Gino Fano

Osservazioni su alcune "geometrie finite" I

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **26** (1936), p. 55–60

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1936_4>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Geometria). — *Osservazioni su alcune «geometrie finite».* Nota I [1] del Corrisp. G. FANO.

1. Nella mia Memoria: *Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva...* [2] ho considerato fra altro alcune configurazioni di un numero finito di elementi (punti, rette, ...) che soddisfano alle consuete proprietà di appartenenza (o incidenza) degli elementi omonimi di un piano o spazio proiettivo; in particolare «piani» contenenti $n^2 + n + 1$ punti e un egual numero di rette, tali che ad ogni retta appartengono $n + 1$ di questi punti e ad ogni punto $n + 1$ rette, e due elementi omonimi ne individuano sempre, senza eccezioni, uno di nome diverso che ad essi appartiene. In questo piano (o spazio) sono perciò applicabili e univoche le consuete operazioni di proiezione e sezione; vi si possono definire i gruppi armonici (mediante quadrangoli o quadrilateri costruttori), e due gruppi armonici sono sempre proiettivi.

Lo studio di queste ed altre «geometrie finite» è stato ripreso con più ampio programma e sviluppo, inclusi rappresentazione analitica, studio di gruppi proiettivi, e anche talune questioni di ordinamento e congruenza, nel 1904–07 da O. VEBLEN e altri geometri [3], e in questi ultimi anni da

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1937.

(2) «Giornale di Matematiche», vol. 30, 1892, p. 106.

(3) VEBLEN, «Amer. Math. Soc. Trans.», vol. 5, 1904, p. 343; VEBLEN–BUSSEY, «ibid.», vol. 7, 1906, p. 241; VEBLEN, «ibid.», vol. 8, 1907, p. 366; VEBLEN e MACLAGAN–WEDDERBURN, «ibid.», vol. 8, p. 379. Ved. anche la Nota di B. LEVI a p. 356 di questo ultimo volume; nonchè il precedente lavoro di E. H. MOORE in «Amer. Journ. of Mathem.», vol. 18, 1906, p. 264.

geometri tedeschi (R. Baldus, H. Liebmann, M. Steck [1]). I « sistemi di Veblen » $\mathbf{S}(\nu^2 - \nu + 1 \mid 2 \mid \nu)$, così chiamati da Steck, coincidono appunto, per $\nu = n + 1$, coi miei « piani » sopra indicati [2].

Nella mia Memoria citata ho pure rilevato (per la prima volta) che l'ipotesi che il coniugato armonico di un punto rispetto ad altri due allineati con esso coincida col primo di questi è compatibile coi soliti postulati di appartenenza, ed equivale ad ammettere che i 3 punti diagonali di un quadrangolo piano completo (e quindi di ogni quadrangolo) siano allineati. L'insieme di un quadrangolo piano completo coi 3 punti diagonali allineati è il più semplice dei miei « piani » e in pari tempo il « sistema di Veblen » $\mathbf{S}(7 \mid 2 \mid 3)$. Ad eliminare questa possibilità io avevo introdotto il postulato: « Esiste un gruppo armonico costituito da 4 elementi distinti »; ed è il « Fano'sche Axiom » o $\mathbf{F}_1$, di alcuni dei geometri tedeschi citati [3].

Ho ancora chiamata *serie armonica, di origine* O (denominazione che risale a R. De Paolis) ogni insieme di punti allineati $O, A_1, A_2, \cdots, A_k$ tale che le quaderne $O A_k A_{k-1} A_{k+1}$ siano tutte armoniche; e tali sono allora anche tutte quelle del tipo $O A_k A_{k-i} A_{k+i}$. Le serie armoniche sono tutte proiettive; e l'ipotesi che una di esse rientri in sè stessa dopo p elementi e non prima, che sia cioè $A_{p+1} \equiv A_1$ senza che ciò avvenga per un indice $p' < p$, implica che altrettanto avvenga per tutte queste serie e per lo stesso valore di p, il quale deve essere inoltre numero primo. Ciò è effettivamente possibile (cioè compatibile coi postulati di appartenenza) per ogni valore primo di p: e ne nascono configurazioni coincidenti coi « sistemi di Veblen » $\mathbf{S}(p^2 + p + 1 \mid 2 \mid p + 1)$ (p primo), per le quali io ho indicata la distribuzione dei $p^2 + p + 1$ punti fra le varie rette.

