutte le generatrici del cono q come tangenti tripunte nel vertice P.

---

(1) Le sezioni iperpiane di M_3^{60} passanti per A sono immagini delle F^{12} contenenti come parte il piano π; quelle per i singoli punti di s corrispondono alle F^{12} segate da forme cubiche aventi in P un determinato spazio S_6 tangente (che può variare in un fascio).

(2) Il cono V_3^5 di S_7 con piano direttore può proiettarsi univocamente su S_3 dallo spazio S_3 di una sua retta (non passante per P) e di 2 suoi punti generici, in piani generatori distinti. L'equazione del suo sistema rappresentativo in S_3 può ricevere la forma:

$$x_4\, x_1\, x_2\, (x_1 + x_2) + x_3\, x_1\, x_2\, \varphi_1 + \varphi_4 = 0$$

essendo φ_1, φ_4 forme binarie di gradi 1, 4 nelle x_1, x_2. Di qui, in modo analogo ai casi precedenti, si ricava per il sistema rappresentativo di M_3^{60} l'equazione:

$$x_4^2\, x_1^2\, x_2^2\, (x_1 + x_2)^2\, f_1 + x_4\, x_1\, x_2\, (x_1 + x_2)\, [x_1\, x_2\, x_3\, f_2 + f_5]$$
$$+ [x_1^3\, x_2^3\, x_3^3 + x_1^2\, x_2^2\, x_3^2\, f_3 + x_1\, x_2\, x_3\, f_6 + f_9] = 0$$

dipendente da 32 parametri.

(3) Le sezioni iperpiane per X sono immagini delle superficie segate su V_3^6 da forme cubiche passanti per 4 piani generatori e aventi in più il vertice P come doppio; le sezioni per Y corrispondono a forme cubiche incontranti il cono q, all'infuori delle 4 generatrici fisse, in altre 2 generatrici, anzichè in una conica irriducibile.

Esse segnano su V_3^7 un sistema lineare $|F^{16}|$ rappresentante una M_3^{66} di S_{35} ($p = 34$); ai piani di V_3^7 corrispondono superficie φ^6, con un punto doppio fisso X, biplanare, immagine del vertice P, e un secondo punto doppio conico, variabile su una retta s, doppia per M_3^{66}, e i cui punti sono immagini delle singole generatrici di q. Le rette delle φ^6 formano un fascio di centro X, nel piano $Xs \equiv \sigma$. Le sezioni iperpiane per la retta s corrispondono alle intersezioni di V_3^7 colle quadriche di S_9.

La M_3^{66} non contiene rette, all'infuori del piano σ (¹).

f) Infine, per $n = 8$, si ha un cono V_3^8 di S_{10}, sempre con cono quadrico direttore q; le forme cubiche passanti per 6 suoi piani arbitrari segano su V_3^8 un sistema $|F^{18}|$ rappresentante una M_3^{72} di S_{38}. Agli ∞^1 piani del cono V_3^8 corrispondono su M_3^{72} superficie φ^6 con due punti doppi fissi X, Y, e contenenti la (unica) retta XY. Uno di questi punti, X, è biplanare per le φ^6, e immagine del vertice P di V_3^8; l'altro Y è conico e immagine del cono q; le sezioni iperpiane passanti per X, Y sono immagini delle F^{18} segate da forme cubiche con P doppio, o rispettivamente contenenti il cono q (perciò, astraendo da questo, delle F^{16} intersezioni di V_3^8 con quadriche). Le ∞^1 coniche delle singole φ^6 passano tutte per X; le ∞^2 cubiche per Y. I punti X, Y sono entrambi 8^pli^ per M_3^{72}; la retta XY è doppia (²).

