Gino Fano

A proposito di un lavoro del sig. Ramamurti (Sulle rigate razionali normali)

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **71** (1936), p. 105–109

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1936_3>

A proposito di un lavoro del Sig. Ramamurti (Sulle rigate razionali normali).

Nota del Socio Nazionale GINO FANO
presentata nell'adunanza del 7 Dicembre 1935-XIV

Riassunto. — *Prendendo occasione da una Nota del sig. Ramamurti, si fa qualche osservazione sul sistema delle rigate razionali normali R^{n-1} di S_n aventi una curva C^n assegnata come direttrice, e sulle direttrici minime di queste rigate.*

1. - In una nota pubblicata recentemente nei *Mathem. Annalen* (1) un matematico indiano, il Sig. B. RAMAMURTI (Annamalainagar), ha stabilito alcuni teoremi, elementari ma non privi d'interesse, sulle curve e rigate razionali normali. Egli si è valso all'uopo della generazione proiettiva degli enti suddetti, di considerazioni sulle forme apolari, nonchè della consueta rappresentazione delle forme binarie di grado n mediante i gruppi di punti G_n su di una curva razionale normale C^n dello spazio S_n, e mediante i punti di S_n poli, rispetto alla C^n, degli iperpiani che segano tali G_n: rappresentazione che è qui pure presupposta. I risultati da lui ottenuti possono così enunciarsi:

1) Data nello spazio S_n una curva razionale normale $C^n (n \geq 3)$, i punti di questo spazio immagini di forme rispetto alle quali un punto di C^n quale che sia ha un gruppo assegnato G_{n-1} come (primo) polare hanno per luogo una rigata razionale normale R^{n-1} avente C^n per direttrice (2).

(1) Vol. 111 (1935), p. 582.

(2) In forma concisa, questa proprietà può dimostrarsi come segue. I G_{n-1} polari dei singoli punti del sostegno rispetto a una forma bi-

2) Viceversa, ogni rigata R^{n-1} è, rispetto a una qualunque delle ∞^{n+2} curve C^n sue direttrici, luogo di punti che godono della proprietà suindicata.

3) Premesso che ogni R^{n-1} di S_n contiene un sistema lineare ∞^{n-2} di direttrici C^{n-2} razionali normali, seganti sopra ogni C^n direttrice una serie lineare g_{n-1}^{n-2}, il gruppo G_{n-1} considerato nell'enunciato 1° (gruppo definito dalla C^n e dalla R^{n-1} per essa) è il gruppo (unico) apolare rispetto a tutti quelli della detta g_{n-1}^{n-2}, ossia il gruppo dei punti $(n-1)^{\text{pli}}$ di questa serie. Lo stesso G_{n-1} è altresì apolare (ed è ovvio) rispetto a ogni gruppo di $k+1$ punti segato su C^n da una direttrice di R^{n-1} di ordine $k < n-2$.

2. Dal punto di vista geometrico, conviene rilevare espressamente che le rigate razionali normali R^{n-1} di S_n con data C^n direttrice, essendo così messe in corrispondenza biunivoca continua col sistema dei gruppi G_{n-1} di C^n, sono pur esse ∞^{n-1} (3). E val la pena di fermare un momento l'attenzione su questo sistema ∞^{n-1} delle R^{n-1} passanti per una data C^n; generaliz-

---

naria $f=0$ costituiscono un fascio $f_1+kf_2=0$ (dove f_1 e f_2 sono le derivate parziali di f, e k il parametro). Perchè uno di questi G_{n-1} $\left(A_x^{n-1}=0,\right.$ dipendente da $\left.k\right)$ coincida con un gruppo assegnato $a_x^{n-1}=0$, dovranno essere proporzionali i coefficienti:

$$\frac{A_0}{a_0}=\frac{A_1}{a_1}=\ldots\ldots=\frac{A_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

Si hanno così $n-1$ equazioni lineari nei coefficienti di f, cioè nelle coordinate di punto in S_n, e nel parametro k, le quali rappresentano $n-1$ fasci di iperpiani, fra loro proiettivi, generanti la R^{n-1}. I punti di ogni singola generatrice di R^{n-1} sono immagini di gruppi G_n, rispetto ai quali il polo del G_{n-1} assegnato è anche fisso, ed è il punto d'incontro di tale generatrice colla C^n.

(3) Poichè le curve razionali normali C^n di S_n dipendono da $(n-1)(n+3)$ parametri, e ciascuna di esse appartiene come direttrice a ∞^{n-1} rigate R^{n-1}, mentre d'altra parte ogni R^{n-1} contiene ∞^{n+2} direttrici C^n, se ne trae che le R^{n-1} di S_n dipendono da un numero di parametri $=(n-1)(n+3)+(n-1)-(n+2)=n^2+2n-6$.

zazione, dal caso $n = 3$, del sistema ∞^2 delle quadriche di S_3 passanti per una data cubica sghemba (4).