Era naturalmente ammissibile anche l'ipotesi, da me allora non approfondita, di un sistema o « piano » $\mathbf{S}(n^2 + n + 1 \mid 2 \mid n + 1)$ nel quale le serie armoniche rientrassero in sè dopo un numero p di elementi primo e $< n$. L'esempio più semplice era da attendersi per $n = 4$, $p = 2$; ed è dato infatti da un sistema $\mathbf{S}(21 \mid 2 \mid 5)$ nel quale la distribuzione dei 21 punti fra le 21 rette è stata indicata in lavori citati di Veblen, Baldus, Steck [4]. In questo sistema, di nuovo (come per $n = 2$) i punti diagonali di ogni qua-

(1) R. Baldus, « Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. », mathem.–naturw. Abt., 1932, p. 149; 1934, p. 145; H. Liebmann, *Synthetische Geometrie*, Teubner, 1934, in part. § 2; M. Steck, « Deutsche Mathem. », vol. 1, 1936, pp. 578, 588; vol. 2, 1937, p. 242; « Monatsh. Math. Phys. », vol. 45, 1937, p. 320; « Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. », 1937.

(2) I tre numeri entro parentesi indicano rispettivamente il numero totale dei punti e delle rette di un piano, il numero dei punti occorrenti a individuare una retta, e il numero dei punti contenuti in una retta, nonchè delle rette di un fascio.

(3) In Veblen–Young, *Proiective Geometry*, vol. I, 1910, p. 45, è l' « Assumption H_0 », enunciato sotto la forma: « I tre punti diagonali di un quadrangolo piano completo non sono allineati ».

(4) Rispett. « A. M. Soc. Trans. », vol. 5, p. 350; « Bayer. Ber. », 1934; « Monatsh. Math. Phys. », 45, p. 322.

drangolo sono allineati (1); proprietà notevole, rilevata da VEBLEN, mentre pare sia sfuggita a LIEBMANN (2), e STECK, da me avvertito per lettera, ne fece cenno nell'appendice (Nachtrag) all'ultima sua Nota citata, allora (maggio u. s.) in corso di stampa (3).

La presente Nota, e un'altra che vi farà seguito, portano a tale questione qualche complemento e qualche chiarimento geometrico.

2. *I sistemi di Veblen* $\mathbf{S}(n^2+n+1\,|\,2\,|\,n+1)$ *esistono soltanto per* n *primo o potenza di numero primo* ($n=p^m$; p numero primo, m intero positivo). *Ed è* $p>2$ *oppure* $p=2$, *secondo che i gruppi armonici sono o non sono composti di elementi tutti distinti.* Questo risultato, che emerge dalle ricerche citate di VEBLEN–BUSSEY (4) in base alla rappresentazione analitica dei punti del sistema con coordinate tratte da opportuni campi di razionalità, si può anche stabilire facilmente per via geometrica (5).

Mi riferisco a un sistema $\mathbf{S}(n^2+n+1\,|\,2\,|\,n+1)$ – e scriverò per brevità $\mathbf{S}(n)$ – nel quale ogni serie armonica rientri in sè stessa dopo p elementi, p essendo pertanto numero primo, $\leq n$ e per ora ≥ 3 (i gruppi armonici dunque costituiti da elementi tutti distinti). Ogni serie armonica è definita dall'origine e da due (qualunque) dei suoi elementi.

Siano O un punto qualunque del sistema, a, b due rette per esso; e su queste consideriamo rispettivamente due gruppi di p punti distinti $A_1 A_2 \cdots A_p$, $B_1 B_2 \cdots B_p$ formanti (in quest'ordine) serie armoniche di origine O. Le congiungenti $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ avranno a comune un punto X, dal quale la serie armonica $A_1 A_2 \cdots A_p$ si proietterà ordinatamente nella $B_1 B_2 \cdots B_p$, e pel quale passeranno pertanto anche tutte le congiungenti $A_i B_i$. D'altra parte gli stessi punti $A_1 A_2 \cdots A_p$ formano pure una serie armonica di origine O quando si prendano in un qualsiasi ordine $A_h A_{h+k} A_{h+2k} \cdots$, cogli indici in progressione aritmetica e considerando come identici due qualsiansi indici congrui mod. p; e altrettando dicasi per i punti B. Le p^2 congiungenti $A_i B_{i'}$, tutte evidentemente distinte, sono dunque tali che per l'intersezione di due qualunque fra esse $A_h B_{h'}$, $A_{h+k} B_{h'+k'}$ ne passano altre $p-2$, in tutto dunque p (più la retta che da questo punto proietta O), e su ciascuna di esse risultano così determinati $p+1$ punti (compresi i pri-

(1) Il sistema $\mathbf{S}(21\,|\,2\,|\,5)$ contiene perciò sistemi $\mathbf{S}(7\,|\,2\,|\,3)$, che parzialmente si sovrappongono. Ne contiene in tutto 360, e ogni suo punto appartiene a 120 fra questi.

(2) Loc. cit., p. 8: «Uebrigens ist das Axiom $\mathbf{F}_1$ hier erfüllt...».

(3) «Deutsche Mathem.», vol. 2, pp. 250-51.

