GINO FANO

# Sulle alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche

*in*: Scritti mat. offerti a L. Berzolari, Istituto Mat. R. Univ., Pavia, 1936, p. 329–349

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1936_2>

# SU ALCUNE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI AVENTI CURVE SEZIONI CANONICHE.

di GINO FANO, a Torino.

1. GENERALITÀ. — Le varietà delle quali intendo occuparmi nel presente lavoro sono varietà $M_3^{2p-2}$ dello spazio $S_{p+1}$ a generi tutti nulli, aventi superficie sezioni $F^{2p-2}$ di $S_p$ regolari di generi uno, e curve sezioni canoniche di genere $p$ (perciò non coni, perchè il cono proiettante una $F^{2p-2}$ di $S_p$ di generi uno ha genere geometrico nullo, ma genere aritmetico — 1 [1], quindi irregolarità tridimensionale 1). Coi simboli $M_3^{2p-2}$, $F^{2p-2}$ indicheremo sempre (anche qualora $p$ assuma particolari valori numerici) varietà dei tipi e spazi testè precisati. Per $p=3$, $p=4$ si hanno varietà $M_3^4$ di $S_4$ e $M_3^6$ di $S_5$ (quest' ultima intersezione di una forma quadratica e di una forma cubica) che, nel caso più generale, non sono razionali [2]. Per i primi valori successivi di $p$ si hanno ancora $M_3^{2p-2}$ di dubbia razionalità (se del tipo più generale), di alcune delle quali ho dato qualche cenno in una comunicazione al Congresso internazionale di Bologna (1928) [3]. Qui mi propongo di studiarle più particolarmente. Mentre superficie $F^{2p-2}$ di $S_p$ di generi uno esistono per ogni valore intero di $p \geq 3$, e ne esistono anzi tipi tutti birazionalmente distinti [4], da un altro mio lavoro di prossima pubblicazione risulterà invece che le dette $M_3^{2p-2}$ (esclusi sempre i coni proiettanti $F^{2p-2}$ di generi uno) esistono solo per $p$ inferiore a un certo limite; e quelle tuttora di dubbia razionalità sono in numero molto limitato [4 bis].

Queste $M_3^{2p-2}$ contengono, almeno per i primi valori di $p$, un sistema $\infty^1$ di rette, cioè una rigata, algebrica e eventualmente riducibile. Per le varietà più generali dei casi $p=3$, 4, 5, perciò degli ordini 4, 6, 8, queste rigate sono rispett. degli ordini 320, 180, 128 [5] e intersezioni complete delle varietà stesse con forme di ordini rispett. 80, 30, 16; ogni generatrice

(1) SEVERI, Rend. di Palermo, vol. 28 (1909), n.° 19, 28.

(2) V. due mie note negli atti della R. Accad. di Torino, vol. 43 (1907-08), p. 973; vol. 50 (1914-15), p. 1067.

(3) Atti del detto Congresso, vol. IV, p. 115.

(4) ENRIQUES, Rend. R. Accad. Bologna, sed. 13 dic. 1908; SEVERI, Atti R. Ist. Veneto, vol. 68, parte II (1908-09), p. 249.

(4 bis) Una mia Nota preliminare su quest'argomento ulteriore è stata presentata alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 5 giugno 1936, ed è in corso di stampa in quei Rendiconti (ser. 6a, vol. 23, 1° sem. 1936).

(5) MARLETTA, *Sulla varietà delle rette....*, Atti Accad. Gioenia in Catania, ser. 4ª, vol. 16 (1902).

della detta rigata ne incontra rispett. 81, 31, 17 altre (cioè la rigata ha una curva doppia incontrante ogni generatrice in questo numero di punti).

Più generalmente, *se una* $M_3^{2p-2}$ *contiene una rigata sua intersezione completa con una forma* $V_p^k$ *di* $S_{p+1}$, *tale rigata ha una curva doppia incontrante ogni generatrice in* $k+1$ *punti.*

Invero, se per una retta $r$ della $M_3^{2p-2}$ conduciamo una sezione iperpiana generica $F^{2p-2}$, alla retta $r$ come linea (razionale, isolata) tracciata su tale $F^{2p-2}$ spetta il grado $-2$, e perciò un $S_{p-1}$ condotto per $r$ entro lo spazio $S_p$ di $F^{2p-2}$ incontra ulteriormente questa superficie, nonchè la $M_3^{2p-2}$, secondo una curva $C_{p-2}^{2p-3}$ avente 3 punti comuni con $r$. Più generalmente, segando $F^{2p-2}$ con una $V_{p-1}^k$ del suo spazio passante per $r$, ovverosia la $M_3^{2p-2}$ con una $V_p^k$ di $S_{p+1}$ pure passante per $r$, la curva $C$ intersezione residua con $F^{2p-2}$ incontrerà $r$ in $k+2$ punti. Se la superficie $M_3^{2p-2}$. $V_p^k$ è una rigata $R$, la curva $C$ ne è una direttrice, e perciò $k+1$ dei punti anzidetti, cioè tutti meno uno, saranno doppi per $R$ (6), c. d. d.

Se $R$ è intersezione soltanto parziale di $M_3^{2p-2}$ e $V_p^k$, e l'intersezione residua incontra $r$, ossia le generatrici di $R$, in $h$ punti, la curva doppia di $R$ ne incontrerà le generatrici in $k-h+1$ punti. Il risultato non è però valido se $R$ è parte multipla dell' intersezione (7).