(¹) Il cono V_3^7 si proietta univocamente su S_3 dallo spazio S_5 di 2 sue rette e di 2 suoi punti ulteriori, scelti in modo generico in altrettanti suoi piani. Gli ∞^1 piani generatori si proiettano in piani di un fascio ($x_1 = x_2 = 0$). Supposto che i 4 piani suindicati si proiettino rispettivamente nei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e nella coppia $\xi_2(x_1 x_2) = 0$, e il vertice P nel punto [4], il sistema lineare ∞^9 rappresentativo del cono V_3^7 sarà dato dall'equazione:

$$x_4 x_1 x_2 \xi_2 + x_3 \xi_2 \varphi_2 + \varphi_5 = 0$$

con φ_2, φ_5 forme binarie generiche di 2° e 5° grado nelle x_1, x_2. E il sistema lineare rappresentante la M_3^{66} è allora:

$$x_4^2 x_1^2 x_2^2 \xi_2^2 + x_4 x_1 x_2 \xi_2 (x_3 \xi_2 f_2 + f_5) + (x_3^3 \xi_2^3 f_1 + x_3^2 \xi_2^2 f_4 + x_3 \xi_2 f_7 + f_{10}) = 0$$

con analogo significato per le f, e 35 parametri in tutto.

(²) Il cono V_3^8 si proietta univocamente su S_3 dallo spazio S_6 di 2 sue rette e 3 suoi punti scelti in modo generico in altrettanti piani generatori; e gli ∞^1 piani generatori si proiettano nei piani di un fascio. Se $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sono, in questo fascio, i piani corrispondenti ai primi 2 dei 5 suaccennati; $\xi_3(x_1 x_2) = 0$ la terna corrispondente ai 3 piani residui; il punto [4] la proiezione del vertice P di V_3^8, l'equazione del sistema lineare ∞^{10} rappresentativo di V_3^8 (sistema composto di

13. Varietà M_3^{2p-2} con fascio di superficie cubiche. — Rimangono ora a determinare le M_3^{2p-2} di S_{p+1}, con curve–sezioni canoniche di genere p contenenti una serie lineare g_3^1; varietà contenenti perciò un fascio di superficie cubiche φ^3 (di S_3), e a loro volta contenute in V_4^{p-2}, ∞^1 razionali normali di spazi S_3, e intersezioni di queste con forme cubiche ξ passanti per $p-4$ fra questi spazi S_3 (« Berz. », n. 2). Possiamo supporre $p > 7$, i casi $p \leq 7$ essendo già stati esaminati nella Memoria « Berz ».

Vediamo anzitutto se tale V_4^{p-2} possa essere un cono, e precisamente un S_0–cono o S_1 cono. Il caso di un S_2–cono rimane senz'altro escluso, almeno se $p > 4$, perchè la forma cubica ξ, contenendo almeno un S_3 della V_4^{p-2}, e quindi lo spazio S_2 asse di tale cono, incontrerebbe ulteriormente gli ∞^1 spazi S_3 secondo quadriche o piani variabili, e ne nascerebbe una varietà M_3 di altro tipo, a curve sezioni iperellittiche o razionali.

Se V_4^{p-2} è un S_0–cono, la forma cubica ξ potrà avere nel vertice P di essa un punto semplice soltanto se i $p-4$ spazi S_3 (generici) ch'essa è vincolata a contenere stanno in un iperpiano S_p, il quale sarà tangente ad essa in P [1]. La V_4^{p-2} avrà pertanto in questo stesso S_p un cono quadrico direttore (Γ_3^2 di S_4), ovvero uno spazio S_3 direttore, il quale (sia cono, che spazio S_3) avrà a comune colla forma cubica ξ un numero $p-4 \geq 4$ di piani; e se si tratta di cono Γ_3^2, piani di uno stesso sistema; risultando perciò contenuto in ξ. La M_3^{2p-2} sarà dunque riducibile, e daccapo non del tipo richiesto [2]. Pertanto, se $p > 7$, e supposto sempre che la V_4^{p-2} sia un S_0–cono, la forma cubica ξ avrà necessariamente nel