(4) «A. M. Soc. Trans.», vol. 7, p. 258. Nessun caso $n=p^m$ con $m>1$ era stato studiato in precedenza (§ 3) per escludere il caso $p=2$ occorre supporre che i punti diagonali di un quadrangolo piano completo non siano allineati.

(5) Il primo caso di impossibilità si ha perciò per $n=6$; cioè non esiste una geometria proiettiva finita nella quale ogni retta contenga 7 punti. Cfr. la nota a pie' di pagina in «A. M. Soc. Trans.», vol. 8, p. 388.

mitivi A, B). Complessivamente, computando anche le rette per O che ne risultano, abbiamo un sistema $\mathbf{S}(p^2+p+1\,|\,2\,|\,p+1)\equiv\mathbf{S}(p)$, contenuto nel dato $\mathbf{S}(n)$.

Supponiamo ora che il sistema dato $\mathbf{S}(n)$, oltre a questo $\mathbf{S}(p)$, contenga altri punti. Poichè le rette di $\mathbf{S}(p)$ passanti per O sono incontrate dalle p^2 congiungenti AB a p per volta nei p loro punti di $\mathbf{S}(p)$ distinti da O, prendiamo sopra una di queste rette, distinte da a, b, uno dei nuovi punti, Y, il quale non starà pertanto su alcuna delle AB. Da esso, la serie armonica $B_1 B_2 \cdots B_p$ sarà proiettata su a in una nuova analoga serie $A'_1 A'_2 \cdots A'_p$ anche di origine O e composta di punti tutti distinti dai punti A. Consideriamo ora sopra a le serie armoniche di origine O e determinate rispettivamente dalle coppie di punti $A_1 A'_1$, $A_2 A'_1$, $\cdots$, $A_p A'_1$; serie evidentemente tutte distinte dalle $A_1 A_2 \cdots A_p$ e $A'_1 A'_2 \cdots A'_p$ (perchè contenenti punti che non appartengono a queste), e fra loro (perchè due di esse non possono coincidere senza coincidere colla $A_1 A_2 \cdots A_p$). Ciascuna di queste serie armoniche comprenderà $p-2$ punti ulteriori, tutti quanti distinti, avendo esse già l'elemento comune A'_1; e complessivamente la retta a, e così ogni altra retta del sistema, verrà a contenere almeno $(p+1)+p+(p-2)p$ ossia p^2+1 punti. I p^2 punti di a e di b distinti da O così ottenuti daranno luogo a p^4 congiungenti che taglieranno le ulteriori rette del fascio O, a p^2 per volta, in p^2 punti distinti. Comprese le rette passanti per O avremo in tutto p^4+p^2+1 retta. E se $n>p^2$ il ragionamento può ripetersi, fino a esaurimento del sistema $\mathbf{S}(n)$. Si vede così che il numero n sarà sempre una potenza di p, c. d. d.

Supponiamo ora invece che sia $p=2$, cioè che il coniugato armonico di un punto rispetto ad altri due allineati con esso coincida sempre con quel primo punto, e siano perciò allineati i 3 punti diagonali di ogni quadrangolo piano completo. Sia O un punto qualunque del sistema; a, b due rette distinte di questo passanti per O, ciascuna delle quali conterrà almeno altri due punti A_1, A_2 rispettivamente B_1, B_2: il quadrangolo $A_1 A_2 B_1 B_2$ avrà un punto diagonale in O e gli altri due C_1, C_2 su una terza retta c passante per O. Se il sistema contiene altri punti, e ogni sua retta perciò più di 3 punti, sia C′ un punto ulteriore di c. Proiettando da esso i punti A_1, A_2 sopra b e i punti B_1, B_2 sopra a, avremo già su ciascuna delle rette a e b almeno $5=2^2+1$ punti distinti, e nel sistema almeno $4^2+4+1=21$. Se il sistema non è ancora esaurito, prenderemo su c un nuovo punto, e proietteremo da esso i 4 punti di a o rispettivamente b distinti da O su b o rispettivamente a. Avremo così sopra ogni retta almeno $9=2^3+1$ punti, e in tutto il sistema almeno $2^6+2^3+1=73$; e così via. In ogni caso il numero totale n dei punti di una retta sarà $=2^m+1$.