**2.** VARIETÀ $M_3^{2p-2}$ CON FASCIO DI $\varphi^3$. — Supponiamo che una $F^{2p-2}$ di $S_p$ $(p>4)$ abbia una sezione iperpiana, curva canonica di genere $p$, contenente una serie lineare $g_3^1$ (certo unica). I gruppi di questa serie saranno allineati, e staranno sulle generatrici di una rigata razionale normale $R^{p-2}$ (non cono). Allora anche ogni altra sezione iperpiana di $F^{2p-2}$ condotta per una di queste trisecanti conterrà 3 punti allineati, quindi una $g_3^1$; e avremo in tutto già $\infty^{p-1}$ sezioni così fatte, e $\infty^3$ trisecanti di $F^{2p-2}$ ($\infty^1$ per ogni punto; e non più, se no ogni corda di $F^{2p-2}$ sarebbe trisecante). Se ne trae che ogni iperpiano conterrà $\infty^1$ di queste trisecanti, e perciò ogni sezione iperpiana di $F^{2p-2}$ conterrà una serie $g_3^1$. Le $\infty^1$ trisecanti passanti per un punto di $F^{2p-2}$ formano fascio (dovendo un iperpiano generico per questo punto contenerne una sola); e il piano di questo fascio incontrerà $F^{2p-2}$ secondo una curva di $3^0$ ordine (generalmente ellittica), sicchè ogni retta di questo piano è anche una trisecante di $F^{2p-2}$. Complessivamente, le $\infty^3$ trisecanti di $F^{2p-2}$ stanno nei piani di

(6) È l'estensione al caso presente della nota proprietà, che una rigata algebrica di ordine $n>2$ in $S_3$ ha una linea doppia incontrante ogni generatrice in $n-2$ punti (computando opportunamente lo spigolo di regresso, se la rigata è sviluppabile).

(7) P. es. il sistema lineare delle $F^4$ di $S_3$ passanti per una quartica sghemba razionale $\gamma^4$ rappresenta, nel solito senso, una $M_3^{30}$ di $S_{17}$, contenente una rigata $R^{18}$, immagine di $\gamma^4$, e una rigata $R^6$, immagine della quadrica passante per $\gamma^4$ e le cui generatrici corrispondono alle trisecanti di $\gamma^4$. La $R^{18}$ e la $R^6$ *contata 2 volte* formano insieme una sezione iperpiana di $M_3^{30}$ (sicchè $k=1$). Così si spiega come ogni generatrice di $R^6$ ne incontri tre di $R^{18}$ (più che $k+1$); mentre ogni generatrice di $R^{18}$ ne incontra una di $R^6$, cioè appunto $k+1=2$ di $R^6$ doppia. - Anche in seguito indicheremo con $\gamma_p^n$, oppure $C_p^n$ una curva di ordine $n$ e genere $p$, e con $R^n$ una rigata di ordine $n$.

una $V_3^{p-2}$, $\infty^1$ razionale normale di piani, piani tutti incontranti la $F^{2p-2}$ secondo cubiche; le rigate $R^{p-2}$ dianzi considerate sono sezioni di questa $V_3^{2p-2}$.

Analogamente, se una $M_3^{2p-2}$ di $S_{p+1}$ ha una curva sezione contenente una $g_3^1$, le $F^{2p-2}$ sue sezioni iperpiane passanti per questa curva avranno tutte le curve sezioni con serie $g_3^1$; pertanto la $M_3^{2p-2}$ avrà pur essa tutte le sue curve sezioni con serie $g_3^1$, e le $F^{2p-2}$ sezioni iperpiane del tipo precedente. Le trisecanti di $M_3^{2p-2}$ passanti per un suo punto saranno tali che un $S_p$ o $S_{p-1}$ generico per questo punto ne contiene rispett. $\infty^1$, formanti fascio, oppure una sola. Esse stanno perciò in un $S_3$, incontrante $M_3^{2p-2}$ secondo una superficie cubica $\varphi^3$; e la $M_3^{2p-2}$ conterrà un fascio di $\varphi^3$, negli spazi $S_3$ di una $V_4^{p-2}$, $\infty^1$ razionale normale di $S_3$ in $S_{p+1}$. Le quadriche passanti per $M_3^{2p-2}$ conterranno tutte anche questa $V_4^{p-2}$.

Similmente ancora, se sulla $F^{2p-2}$ o $M_3^{2p-2}$ $(p>6)$ una curva canonica sezione contiene una serie lineare $\infty^1$ di ordine $k \geq 4$, ma $< \frac{p+2}{2}$ (non contenuta pertanto in una curva canonica generale di genere $p$), serie i cui gruppi staranno in spazi $S_{k-2}$, si estende la prima parte del ragionamento, cioè tutte le curve sezioni della $F^{2p-2}$ o $M_3^{2p-2}$ contengono del pari una serie lineare dello stesso ordine; ma non la seconda parte, cioè la $F^{2p-2}$ o $M_3^{2p-2}$ non contiene di conseguenza un fascio di linee o superficie di ordine $k$, determinanti sulle curve sezioni gli $\infty^1$ gruppi della $g_k^1$ (vedasi per $k=4$, $p=7$ la $M_3^{12}$ di cui al n.° 12). In altri termini, se le curve sezioni di una $F^{2p-2}$ o $M_3^{2p-2}$ contengono tutte una $g_3^1$, i punti di queste varietà che con un dato punto $P$ e sulle infinite sezioni passanti per $P$ formano gruppi delle $g_3^1$ hanno per luogo su $F^{2p-2}$ una curva, e su $M_3^{2p-2}$ una snperficie; mentre per una $g_k^1$ ove $k>3$ questi stessi punti possono invadere l'intera superficie o varietà.

Per ogni valore di $p>4$ bisognerà dunque distinguere le $M_3^{2p-2}$ a curve sezioni non contenenti serie $g_3^1$ da quelle le cui curve sezioni contengono invece una tal serie. Queste ultime contengono a loro volta un fascio di superficie cubiche $\varphi^3$, come dianzi indicato.

3. VARIETÀ GENERALE $M_3^8$ DI $S_6$. — Per $p=5$, la $M_3^{2p-2}$ è una $M_3^8$ di $S_6$, contenuta in $\infty^2$ quadriche; e anzi se, come ora supponiamo, le sue curve sezioni non contengono serie $g_3^1$, è questa la varietà base di una rete generica di quadriche in $S_6$. Questa $M_3^8$ generale contiene soltanto superficie sue intersezioni complete con forme di $S_6$ (8); in particolare le $\infty^1$ rette giacenti su di essa formano (n.° 1) una rigata di ordine 128, intersezione con una forma di ordine 16, avente una curva doppia che incontra ogni generatrice in 17 punti.

Questa $M_3^8$ è tuttora di dubbia razionalità. Essa contiene $\infty^2$ coniche, da ognuna delle quali si proietta in un $S_3$ doppio con superficie di diramazione del 6° ordine.

---

(8) FANO, *Sulle varietà algebriche ....*, Atti R. Accad. di Torino, vol. 44 (1908-09), p. 633.