---

rigate R^6 colla retta $x_1 = x_2 = 0$ quintupla; doppia come direttrice, e generatrice tripla) può scriversi così:

$$x_4\, x_1\, x_2\, \xi_3 + x_3\, \xi_3\, \varphi_2 + \varphi_6 = 0$$

dove φ_2, φ_6 sono forme binarie in x_1, x_2, affatto generali, dei gradi 2, 6 (mentre ξ_3 ha coefficienti costanti). Di qui si ricava come sistema lineare rappresentante la M_3^{12} quello di equazione:

$$x_4^2\, x_1^2\, x_2^2\, \xi_3^2 + x_4\, x_1\, x_2\, \xi_3\, (x_3\, \xi_3\, f_2 + f_6) + (x_3^3\, \xi_3^3 + x_3^2\, \xi_3^2\, f_4 + x_3\, \xi_3\, f_8 + f_{12}) = 0$$

dove le f sono forme arbitrarie in x_1, x_2 di gradi eguali ai rispettivi indici. Questa equazione contiene appunto linearmente 38 parametri.

(1) La M_3^{2p-2} avrà allora in P un punto doppio, che sarà però semplice per le singole φ^3.

(2) Così non avviene invece se $p \leq 7$, come appare dalla Memoria « Berz. » n. 7, 10, 14.

vertice P di V_4^{p-2} un punto doppio (¹), il quale sarà pure doppio (almeno) per tutte le φ^3. La M_3^{2p-2} sarà quindi razionale, e dal punto P (per essa di multiplicità p) si proietterà univocamente in una V_3^{p-2}, ∞^1 razionale normale di piani, sezione iperpiana (generica) di V_4^{p-2}. Le sue sezioni iperpiane si proiettano così in un sistema lineare ∞^{p+1} di superficie F^{2p-2} di generi uno, entro quella V_3^{p-2}; superficie che saranno a loro volta intersezioni di quest'ultima con forme cubiche passanti per $p-4$ suoi piani. Ai n. 11–12 (ove $n = p-2$) furono già studiati i sistemi totali di queste F^{2p-2}, e le varietà M_3 che li rappresentano: la M_3^{2p-2} inizialmente data non potrà dunque essere che una proiezione di una di queste (in quanto rappresenta un sistema di superficie contenuto in uno dei sistemi totali precedenti (²)).

Analogamente, se la V_4^{p-2} di cui sopra è un S_1–cono, affinchè la forma cubica ξ non abbia sulla retta asse del cono nessun punto doppio occorre che essa, nei singoli punti di questa retta, abbia uno spazio S_p tangente variabile, e perciò che i $p-4$ spazi S_3 contenuti in ξ stiano in un S_{p-1}. La V_4^{p-2} avrà pertanto o ∞^1 coni quadrici Γ_3^2 direttori, il che richiede $p-2 \leqq 4$, ossia $p \leqq 6$; oppure uno spazio S_3 direttore, cosa possibile solo se $p-4 \leqq 3$, cioè $p \leqq 7$. Se $p > 7$, la forma ξ avrà dunque certo almeno un punto doppio sulla retta asse della V_4^{p-2}, S_1–cono; e valgono le stesse conclusioni precedenti, salvo che la V_3^{p-2}, dianzi non cono, sarà ora un S_0 –cono (cfr. ancora il n. 12, casi *a*) e seg.).

E pertanto, complessivamente, se la V_4^{p-2} è un cono, e $p > 7$, non si ha alcun nuovo tipo di M_3^{2p-2}; si hanno soltanto varietà proiezioni delle precedenti, con superficie φ^3 proiezioni delle φ^9, φ^8, $\cdots$ di Del Pezzo già incontrate.

14. Determiniamo ora le M_3^{2p-2} di S_{p+1} contenenti un fascio di φ^3, e contenute a loro volta in V_4^{p-2}, ∞^1 di spazi S_3, non coni.

Le direttrici minime di queste V_4^{p-2} possono essere:

a) in numero di ∞^3, tali che per ciascun punto di V_4^{p-2} ne passi

---

(¹) Non triplo, se no la M_3^{2p-2} sarebbe un cono di vertice P, caso escluso fin da principio.