In quest'ultimo caso, per costruire entro $\mathbf{S}(n)$ un sistema $\mathbf{S}(7\,|\,2\,|\,3)$ contenente un punto assegnato O, potremo prendere ad arbitrio una coppia

a, b fra le $\binom{n+1}{2}$ coppie di rette passanti per O, e su ciascuna di queste, come vertici del quadrangolo, pure ad arbitrio, una delle $\binom{n}{2}$ coppie di punti distinti da O. Il sistema $\mathbf{S}(7 \mid 2 \mid 3)$ risulterà così individuato; ma potrà ottenersi altresì scambiando la retta dei punti diagonali del detto quadrangolo con una delle due a, b. I sistemi $\mathbf{S}(7 \mid 2 \mid 3)$ contenenti O sono perciò in numero di $\frac{1}{3}\binom{n+1}{2}\binom{n}{2}^2 = \frac{(n+1)\,n^3\,(n-1)^2}{24}$; mentre il numero complessivo dei sistemi $\mathbf{S}(7 \mid 2 \mid 3)$ entro $\mathbf{S}(n)$ è:

$$\frac{(n+1)\cdot n^3 \cdot (n-1)^2}{24} \cdot \frac{n^2+n+1}{7} = \frac{n^3\,(n^3-1)\,(n^2-1)}{7 \cdot 24}.$$

Si osservi che, essendo n potenza di 2, perciò congruo mod. 7 a uno dei numeri $1, 2, 4$, è certo $n^3 \equiv 1$, e perciò $n^3 - 1$ divisibile per 7.

3. Per il sistema $\mathbf{S}(21 \mid 2 \mid 5)$ la distribuzione dei punti fra le varie rette, già indicata nei lavori dianzi citati, può presentarsi (come qui appresso) in forma più concisa e atta a facilitare la ricerca della legge di costruzione per i casi successivi $n = 2^m, m > 2$.

Una prima retta del sistema $\mathbf{S}(21 \mid 2 \mid 5)$ contenga 5 punti, che designiamo rispettivamente con $A_0, A_1, A_2, A_3\, A_4$. Gli ulteriori 16 punti del sistema si potranno ottenere intersecando mutuamente le altre 4 rette uscenti da A_0 e le 4 uscenti da A_1. Indicando sia le une che le altre coi numeri $1, 2, 3, 4$, potremo designare questi ulteriori 16 punti cogli elementi della matrice quadrata:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}$$

intendendo che le orizzontali e le verticali corrispondano rispettivamente alle 4 rette suindicate uscenti da A_0 e da A_1. Le quaderne di punti, fra i 16, appartenenti alle rimanenti rette uscenti da A_2, A_3, A_4 saranno date da quaderne di termini del determinante (1) tali che ogni quaderna contenga complessivamente tutti i 16 elementi, conforme pertanto alle orizzontali dei quadri qui sotto indicati [1]:

(1) Scelto uno qualunque dei termini del determinante (1), p. es. il termine principale, come una prima quaderna di punti allineati con A_2, vi sono precisamente *otto* termini aventi a comune col primo uno e un solo elemento. Questi daranno le 8 rette passanti per A_3 e A_4; e l'intera configurazione risulta allora determinata.

$$A_2 \left\{\begin{matrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 12 & 21 & 34 & 43 \\ 13 & 24 & 31 & 42 \\ 14 & 23 & 32 & 41 \end{matrix}\right. \qquad A_3 \left\{\begin{matrix} 11 & 24 & 32 & 43 \\ 14 & 21 & 33 & 42 \\ 12 & 23 & 31 & 44 \\ 13 & 22 & 34 & 41 \end{matrix}\right. \qquad A_4 \left\{\begin{matrix} 11 & 23 & 34 & 42 \\ 13 & 21 & 32 & 44 \\ 14 & 22 & 31 & 43 \\ 12 & 24 & 33 & 41 \end{matrix}\right. .$$

Dalla prima orizzontale del quadro A_2 (elementi principali del determinante (1)) si ottengono le prime orizzontali di A_3, A_4 tenendo fermo il punto 11, e permutando circolarmente negli altri tre i secondi elementi (2, 3, 4). Entro ciascun quadro, dalla prima orizzontale si ottengono le altre scambiando i secondi elementi, a coppie, nei vari modi (due qualunque, e in pari tempo gli altri due).

Suddivise le 4 rette (1) uscenti ad es. da A_0 in due coppie fisse, p. es. in corrispondenza agli indici 12–34 (prime due, e ultime due orizzontali della matrice (1)), e le 4 uscenti da A_1 (verticali) anche in coppie nei *tre* modi possibili (12–34; 14–23; 13–42), nascono, per ciascuno di questi modi (come intersezioni di due coppie di rette di un fascio con altre due, pure di un fascio), 4 quadrangoli semplici aventi le coppie di rette anzidette come lati opposti; questi quadrangoli hanno pure a due a due le medesime diagonali, che sono nei 3 casi precisamente le rette suindicate uscenti rispettivamente da A_2, A_3, A_4. Per es., se le rette uscenti da A_1 si ripartiscono anch'esse nelle coppie 12–34, abbiamo i 4 quadrangoli risultanti nella matrice (1) dall'intersezione delle due prime e due ultime orizzontali colle prime due e ultime due verticali; e le loro diagonali sono le 4 rette passanti per A_2.