Da una sua retta $r$ la $M_3^8$ si proietta in una $M_3^4$ di $S_4$ (dello stesso tipo $M_3^{2p-2}$ di $S_{p+1}$, per $p=3$), contenente una rigata cubica normale $R^3$ immagine della retta $r$ ([9]), e su di essa 17 punti doppi, immagini delle rette di $M_3^8$ incidenti a $r$. Viceversa, la più generale forma di 4° ordine dello spazio $S_4$ passante per una rigata $R^3$ ha appunto 17 punti doppi in altrettanti punti (semplici) di $R^3$ ([10]), ed è proiezione di una $M_3^8$ di $S_6$ da una sua retta; questa $M_3^8$ rappresenta il sistema lineare di superficie di $M_3^4$ somma delle sezioni iperpiane e di $R^3$. Le $\infty^2$ quadriche di $S_4$ passanti per $R^3$ (tutte coni quadrici) incontrano ulteriormente $M_3^4$ secondo una rete di superficie di 5° ordine $\Phi^5$, a sezioni di genere 2. Queste segano $R^3$ secondo curve canoniche $C_5^8$ (contenenti una $g_3^1$), che passano tutte pei 17 punti doppi di $M_3^4$, e hanno 4 intersezioni variabili. Inoltre le $\Phi^5$ si incontrano a due a due secondo coniche $\delta$, contenute nei piani stessi delle $\infty^2$ coniche di $R^3$, e costituenti su $M_3^4$ una congruenza razionale del 1° ordine con $R^3$ come superficie razionale 4-secante. Facendo corrispondere a ogni punto di $M_3^4$ le 4 rette che lo proiettano dalle intersezioni di $R^3$ colla conica $\delta$ passante pel punto stesso, veniamo a rappresentare birazionalmente questa $M_3^4$, quindi anche la $M_3^8$ di $S_6$, sopra un' involuzione $I_4$ nel sistema $\infty^3$ di queste rette ([11]), sistema razionale perchè composto di $\infty^2$ fasci coi centri biunivocamente nei punti di $R^3$. La $M_3^8$ risulta così rappresentata sopra una $I_4$ di $S_3$ (presumibilmente non razionale).

4. VARIETÀ $M_3^8$ CON UN PIANO. — Se la $M_3^8$ di $S_6$ (sempre base di una rete di quadriche) contiene un piano $\pi$, gli $\infty^3$ iperpiani passanti per $\pi$ la segano ulteriormente secondo superficie $\Phi^7$, a sezioni di genere 3, che a loro volta incontrano $\pi$ secondo cubiche con 6 punti comuni $A_i$, doppi per $M_3^8$. Le $\Phi^7$ formano un sistema $\infty^3$ omaloidico, e la $M_3^8$ è perciò in questo caso razionale. Anzi, proiettandola dal piano $\pi$, se ne ha senz' altro la rappresentazione sullo spazio $S_3$, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondono superficie di 4° ordine $F^4$ con intersezioni variabili $\gamma_5^7$, e aventi perciò a comune una $C_9^9$. Quest'ultima è contenuta in una superficie cubica $\varphi^3$, immagine del piano $\pi$.

Le rette contenute in questa $M_3^8$, all' infuori delle $\infty^2$ contenute in $\pi$, si distribuiscono in due rigate:

Una $R^{20}$, avente per immagine in $S_3$ la curva $C_9^9$;

Una $R^{103}$, immagine della rigata delle trisecanti di $C_9^9$ ([12]).

---

([9]) Le generatrici di $R^3$ sono immagini dei singoli punti di $r$, cioè tracce degli $S_3$ ivi tangenti a $M_3^8$. L' ordine di $R^3$ risulta dal fatto che $r$ è incontrata in 3 punti dalle curve intersezioni ulteriori di $M_3^8$ con spazi $S_4$ passanti per $r$.

([10]) SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche...*, Mem. Acc. di Torino (2), vol. 52 (1902), p. 61.

([11]) ENRIQUES, Annali di Matem. (3), vol. 20 (1913), p. 109.

([12]) La curva base $C_9^9$ del sistema lineare $[F^4]$ incontra le $\gamma_5^7$ intersezioni variabili dalle $F^4$ in 20 punti; ad essa corrisponde perciò sulle $M_3^8$ una $R^{20}$. La rigata delle trisecanti di $C_9^9$ è di ordine 49, e ha la detta curva come multipla di ordine 12; le sue intersezioni variabili colla $\gamma_5^7$, fuori della linea multipla, sono perciò in numero di $49.7 - 12.20 = 103$.

Le generatrici di $R^{20}$ sono incidenti al piano $\pi$ nei punti di una direttrice di ordine 11 coi punti $A_i$ come $4^{pli}$. Quelle di $R^{103}$ non sono generalmente incidenti a $\pi$; appartengono però a $R^{103}$ le generatrici di $R^{20}$ che escono dai punti $A_i$, nonchè le 15 rette di $\pi$ congiungenti i punti $A_i$ a due a due (immagini di trisecanti di $C_9^9$).

Nel sistema complessivo delle rette contenute nella $M_3^8$ — e che per la $M_3^8$ generale è una rigata di ordine 128 — il piano $\pi$ sostituisce, per così dire, una parte di ordine 5. È anche d'accordo con questo il fatto che ogni generatrice di $R^{103}$ ne incontra 3 di $R^{20}$ e 14 altre della stessa $R^{103}$ ([13]), complessivamente dunque 17 altre; mentre una generatrice di $R^{20}$, incidente a $\pi$, non ne incontra altre della stessa $R^{20}$, bensì però $12 = 17 - 5$ di $R^{103}$.