(²) Poichè le sezioni di una φ^3 con punto doppio si proiettano da questo punto sopra un piano secondo cubiche aventi a comune 6 punti, eventualmente non tutti distinti, appartenenti a una conica, il sistema parziale sopra accennato di F^{2p-2} su V_3^{p-2}, di dimensione $p+1$, avrà una curva base incontrante i singoli piani di V_3^{p-2} in gruppi di 6 punti, e contenuta in una superficie razionale luogo di ∞^1 coniche.

una, e di ordine $\frac{p-2}{4}$ (perciò $p \equiv 2$, mod. 4). Esse punteggiano allora proiettivamente gli ∞^1 spazi S_3;

b) in numero di ∞^2, di ordine $k \leq \frac{p-3}{4}$; esse riempiono in tal caso una V_k^{3k} direttrice, luogo di ∞^1 piani; piani che sono a loro volta punteggiati proiettivamente da queste direttrici;

c) in numero di ∞^1, oppure una direttrice minima unica, di un ordine $k \leq \frac{p-4}{4}$ (se ∞^1, contenute in una rigata direttrice minima di ordine $2k$).

Esaminiamo separatamente queste varie ipotesi.

a) In questo caso occorre che le forme cubiche le quali segano su V_4^{p-2} la M_3^{2p-2} richiesta, e all'uopo passano per $p-4$ spazi S_3 generatori, non contengano di conseguenza tutte le ∞^3 direttrici minime (e quindi l'intera V_4^{p-2}). Questo esige sia $p-4 \leq 3\,\frac{p-2}{4}$, ossia $p \leq 10$. Essendo d'altra parte $p \equiv 2$, mod. 4, sono possibili i soli casi $p=6$, già considerato nella Memoria « Berz. », n. 10, e $p=10$. In quest'ultimo caso la V_4^{p-2} (V_4^8 di S_{11}) ha ∞^3 coniche direttrici, e la $M_3^{2p-2} \equiv M_3^{18}$ è luogo di ∞^2 fra esse, nonchè di ∞^1 superficie φ^3, omografiche e punteggiate proiettivamente da queste ∞^2 coniche. Le 27 rette delle singole φ^3 hanno per luoghi altrettante rigate R^4 razionali normali, con ∞^1 coniche direttrici. Questa M_3^{18} di S_{11} è proiezione della M_3^{54} di S_{29} incontrata ai n. 4, 11. Quest'ultima contiene infatti un fascio di φ^9 di DEL PEZZO, e una congruenza di coniche unisecanti le φ^9 e che le riferiscono omograficamente: proiettandola successivamente da 6 generiche fra queste coniche si ha appunto la M_3^{18} suindicata (e queste 6 coniche hanno per immagini altrettante fra le 27 rigate R^4, contenenti, per ciascuna φ^3, rette di una sestupla).

Dall'insieme dei risultati ottenuti e che otterremo per queste M_3^{2p-2} con fascio di φ^3, risulterà che la presente M_3^{18} ($p=10$) è quella di ordine massimo, nell'ipotesi di φ^3 generalmente prive di punto doppio (¹).

b) In questo caso, similmente, affinchè la forma cubica segante la M_3^{2p-2} non contenga di conseguenza l'intera M_3^{3k} luogo delle ∞^2 direttrici minime (nel qual caso la M_3^{2p-2} sarebbe riducibile), occorre sia $p-4 \leq 3k$, e quindi *a fortiori* $p-4 \leq 3\,\frac{p-3}{4}$, ossia $p \leq 7$. Unico caso è dunque quello di $p=7$, incontrato in « Berz. », n. 14.