Queste R^{n-1} hanno complessivamente come generatrici tutte le ∞^n rette di S_n appoggiate alla C^n; e viceversa ognuna di queste rette è generatrice di una e una sola di quelle R^{n-1} (5). Tali R^{n-1} riferiscono perciò birazionalmente a due a due le ∞^1 stelle di rette in S_n coi centri nei singoli punti P di C^n; e tale corrispondenza è anzi proiettiva. Basta perciò provare che a rette di una stella P contenute in un fascio corrispondono in ogni altra stella rette anche di un fascio. Consideriamo all'uopo, entro una stella P comunque scelta, il fascio delle rette contenute in un certo piano π; poi le ∞^1 rigate R^{n-1} del sistema aventi rispettivamente queste rette per generatrici (rigate che designeremo con ϱ^{n-1}); infine le ∞^1 curve γ^{n-1} intersezioni di queste rigate con un iperpiano fisso σ non passante per P, curve aventi tutte a comune il gruppo Γ_n delle intersezioni di σ colla data C^n. Dalle rigate ϱ^{n-1} queste γ^{n-1} vengono tutte riferite birazionalmente alla C^n, e quindi proiettivamente fra loro, cogli elementi del gruppo Γ^n come uniti; e due qualsiansi fra esse, chiamiamole γ_1 e γ_2, generano una rigata razionale normale V^{n-2}, di ordine $n-2$, sulla quale tutte le curve del fascio $\gamma_1\gamma_2$ sono in analoga corrispondenza con γ_1, γ_2 e con C^n. Queste ultime curve, riferite alla C^n, generano con essa ∞^1 rigate R^{n-1} aventi tutte la C^n come direttrice e le singole rette del fascio $P(\pi)$ come generatrici; dunque appunto le ϱ^{n-1} (da queste condizioni completamente caratterizzate). E le generatrici delle ϱ^{n-1} uscenti da uno stesso punto qualsiasi di C^n proiettano i punti di una stessa generatrice di V^{n-2}, formano dunque fascio, c. d. d.

Complessivamente, le ∞^1 rigate ϱ^{n-1} hanno per luogo una M_3^{n-2}, ∞^1 razionale normale di piani (i piani dei fasci $P(\pi)$).

(4) Queste quadriche intervengono qui solo in relazione a quei loro sistemi di generatrici che sono unisecanti della cubica.

(5) Per un punto generico M di S_n passano ∞^1 rigate R^{n-1} del sistema considerato, corrispondenti ai gruppi G_{n-1} polari dei singoli punti di C^n rispetto al G_n rappresentato da M.

E il sistema totale ∞^{n-1} delle R^{n-1} aventi la data C^n per direttrice può considerarsi riferito pur esso proiettivamente alle stelle P; può considerarsi cioè come un sistema lineare, chiamando entro di esso *fascio* ogni sistema ∞^1 del tipo delle ϱ^{n-1} (6).

3. Per quanto concerne le direttrici minime delle ∞^{n-1} rigate R^{n-1} con data C^n direttrice, si può aggiungere che, per ogni valore di $k \leqq \frac{n-2}{2}$, ve ne sono fra esse ∞^{2k+1} aventi una direttrice minima di ordine k. Per $k = o$ si hanno gli ∞^1 coni proiettanti la C^n dai singoli suoi punti (7); per $k = 1$ (e $n \geqq 4$) le ∞^3 rigate passanti per C^n e aventi per direttrici rettilinee le ∞^2 corde di C^n (per ogni corda si hanno ∞^1 di queste rigate, disponendosi ancora di una coppia di punti omologhi della C^n e di questa corda); per $k = 2$ (e $n \geqq 6$) le ∞^5 rigate del sistema aventi per direttrici le ∞^5 coniche trisecanti di C^n. Per $k \geqq 3$, gli S_k di S_n, $(k+1)$ – secanti la C^n, dipendono da $k+1$ parametri, e in ciascuno di essi una C^k razionale normale appoggiata alla C^n in questi $k+1$ punti dipende ancora da $2(k-1)$ parametri (potendosene assegnare ad arbitrio 2 altri punti). Di più, perchè dalla C^n e dalla C^k risulti generata una R^{n-1} del nostro sistema, occorre e basta che il detto gruppo di $k+1$ punti risulti costituito, per la corrispondenza fra esse, da punti uniti; e perciò che questo gruppo, pensato sulla C^n e sulla C^k, risulti proiettivo a sè stesso; il che equivale ad altre $k-2$ condizioni semplici. E si ha appunto $(k+1) + 2(k-1) - (k-2) = 2k+1$. — Pertanto, se n è pari, sicchè la R^{n-1} ha generalmente una direttrice minima unica di ordine $\frac{n-2}{2}$, ritroviamo così, per $k = \frac{n-2}{2}$, il sistema complessivo ∞^{n-1} di tutte le R^{n-1}

(6) Per $n = 3$ il detto sistema è appunto una rete, contenente ∞^2 fasci, nel senso usuale.

(7) Questi coni sono perciò compresi nel continuo ∞^{n-1} di rigate R^{n-1} considerato di sopra. Non vi sono comprese invece le ∞^2 rigate le cui generatrici sono corde di C^n congiungenti le coppie di punti di un'involuzione (non degenere) su di questa.

colla data direttrice C^n; mentre per $k = \frac{n-4}{2}, \frac{n-6}{2}, \ldots$ troviamo entro di esso sistemi $\infty^{n-3}, \infty^{n-5}, \ldots$ di R^{n-1} con direttrici minime di ordini decrescenti $(= k)$. Se invece n è dispari, entro il sistema ∞^{n-1} delle R^{n-1} passanti per C^n e aventi generalmente un fascio di direttrici minime di ordine $\frac{n-1}{2}$, ve ne sono $\infty^{n-2}, \infty^{n-4}, \ldots$ con direttrice minima unica e di ordine decrescente $\frac{n-3}{2}, \frac{n-5}{2}, \ldots$

Nel sistema ∞^{n-1} dei gruppi G_{n-1} di C^n, i gruppi cui corrispondono (nel senso precisato) rigate R^{n-1} con direttrice minima di ordine $< \frac{n-2}{2}$ (inferiore cioè al caso generale) sono quei G_{n-1} che ammettono un gruppo apolare costituito da un numero di punti inferiore a $\frac{n}{2}$, vale a dire che possono rappresentarsi come somme di un numero $< \frac{n}{2}$ di potenze $(n-1)^{\text{sime}}$