Fra le sezioni iperpiane $F^8$ e le altre superficie considerate entro $M_3^8$ intercedono le relazioni di equivalenza:

$$R^{20} \equiv 3F^8 - 4\pi \qquad R^{103} \equiv 13F^8 - \pi .$$

5. VARIETÀ $M_3^8$ CON RIGATA $R^3$. VARIETÀ $M_3^{12}$ RAZIONALE DI $S_8$. — Supponiamo ora che la $M_3^8$ di $S_6$ (sempre base di una rete di quadriche) contenga una rigata cubica normale $R^3$ (di $S_4$), e quindi, come intersezioni ulteriori cogli $\infty^1$ iperpiani passanti per questo $S_4$, un fascio di superficie $\varphi^5$ normali a sezioni ellittiche. Una $M_3^8$ così fatta può ottenersi come base di una rete generica di quadriche di $S_6$ passanti per una $R^3$ di $S_4$, ovvero per una $\varphi^5$ di $S_5$ ([14]). Queste $\varphi^5$ incontrano $R^3$ secondo un fascio di $C_1^5$, con 8 punti comuni, doppi per $M_3^8$. *La* $M_3^8$, *contenendo un fascio di* $\varphi^5$ (irriducibili), *è razionale* ([15]). Essa è inoltre proiezione di una $M_3^{12}$ di $S_8$, a curve sezioni canoniche di genere 7, rappresentante il sistema lineare su $M_3^8$ somma delle sezioni iperpiane e della $R^3$ (proiezione da una retta di $M_3^{12}$, della quale retta $R^3$ è immagine). Poichè sulla $M_3^8$ ogni superficie è del tipo $mR^3 + n\varphi^5$ ($m$, $n$, interi) ([16]), la detta $M_3^{12}$ conterrà soltanto superficie sue intersezioni complete con forme di $S_8$.

Oltre alla rigata $R^3$, la $M_3^8$ conterrà:

una rigata $\Sigma^p$, proiezione della rigata contenuta nella $M_3^{12}$ di $S_8$, e composta di rette non incontranti generalmente $R^3$, bensì direttrici del fascio di $\varphi^5$;

una rigata $T^q$, luogo delle rette contenute nelle $\varphi^5$, perciò appoggiate a $R^3$ e proiezioni di coniche incidenti alla retta di $M_3^{12}$ asse di proiezione.

---

([13]) Nella rigata, di ordine 49, delle trisecanti di $C_9^9$ ogni generatrice si appoggia a 47 altre; tolte le $11.3 = 33$ che passano per i punti di incontro di tale generatrice con $C_9^9$, ne rimangono 14 che incontrano la prima fuori delle $C_9^9$.

([14]) Per una $\varphi^5$ passa anzi, nel suo spazio $S_5$, un sistema lineare $\infty^4$ di quadriche, contenente $\infty^6$ reti, le cui superficie basi ulteriori sono appunto $\infty^6$ rigate $R^3$ generate dalle $g_2^1$ sulle $\infty^5$ sezioni iperpiane di $\varphi^5$. Si tratta di prendere in $S_6$ una rete di quadriche che abbia come sezione una delle precedenti.

([15]) ENRIQUES, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere...*, Math. Annalen, vol. 49 (1896), p. 1 (in part. p. 12).

([16]) Ciò perchè sulla $F^8$ di $S_5$ di generi uno, sezione generica di $M_3^8$, la $C_1^5$ e la $C_0^3$ sezioni di $\varphi^5$ e di $R^3$ costituiscono una base minima.

Gli 8 punti doppi di $M_3^8$ (appartenenti a $R^3$) sono immagini delle rette di $M_3^{12}$ appoggiate all' asse di proiezione. Perciò *la rigata totale contenuta in* $\mathrm{M}_3^{12}$ *sarà* (cfr. n. 1) *di ordine* $12 \times (8-1)=84$, e la rigata $\Sigma^p$ sua proiezione da una generatrice sarà di ordine $p=74$. (La proiezione da un primo punto $P$ di questa generatrice riduce l'ordine di un' unità; di più, per la traccia di questa generatrice passano 9 generatrici della rigata così ottenuta; una immagine di $P$, le altre proiezioni delle 8 sopraindicate). Dovendo pertanto essere $3+74+q=128$, segue $q=51$.

A ognuna delle 8 rette di $M_3^{12}$ appoggiate all' asse di proiezione si appoggeranno, oltre quest' asse, 7 altre generatrici; e perciò da ciascuno degli 8 punti doppi di $M_3^8$ esciranno su questa 7 rette, generatrici comuni di $\Sigma^{74}$ e di $T^{51}$. Ciò è confermato dal fatto che lo spazio $S_4$ del cono quadrico tangente a $M_3^8$ in uno dei punti doppi deve incontrare $M_3^8$ in *otto* rette; le 7 precedenti, e la generatrice di $R^3$ passante per questo punto.

Infine la rigata $T^{51}$, avendo su ogni $\varphi^5$ *dieci* generatrici, incontrerà $R^3$ secondo una linea di ordine 41, che ha 10 punti comuni con ciascuna delle $C_1^5$ tracce delle $\varphi^5$, e ha 8 punti $7^{pli}$ nei punti doppi di $M_3^8$. Dalla rappresentazione piana di $R^3$ si deduce facilmente che questa linea di ordine 41 incontra le generatrici e la direttrice rettilinea di $R^3$ rispett. in 16 e in 9 punti ([17]).

Vediamo così confermato che una retta contenuta in $M_3^8$ ne incontra generalmente altre 17, e precisamente:

Ogni generatrice di $R^3$ incontra la direttrice rettilinea di $R^3$ stessa e 16 generatrici di $T$ (nessuna di $\Sigma$);

Una generatrice generica di $\Sigma$ ne incontra 8 di $\Sigma$ stessa (come su $M_3^{12}$), 9 di $T$ (la direttrice rettilinea di $R^3$ è generatrice di $\Sigma$), nessuna di $R^3$;

Una generatrice generica di $T$ ne incontra una di $R^3$, 3 di $T$ stessa (perchè ogni retta di una $\varphi^5$ ne incontra appunto altre 3), e 13 di $\Sigma$ (essa è infatti proiezione di una conica di $M_3^{12}$ appoggiata all'asse di proiezione, e che perciò incontra in altri 13 punti la forma di ordine 7 che sega la rigata $R^{84}$ di $M_3^{12}$).