(¹) Per questa M_3^{18} la rigata complessiva delle rette contenute nelle φ^3 si compone delle 27 rigate R^4 sopra considerate; è dunque di ordine 108. Il confronto colle altre M_3^{2p-2} con fascio di φ^3, studiate in « Berz. », conduce a stabilire per l'ordine della rigata luogo delle rette contenute nelle φ^3 il valore $3p+78$.

c) Per questo caso osserviamo anzitutto che una V_4^{p-2} di S_{p+1}, ∞^1 razionale normale di S_3 e non cono, se $p > 7$ (con che rimane escluso abbia ∞^3 direttrici rettilinee), si proietta univocamente da un suo S_3 in una V_4^{p-6} di S_{p-3}, anche ∞^1 razionale normale di S_3; e le curve e rigate direttrici della prima, tutte razionali normali, si ritrovano sulla seconda cogli ordini diminuiti rispettivamente di 1 o di 2 unità. E se la V_4^{p-6} così ottenuta non è neppur essa cono, nè ha ∞^3 direttrici rettilinee, l'operazione può ripetersi. Nell'ipotesi c), avendo la V_4^{p-2} una sola direttrice minima, oppure ∞^1 (e non più), di ordine $k \leq \frac{p-4}{4}$, potremo ripetere tale operazione k volte, e pervenire così a una V_4^{p-2-4k} di S_{p+1-4k}, anch'essa ∞^1 razionale normale di S_3, e rispettivamente S_0–cono oppure S_1–cono. Così facendo, nella prima proiezione la M^{2p-2} considerata su V_4^{p-2} si proietterà anche univocamente in una $M_3^{2p-2-} \equiv M_3^{2p-11}$ (¹), contenuta nella V_4^{p-6}; pur essa luogo di ∞^1 superficie φ^3 negli spazi S_3 della detta V_4^{p-6}, e intersezione di quest'ultima con una forma cubica passante per $3(p-6)-(2p-11)=2p-7$ suoi spazi S_3. E questa M^{2p-} avrà le superficie sezioni *razionali* (n. 5). Se fosse $k>1$, con una seconda proiezione analoga la M_3^{2p-11} si proietterebbe pure univocamente in altra M_3, le cui superficie sezioni ψ corrisponderebbero di nuovo alle residue delle φ^3 rispetto alle sezioni di M^{2p-11}, già razionali. E poichè queste ψ dovrebbero ancora incontrare le φ^3 secondo le sezioni piane di queste, di genere uno, se ne trae che le ψ e le loro corrispondenti ψ_0 su M_3^{2p-11} sarebbero di genere aritmetico -1; sicchè il sistema $|\psi_0|$, segato su M_3^{2p-11} (varietà regolare) dagli iperpiani passanti per una φ^3, ossia per lo spazio S_3 di questa, dovrebbe appartenere a una congruenza di linee. Queste ∞^2 linee dovrebbero essere tali che ogni iperpiano passante per uno dei detti spazi S_3 e per un punto ulteriore di una delle linee stesse contenga tale linea per intero; sarebbero dunque direttrici rettilinee della V_4^{p-6}, e pertanto la M_3^{2p-11} non si proietterebbe più univocamente da quell'S_3, mentre, se $k>1$, ciò avviene per la V_4^{p-} che la contiene (e ne contiene pure infinite altre analoghe). Concludiamo perciò che, nell'ipotesi attuale c), varietà M_3^{2p-2} come richieste possono esistere solo sulle V_4^{p-2} con $k=1$, cioè con un'unica retta direttrice, oppure con ∞^1 di queste, aventi per luogo una quadrica. E la ricerca di esse è ricondotta a quella delle M_3^{2p-11} esistenti su V_4^{p-}, anche

(¹) Quest'ordine è il grado del sistema differenza $|F^{2p-2}-\varphi^3|$ sopra M_3^{2p-2}. Poichè le F^{2p-2} segano le φ^3 in cubiche piane, e a queste cubiche spetta su φ^3 il grado 3 (questo è dunque il numero delle intersezioni di due F^{2p-2} e di una φ^3) e sulle F^{2p-2} il grado O (numero delle intersezioni di una F^{2p-2} e di due φ^3), il carattere richiesto sarà $(2p-2)-3.3+3.0-0=2p-11$.