**6**. La rappresentazione della detta $M_3^8$, che è razionale, sullo spazio

---

([17]) Rappresentata $R^3$ col sistema $\infty^4$ delle coniche passanti per un punto $A$, alle $C_1^5$ tracce delle $\varphi^5$ corrisponde il fascio di cubiche avente come punti base $A$ stesso e gli 8 punti $(B_i)$ immagini di quelli che sono doppi per $M_3^8$. Se supponiamo che la curva di ordine 41, traccia della rigata $T$, incontri le generatrici di $R^3$ in $x$ punti, perciò la direttrice in $41-2x$, l'immagine piana di questa curva avrà ordine $41-x$ e multiplicità $41-2x$ nel punto $A$. Il computo delle intersezioni di questa curva colle cubiche suindicate ($41-2x$ assorbite dal punto $A$, 7 da ciascuno dei punti $B_i$, e 10 altre) dà la relazione:

$$3(41-x)=(41-2x)+7.8+10$$

da cui $x=16$.

$S_3$ non conduce, per quanto finora mi è risultato, a sistemi lineari rappresentativi semplici ([18]).

Ne espongo qui una, che prende le mosse, sostanzialmente, dal procedimento generale di ENRIQUES (l. c.) per le $M_3$ contenenti un fascio di $\varphi^5$, e lo sviluppa ulteriormente.

Proiettiamo di nuovo la $M_3^8$ (come al n. 3) da una sua retta, e precisamente da una generatrice $g$ di $R^3$. Avremo una $M_3^4$ di $S_4$ (del solito tipo, $p=3$) contenente:

*a*) un piano $\pi$, proiezione di $R^3$, e su questo 9 punti doppi, dei quali 8 ($X_1, \ldots, X_8$) proiezioni di quelli di $M_3^8$, e uno ($P$) immagine della direttrice rettilinea di $R^3$. Le generatrici di $R^3$ hanno per immagini le rette del fascio $P(\pi)$; una determinata fra queste, $g_0$, è immagine di $g$ (traccia dell'$S_3$ che congiunge $g$ alla generatrice consecutiva).

*b*) un fascio di superficie cubiche $\varphi^3$, proiezioni delle $\varphi^5$, contenute negli $S_3$ passanti per $\pi$, e incontranti $\pi$ secondo le cubiche pei 9 punti $X_i$ e $P$. Su ogni $\varphi^5$ è razionalmente nota la coppia di punti $M, M'$ ch'essa ha comune con $g$, e quindi su ogni $\varphi^3$ la coppia di rette sghembe $m, m'$ immagini di questi punti.

*c*) una nuova rigata cubica $\varrho^3$ immagine di $g$, avente $g_0$ per direttrice, e luogo delle coppie di rette $m, m'$; coppie segate su $\varrho^3$ dagli $S_3$ del fascio $\pi$. La $M_3^4$ ha su $\varrho^3$ (come al n.° 3) 17 punti doppi, uno dei quali è $P$; indicheremo con $Y_1, \ldots, Y_{16}$, gli altri (immagini delle generatrici di $T$ appoggiate a $g$).

*d*) pure come al n.° 3, una rete di $\Phi^5$ segate dai coni quadrici che passano per $\varrho^3$, e incontrantisi a due a due secondo coniche $\delta$ di una congruenza del 1° ordine, contenute nei piani stessi delle coniche di $\varrho^3$. Ciascuno di questi coni quadrici, contenendo la retta $g_0$, incontra $\pi$ secondo una retta ulteriore, direttrice del fascio di coniche $\delta$ contenuto nella corrispondente $\Phi^5$; le $\delta$ hanno dunque $\pi$, e quindi anche le $\varphi^3$, come superficie unisecanti. E le $\Phi^5$ incontrano le $\varphi^3$ secondo curve $\gamma_0^4$ passanti per $P$ e aventi le $m, m'$ come trisecanti.

Rappresentiamo ora le singole $\varphi^3$ sulle congruenze lineari di rette dei loro spazi di direttrici $m, m'$; e così l' intera $M_3^4$, quindi la data $M_3^8$, sulla

---

([18]) Per la $M_3^8$ più generale contenente una $R^3$ la rappresentazione non può darsi con un sistema lineare di $F^4$. Invero sulla $F^8$ sezione generica di tale $M_3^8$ una base minima è costituita da una $C_1^5$ e da una $C_0^3$ aventi 5 punti comuni; sicchè la forma quadratica fondamentale (SEVERI, Rend. Palermo, vol. 30 (1910), p. 265) è $0m^2+10mn-2n^2$. Affinchè la $F^8$ sia riferibile a una $F^4$, occorre rendere questa forma quadratica $=4$, cioè $n(5m-n)=2$, il che non è possibile per $m, n$ interi. Il sistema lineare delle $F^4$ passanti per una $\gamma_3^7$ e per una sua trisecante $r$ non contenuta nell'unica superficie cubica $\varphi^3$ che contiene $\gamma_3^7$ (complessivamente dunque con $\gamma_5^8$ base) rappresenta tuttavia una $M_3^8$ contenente *due* diverse $R^3$, immagini rispett. di $\varphi^3$ e della retta $r$; mentre ai due fasci di $\varphi^5$ corrispondono il fascio di piani di asse $r$ e il fascio di $F^4$ con $r$ doppia e passanti per $\gamma_3^7$ (nonchè, di conseguenza, per le cinque trisecanti di $\gamma_3^7$ appoggiate a $r$). Questa $M_3^8$ contiene pertanto due diverse rigate $\Sigma^{74}$ e due $T^{51}$; le prime hanno come parte comune la $R^{50}$ immagine della rigata di trisecanti di $\gamma_3^7$, le seconde la $R^{30}$ immagine del sistema delle corde di $\gamma_3^7$ appoggiate a $r$. Le due $T^{51}$ sono integrate da due $R^{21}$, immagini risp. della curva $\gamma_3^7$ e del sistema delle coniche appoggiate a $r$ e 6-secanti la curva $\gamma_3^7$. Le due $\Sigma^{74}$ sono integrate risp. da queste stesse $R^{21}$ scambiate, e dalla seconda e prima $R^3$.

totatità $\Gamma$ di queste $\infty^3$ rette, composta delle corde di $\varrho^3$ appoggiate al piano $\pi$, ossia delle trisecanti della superficie riducibile $(\varrho^3 + \pi)$, del $4^0$ ordine, a sezioni razionali. Il sistema $\Gamma$ è dunque la varietà base di una (particolare) rete di complessi lineari di $S_4$ ([19]), e nella Grassmanniana delle rette di $S_4$ esso costituisce una (particolare) $V_3^5$ di $S_6$ a curve sezioni ellittiche ([20]), contenente $\infty^1$ quadriche, immagini delle $\varphi^3$, con un punto comune $G$, immagine di $g_0$ e doppio per $V_3^5$. Questa $V_3^5$ è intersezione di una $V_4^3$, $\infty^1$ razionale normale di spazi $S_3$ e altresì $S_0$-cono di vertice $G$, con una quadrica di $S_6$ passante per uno (qualunque) dei detti $S_3$. Alle $\infty^2$ coniche $\delta$ corrispondono in $\Gamma$ fasci di rette, corde di $\varrho^3$, prospettivi a queste coniche, coi centri nei punti comuni a $\pi$ e alle singole $\delta$; quindi in $V_3^5$ rette, direttrici del fascio di quadriche; e alle $\infty^2$ superficie $\Phi^5$, pure in $V_3^5$, rigate cubiche passanti per $G$ e aventi per generatrici $\infty^1$ rette fra queste ultime $\infty^2$ ([21]). La particolarità di questa $V_3^5$ rispetto alla più generale $V_3^5$ di $S_6$ a curve sezioni ellittiche (ENRIQUES, SCORZA, l. c.) consiste appunto nel contenere un fascio di quadriche e una rete di rigate cubiche. Nel sistema rappresentativo su $S_3$, costituito dalle superficie cubiche passanti per una $\gamma_0^4$, questa $\gamma_0^4$ si spezza in una cubica e una retta aventi un punto comune; alle quadriche e alle rigate cubiche di $V_3^5$ corrispondono rispett. i piani per questa retta e le quadriche per quella cubica ([22]).

Al piano $\pi$ corrisponde in $\Gamma$ il sistema $\infty^2$ di rette $(\varDelta)$ composto di quelle rette di $\Gamma$ che sono tangenti alla $M_3^4$ nei singoli punti di $\pi$; una per ciascuno (generico) di questi punti. Luogo di queste $\infty^2$ rette è una forma $a_3$, che contiene semplicemente $\pi$, e da ogni $S_3$ passante per $\pi$ è incontrata ulteriormente in una rigata $R^4$, determinata dalle due direttrici (doppie) $m, m'$ contenute nella $\varphi^3$ che sta in questo $S_3$ e dalla cubica intersezione di questa stessa $\varphi^3$ con $\pi$. La forma $a_3$ è perciò del $5^0$ ordine; e la sua intersezione con $M_3^4$ si compone del piano $\pi$ e della rigata $\varrho^3$ contati entrambi due volte (lungo il primo le due forme sono tangenti, la seconda è doppia per $a_3^5$), più una rigata residua $\varLambda^{12}$, luogo delle rette di $\Gamma$ contenute in $M_3^4$. Ogni generatrice di $\varLambda^{12}$, essendo corda di $\varrho^3$, perciò contenuta nel piano di una conica di $\varrho^3$ e quindi di una $\delta$, è essa stessa parte di questa $\delta$: *la rigata $\varLambda^{12}$ si compone dunque di quelle rette,*

---

([19]) CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria della retta dello spazio a quattro dimensioni*, Atti R. Ist. Veneto (7), vol. II (1891), p. 855; v. in particolare n. 9.

([20]) Studiata da ENRIQUES, Math. Annalen 46 (1895), p. 179; SCORZA, Annali di Matem. (3), vol. 15 (1908), p. 217.

([21]) Per quella particolare $\Phi^5$ che è contenuta nell' $S_1$-cono quadrico proiettante $\varrho^3$ dalla retta $g_0$, questa rigata cubica è un cono di vertice $G$. Al punto doppio $P$ di $M_3^4$ corrisponde in $\Gamma$ la retta $g_0$, in $V_3^5$ il punto $G$; ai punti $X_i$, risp. fasci di retta, e rette direttrici di $V_3^5$; ai punti $Y_i$, anche fasci di rette, e rette generatrici di quadriche di $V_3^5$.

([22]) E il sistema $\infty^2$, del $3^0$ ordine, delle rette contenute in $V_3^5$, le quali hanno per immagini le corde di $\gamma_0^4$, si spezza in due, risp. di $1^0$ ordine (direttrici del fascio di quadriche, aventi per immagini corde della cubica in $S_3$) e di $2^0$ ordine (generatrici delle quadriche, corrispondenti alle rette di $S_3$ che si appoggiano alla retta e alla cubica basi).

*parti di coniche $\delta$ riducibili, che si appoggiano al piano $\pi$* [23]. In ogni $S_3$ del fascio $\pi$ essa ha cinque generatrici $k_i$ (le rette della $\varphi^3$ ivi contenuta appoggiate alle $m$, $m'$); ha perciò in $\pi$ una direttrice di ordine 7 cogli 8 punti $X_i$ come doppi (ogni $X_i$ appartiene a un fascio di $\Phi^5$, per le quali tutte esso è doppio, e la cui $\delta$ base si spezza in due rette passanti entrambe per questo punto) [24]. La rigata $\Lambda^{12}$ è perciò di genere 7, e la sua immagine in $V_3^5$ è una curva canonica $\gamma_7^{12}$, incontrante le $\infty^1$ quadriche di $V_3^5$ in 5 punti, le $\infty^2$ rigate cubiche in 7 punti; e avente come corde le rette immagini degli 8 punti $X_i$.

Alla rigata $\varrho^3$ corrisponde invece entro $\Gamma$ il sistema $\infty^2$ $(\Delta_0)$ di quelle rette di $\Gamma$ che sono tangenti a $M_3^4$ in punti di $\varrho^3$ stessa. Luogo di esse è una forma $\beta_3$ avente il piano $\pi$ come quadruplo [25] e incontrata ulteriormente da ogni $S_3$ del fascio $\pi$ secondo una coppia di rigate cubiche di direttrici $m$, $m'$ colle 5 rette $k_i$ contenute in questo spazio come generatrici comuni [26]. La forma $\beta_3$ è perciò di ordine 10; e la sua intersezione con $M_3^4$, quando ne siano tolti il piano $\pi$ e la rigata $\varrho^3$ contati entrambi 4 volte [27], non può comporsi che della rigata $\Lambda^{12}$ da contarsi doppiamente. L'intersezione $\beta_3^{10} \cdot M_3^4$ è la stessa che la $\alpha_3^5 \cdot M_3^4$, tutta contata due volte.