∞^1 razionali normali di S_3, e S_0–coni oppure S_1–coni, segabili con forme cubiche passanti per $p-7$ spazi S_3.

Ponendo per comodità $p-4=p'$, dobbiamo costruire possibilmente, sopra una $V_4^{p'-2}$ di $S_{p'+1}$, S_0–cono o S_1–cono, una $M_3^{2p'-3}$ (a superficie sezioni razionali) sua intersezione con una forma cubica ξ passante per $p'-3$ spazi S_3 generatori.

Riprendiamo all'uopo il ragionamento del n. 13, esaminando anzitutto se questa forma cubica ξ possa essere scelta in modo da non avere punti doppi nel vertice dell'S_0–cono o sulla retta asse dell'S_1–cono. Nel primo caso i $p'-3$ spazi S_3 che la forma ξ è obbligata a contenere dovranno stare nell'iperpiano $S_{p'}$ tangente ad essa nel vertice di $V_4^{p'-2}$, sicchè questo iperpiano dovrebbe segare ulteriormente la $V_4^{p'-2}$ secondo un S_3 direttore. E ciò va escluso, perchè una ∞^1 razionale normale di spazi S_3 con S_3 direttore è necessariamente S_1–cono (gli S_3 generatori segano questo ulteriore S_3 in piani, e la retta intersezione di due qualunque fra questi piani è l'S_1 asse). Se invece la $V_4^{p'-2}$ è S_1–cono, la forma ξ dovrà avere, nei singoli punti dell'S_1 asse, spazio tangente variabile; e ciò richiede i $p'-3$ spazi S_3 stiano in un $S_{p'-1}$, e gli iperpiani passanti per questo seghino ulteriormente la $V_4^{p'-4}$ secondo ∞^1 spazi S_3 direttori. Questo è possibile soltanto se si tratta di un S_1–cono quadrico; cioè se $p'-2=2$, $p'=p-4=4$, $p=8$. A questo caso corrisponde una M_3^{14} di S_9, intersezione di una V_4^6 razionale normale con rigata quadrica direttrice e di una forma cubica passante per 4 suoi spazi S_3 generatori (e contenente di conseguenza l'intera quadrica suddetta).

Una M_3^{14} così fatta si proietta dallo spazio S_3 di una sua φ^3 in una M_3^5 di S_5 (a curve sezioni di genere 2), intersezione di un S_1–cono quadrico (proiezione di una quadrica non cono di S_3 da una retta s) e di una forma cubica passante per un suo $S_3 \equiv \Sigma$ di uno dei due sistemi. Gli spazi S_3 di questo sistema incontrano M_3^5 secondo superficie φ^3, tutte contenenti la retta s; gli S_3 dell'altro sistema, secondo quadriche Q non contenenti la s. Da una retta r di una φ^3, non incidente a s, perciò direttrice (unisecante) del fascio di Q, la M_3^5 si proietta univocamente sullo spazio $S_3 \equiv \Sigma_0$ di un'altra qualsiasi φ^3 (spazio contenente la s). Le singole Q si proiettano stereograficamente sui piani del fascio s; le φ^3 in un fascio di φ^3 (1), passanti per s e tangenti fra loro lungo quest'intera retta (2), perciò (come

(1) La proiezione essendo univoca, per un punto generico di Σ_0 passa una sola delle φ^3 proiezioni: queste formano dunque un fascio.

(2) I piani tangenti alle φ^3 di M_3^5 in un dato punto di s stanno tutti nello spazio S_3 ivi tangente a M_3^5, che è lo spazio di una fra le Q (di quell'una che passa per questo punto). E dalla retta r, incidente a questo S_3, essi si proiettano tutti nel piano intersezione di questo S_3 con Σ.

subito si vede dalla rappresentazione piana delle φ^3) aventi a comune in più una γ_3^7 iperellittica di cui la s è una 5–secante (1). Le superficie di 5° ordine sezioni iperpiane di M_3^5 si proiettano nelle ∞^5 superficie F^4 aventi s come retta doppia, e passanti in più per γ_3^7. Viceversa, due φ^3 fra loro raccordate lungo una retta s si incontrano ulteriormente secondo una γ_3^7 iperellittica di cui questa retta è 5–secante; nel loro fascio è contenuta la rigata cubica determinata dalla g_2^1 su γ_3^7, rigata che ha s come doppia; e il sistema lineare delle F^4 passanti per γ_3^7 e aventi s doppia rappresenta appunto una M_3^5 del tipo suindicato.