Da quanto precede si trae che, nella rappresentazione stabilita della $M_3^4$ di $S_4$ sulla $V_3^5$ di $S_6$, alle sezioni iperpiane di quest'ultima varietà, sistema somma delle quadriche e rigate cubiche suindicate, corrisponde su $M_3^4$ il sistema somma delle superficie $\varphi^3$ e $\Phi^5$, cioè il sistema lineare $\infty^6$ delle superficie di 8° ordine segate dalle forme cubiche passanti per il piano $\pi$ e per la rigata $\varrho^3$ [28]. Alle intersezioni di $V_3^5$ con quadriche corrisponderanno perciò superficie di ordine 16, intersezioni con forme di 6° ordine che seghino ulteriormente il piano $\pi$ e la rigata $\varrho^3$ contati 2 volte. Tra queste forme di 6° ordine vi sono quelle composte della forma $\alpha_3^5$, che sega la rigata $\Lambda^{12}$, e di un iperpiano arbitrario; *alle sezioni iperpiane di*

---

[23] Le coniche $\delta$ hanno il piano $\pi$ come superficie unisecante; perciò, in quelle $\infty^1$ fra esse che si spezzano in due rette, generalmente una sola di queste due incontra il piano $\pi$. L'incontrano invece entrambe in corrispondenza ai punti $X_i$, come vedremo fra poco.

[24] Il punto $P$, pure doppio per $M_3^4$, non appartiene invece a $\Lambda^{12}$. Le $7 \, . \, 3 = 21$ intersezioni della direttrice di $\Lambda^{12}$ contenuta in $\pi$ colle singole $\varphi^3$ cadono negli 8 punti $X_i$, contati due volte, e nelle traccie delle 5 rette $k_i$.

[25] Un punto generico di $\pi$ appartiene al piano comune di una conica di $\varrho^3$ e di una $\delta$; appartengono al sistema $\Delta_0$ le 4 rette che congiungono quel punto alle intersezioni di queste coniche.

[26] In un punto generico di $m$ vi è *una* retta di $\Gamma$ ivi tangente a $M_3^4$; viceversa, per ogni punto di $m'$ passano *due* rette tangenti a $M_3^4$ in punti di $m$ (all'infuori di quella diretta al punto $mg_0$). Nasce così fra $m, m'$ una corrispondenza (2, 1) che genera una delle due rigate cubiche. Analogamente scambiando $m$ e $m'$.

[27] Il piano $\pi$ è quadruplo per $\beta_3$; e ogni generatrice di $\varrho^3$ è doppia per una falda di $\beta_3$, semplice, ma linea di contatto con $M_3^4$, per un'altra.

[28] Poichè $M_3^4$ ha sulla retta $g_0$ il punto doppio $P$, le forme cubiche vincolate a contenere $\pi$ e $\varrho^3$ sono soltanto tangenti a $M_3^4$ lungo $g_0$. Le $\infty^5$ fra esse che hanno $g_0$ come retta doppia segano superficie immagini di sezioni iperpiane di $V_3^5$ passanti per $G$.

$M_3^4$ *corrispondono perciò su* $V_3^5$ *le* $\infty^4$ *superficie di ordine* 10 *intersezioni colle quadriche passanti per la curva canonica* $\gamma_7^{12}$ ([29]).

Alla rigata cubica $\varrho^3$ di $M_3^4$, segata da una quadrica passante per una $\Phi^5$, corrisponde su $V_3^5$ l'intersezione con una forma di $4^0$ ordine passante doppiamente per $\gamma_7^{12}$, e inoltre per una delle $\infty^2$ rigate cubiche. *Alle sezioni iperpiane delle* $M_3^8$ *di* $S_6$ (contenente $R^3$) *corrispondono perciò le superficie (di ordine* 27*) segate su* $V_3^5$ *da forme di* $6^0$ *ordine con* $\gamma_7^{12}$ *tripla, e passanti in più per una delle* $\infty^2$ *rigate cubiche.*

Infine al piano $\pi$ corrisponde su $V_3^5$ la superficie di ordine 8 intersezione con una quadrica passante per $\gamma_7^{12}$ e per una superficie di $2^0$ ordine del fascio corrispondente alle $\varphi^3$. *Alle sezioni iperpiane della* $M_3^{12}$ *di* $S_8$ *considerata al n.*$^0$ *prec. corrispondono perciò su* $V_3^5$ *le superficie segate da forme di* $7^0$ *ordine con* $\gamma_7^{12}$ *quadrupla* ([30]).

Rappresentata infine $V_3^5$ sullo spazio $S_3$ nel modo già indicato (ossia mediante le superficie cubiche passanti per una $\gamma_0^4$ spezzata in cubica e retta), alle sezioni iperpiane della detta $M_3^{12}$ di $S_8$ corrispondono in $S_3$ le superficie di ordine 21 aventi a comune:

$1^0$) una retta e una cubica, con un punto comune, multiple entrambe di ordine 7;

$2^0$) una curva $C_7^{12}$ quadrupla, incontrante la retta di cui sopra in 7 punti e la cubica in 17 punti (dovendo ancora incontrare in 7 punti variabili le quadriche passanti per la cubica).

Di questo sistema conviene prender nota, come sistema lineare $\infty^8$ di superficie di genere 1 in $S_3$ non riducibile forse a tipo più semplice.

**7.** VARIETÀ $M_3^8$ CON FASCIO DI $\varphi^3$. — Se la $M_3^8$ di $S_6$ ha le curve sezioni contenenti una $g_3^1$, essa contiene (n.$^0$ 2, per $p=5$) un fascio di superficie cubiche $\varphi^3$, negli spazi $S_3$ di una $\infty^1$ razionale normale, cioè di una $V_4^3$, $S_0$-cono (la stessa che contiene la $V_3^5$ incontrata al n.$^0$ prec.): $V_4^3$ comune altresì a tutte le $\infty^2$ quadriche passanti per $M_3^8$ ([31]). Questa $M_3^8$ è intersezione della $V_4^3$ con una forma cubica passante per uno dei suoi $S_3$; il vertice delle $V_4^3$ è per essa punto doppio, comune altresì a tutte le $\varphi^3$, ma punto semplice per queste. Gli iperpiani passanti per le

---

([29]) Per la curva $\gamma_7^{12}$ passano infatti $\infty^9$ quadriche di $S_6$, delle quali $\infty^4$ contengono l' intera $V_3^5$.