La M_3^{14} di S_9, quale a noi occorre, sarà pertanto rappresentata dal sistema lineare somma delle F^4 e φ^3; cioè dal sistema delle superficie di 7° ordine con s tripla e γ_3^7 doppia, e in più un piano tangente fisso in ogni punto di s (2).

15. Dopo di ciò, le M_3^{2p-2} che ancora rimangono a determinare – sempre luoghi di superficie φ^3 negli spazi S_3 di una V_4^{p-2} di S_{p+1}, avente una o ∞^1 direttrici minime rettilinee – dovranno proiettarsi dallo spazio di una φ^3 in varietà M^{2p-11} sopra una V_4^{p-6} di S_{p-3}, S_0– o S_1–cono, segabili sopra questa con forme cubiche aventi un punto doppio nell'S_0 vertice, oppure uno o due punti doppi fissi sull'S_1 asse. Questi stessi sono allora punti doppi comuni delle ∞^1 φ^3 di M^{2p-11}, e altresì proiezioni di punti doppi delle φ^3 di M^{2p-2}. Questi ultimi hanno evidentemente per luogo rette direttrici minime di M^{2p-2}; e pertanto da questa retta o da una qualunque di esse (r) la M^{2p-2} si proietterà univocamente sopra una qualsiasi V_3^{p-3} di S_{p-1}, ∞^1 razionale normale di piani, contenuta in (direttrice di) V_4^{p-2} In questa proiezione, alle F^{2p-2} sezioni iperpiane di M_3^{2p-2} e aventi tutte un punto doppio sopra r corrisponderanno superficie F^{2p-4} (pure di generi uno), intersezioni di V_3^{p-3} con forme cubiche passanti per $3(p-3)-(2p-4)=p-5$ suoi piani; cioè precisamente superficie contenute nei sistemi totali già considerati ai n. 11, 12.

---

(1) Questa γ_3^7 è luogo delle tracce delle rette contenute nelle Q e incidenti a r. La M_3^5 da un S_4 passante per r è incontrata in una Φ^5, luogo di un fascio di coniche (appartenenti alle singole Q), del quale fascio r è direttrice; e in questo fascio 7 coniche si spezzano in rette, una delle quali (per ciascuna coppia) è incidente a r. Si ritrovano così i 7 punti di γ_3^7 nel piano su cui si proietta quella Φ^5.

(2) Poichè la proiezione di M_3^{14} sullo spazio Σ_0 viene fatta complessivamente dall'S_5 di una φ^3 e di una retta r di un'altra φ^3, le singole F^{14} sue sezioni iperpiane vengono proiettate da una γ_1^3 (sezione della φ^3) e da un punto ulteriore: sta bene perciò si proiettino in superficie di 7° ordine. E così anche che le curve canoniche C_8^{14} intersezioni di quelle F^{14} si proiettino in curve di ordine $7^2-9-4.7-1=11$, essendo ciascuna di esse proiettata dalla terna di punti in cui incontra la prima φ^3.

16. Da quanto precede risulta stabilito:

1° Che le varietà M_3^{2p-2} a curve–sezioni canoniche, perciò appartenenti allo spazio S_{p+1}, esistono soltanto per $p \leqq 37$. In corrispondenza al valore massimo $p = 37$ ne esistono due tipi diversi (n. 10–3°; n. 12–f);

2° Che per $p > 10$ queste varietà sono tutte razionali, esclusa soltanto (forse) la M_3^{24} di S_{14} ($p = 13$) rappresentante il sistema delle superficie F^6 di S_4 segate su una forma cubica generale dalle quadriche dello stesso spazio. I casi di tuttora dubbia razionalità sono pertanto in numero molto limitato: quelli per cui $5 \leqq p \leqq 10$ (che comprendono tuttavia M_3^{2p-2} particolari razionali), più la M_3^{24} testè menzionata;

3° Per le varietà M_3^{2p-2} suddette, razionali, degli ordini più elevati abbiamo anche determinati i sistemi lineari rappresentativi sullo spazio S_3, i quali forniscono pertanto i vari tipi di sistemi lineari semplici di superficie di generi uno delle dimensioni più elevate.

Le M_3^{2p-} degli ordini più elevati non contengono rette, oppure soltanto piani isolati, o una retta doppia: le enumeriamo qui sotto, rinviando per le equazioni dei sistemi lineari rappresentativi a quelle che abbiamo date ai numeri 10–12:

I. *Varietà non contenenti rette*:

a) Varietà M_3^{7} di S_{38} di cui al n. 10–3°, rappresentante il sistema delle superficie segate dalle quadriche di S_{10} sul cono Γ_3^9 proiettante una φ^9 di Del Pezzo, a curve sezioni ellittiche;

b) Varietà M_3^{64} di S_{34} rappresentante il sistema di tutte le F^4 di S_3;

c) Altra M_3^{64} di S_{34} (n. 10, 2°) rappresentante il sistema di superficie segato dalle quadriche di S_9 sul cono Γ_3^8 proiettante una Φ^8 di Del Pezzo di 2ª specie [1]. Rileviamo anche il caso particolare in cui questa Φ^8 ha un punto doppio, e la M^{64} conseguentemente una conica doppia;

d) Varietà M_3^{54} di S_{29} rappresentante il sistema delle F^6 segate su una quadrica di S_4, eventualmente cono, dalle forme cubiche: in S_3, il sistema immagine è quello delle φ^6 con conica tripla, eventualmente spezzata in due rette;

e) Altra M_3^{54} di S_{29} rappresentante il sistema delle φ^5 con retta doppia e punto triplo che non si appartengono (n. 11).

II. *Varietà con unico piano*: M^{62} di S_{33}, di cui al n. 11, rappresentante il sistema delle φ^3 con punto triplo e tacnodo in esso (cioè una retta doppia infinitesima infinitamente vicina al punto triplo).

---

[1] La φ^8 di 1ª specie conduce pure a una M_3^{64}, che è proiezione della precedente M_3^{72} dallo spazio S_3 tangente a questa in un suo punto.

III. *Varietà con rette doppie e eventuali piani,* tutte rappresentanti sistemi lineari di superficie segate su S_0–coni razionali normali, del tipo V_3^n di S_{n+2}, da forme cubiche passanti per $n - 2$ piani generatori:

Con sola retta doppia:

Varietà M_3^{72} di S_{38}, di cui al n. 12, *f*);

Varietà M_3^{56} di S_{30}, di cui al n. 12, *b*);

Con retta doppia e piani:

Varietà M_3^{66} di S_{35}, con un piano, di cui al n. 12, *e*);

Varietà M_3^{60} di S_{32}, con un piano, di cui al n. 12, *c'*);

Varietà M_3^{56} di S_{30}, con due piani, di cui al n. 12, *b'*).

Le varietà M_3^{2p-2} qui sopra elencate contengono tutte superficie che *non* sono loro intersezioni complete con forme dello spazio S_{p+1} (e di analoga proprietà godono per conseguenza le superficie F^{2p-2} loro sezioni iperpiane). Il valore massimo di p per il quale è assodata l'esistenza di una M_3^{2p-2} contenente soltanto superficie intersezioni complete con forme di S_{p+1} è per ora $p = 8$; cioè la sezione determinata da uno spazio S_9 nella Grassmanniana delle rette di un S_5 (cfr. il mio lavoro citato nella nota ([2]) a p. 34).

Torino, giugno 1936–XIV.