([30]) Ai punti di $\gamma_7^{12}$ corrispondono perciò su $M_3^{12}$ quartiche razionali. Ciò è confermato dall'osservazione che ad essi corrispondono in $M_3^4$ rette generatrici di $\Lambda^{12}$ le quali incontrano $\pi$ e $\varrho^3$ rispett. in *uno* e in *due* punti; perciò su $M_3^{12}$ curve che da tre loro punti si proiettano in rette. Viceversa, le rette contenute in $M_3^{12}$, generatrici di $R^{84}$ si proiettano su $M_3^4$ di $S_6$ in rette non incontranti generalmente $\pi$ nè $\varrho^3$, bensì direttrici del fascio di $\varphi^3$, e bisecanti le $\Phi^5$; ad esse corrispondono perciò su $V_3^5$ cubiche sghembe, incontranti $\gamma_7^{12}$ in 5 punti. Luogo di queste $\infty^1$ cubiche è la superficie (unica) di ordine 25, con $\gamma_7^{12}$ tripla, aggiunta a quelle segate dalle forme di $7^0$ ordine con $\gamma_7^{12}$ quadrupla.

([31]) La $M_3^8$ generale di $S_6$ di cui al n.$^0$ 3 dipende da 75 parametri (sono precisamente tante, quante le reti di quadriche in $S_5$). Queste particolari $M_3^8$ con fascio di $\varphi^3$ dipendono invece da 74 parametri; sono $\infty^{30}$ le $V_4^3$ di $S_6$, e $\infty^{44}$ le $M_3^8$ in ciascuna di queste.

$\varphi^3$ segano ulteriormente una rete di $\Phi^5$ a curve sezioni di genere 2, passanti pur esse per $P$; queste $\Phi^5$ segano le $\varphi^3$ secondo cubiche piane ellittiche passanti per $P$, e si incontrano a due a due secondo coniche $\delta$ (contenute nei piani direttori della $V_4^3$, ma non passanti in generale per $P$). La $M_3^8$ contiene pertanto una congruenza del $1^0$ ordine di coniche, avente le superficie $\varphi^3$ come bisecanti; essa può quindi rappresentarsi sopra un' involuzione di coppie di punti di $S_3$ (presumibilmente non razionale) ([32]).

Ogni superficie contenuta in questa $M_3^8$ (supposta del tipo generale, tra quelle contenenti $\varphi^3$) appartiene a un sistema lineare $|m\varphi^3 + n\Phi^5|$, con $m$, $n$ interi.

Determiniamo le rigate contenute in questa $M_3^8$. La somma degli ordini loro non può affermarsi senz' altro debba essere eguale a 128 come ai n. 3, 5; questo risultato essendo valido soltanto per le $M_3^8$ che sono intersezione completa di tre quadriche, mentre invece le quadriche passanti per questa $M_3^8$ contengono tutte l' intera $V_4^3$ considerata. Ritroveremo tuttavia anche in questo caso l' ordine complessivo 128.

Ogni retta contenuta nella $M_3^8$ o sta sopra una delle $\varphi^3$, oppure è direttrice del fascio di queste.

Le rette del secondo tipo sono in pari tempo le componenti delle $\infty^1$ coniche $\delta$ riducibili. La superficie luogo di esse, luogo pertanto anche di coniche $\delta$, è puramente multipla di $\Phi^5$ (ossia è del tipo suindicato $m\varphi^3 + n\Phi^5$ con $m = 0$). In tal caso $n$ è il numero delle $\delta$ di questa superficie, cioè delle $\delta$ riducibili, che stanno su una $\Phi^5$; onde $n = 7$. Otteniamo così una $R^{35}$.

Vi è poi un ulteriore rigata $\Sigma$, luogo delle rette contenute nelle singole $\varphi^3$, e ciascuna delle quali sta altresì su una (sola) $\Phi^5$, come direttrice del fascio di coniche $\delta$. Posto $\Sigma \equiv m\varphi^3 + n\Phi^5$, si vede che l' intersezione di $\Sigma$ con una $\varphi^3$, la quale si compone delle 27 rette di tale $\varphi^3$, deve essere equivalente, su questa, all' intersezione con $n\Phi^5$, cioè all' insieme di $n$ sezioni piane; onde $n = 9$. L' ordine della rigata $\Sigma$ è perciò $3m + 45$. D' altra parte $\Sigma$ ha a comune con ogni $\varphi^3$ le sue 27 rette, e perciò, indicato con $x$ l' ordine della curva sua intersezione con una $\Phi^5$, dovrà essere:

$$3m + 45 = 27 + x\,.$$

Quanto all' ordine $x$, osserviamo ancora che ogni $\Phi^5$ ha infinite sezioni iperpiane spezzate in una cubica passante per $P$ e in una conica $\delta$ non passante in generale per $P$; e che la $C^x$ di cui trattasi:

incontra le cubiche in 27 punti variabili, tracce delle rette delle singole $\varphi^3$;

---

([32]) La $V_4^3$ sopra considerata potrebbe anche essere un $S_1$-cono; la $M_3^8$ avrebbe allora la retta asse di questo cono come doppia, e sarebbe luogo di $\infty^2$ coniche in piani per questa retta (retta che ne sarebbe una bisecante razionale); le superficie $\varphi^3$ e $\Phi^5$ apparterrebbero tutte a questa congruenza di coniche.

incontra in $m$ punti le generatrici della rigata $R^{35}$ (direttrici del fascio di $\varphi^3$), e perciò in $2m$ punti ogni conica $\delta$;

ha infine in $P$ un punto multiplo di ordine 7, in quanto per esso passano 7 generatrici di $\Sigma$. Invero la $M_3^8$ è intersezione della $V_4^3$ considerata, $\infty^1$ di $S_3$, con una forma cubica $\alpha^3$ passante per uno di questi $S_3\,(\sigma)$. Lo spazio $S_5$ tangente in $P$ ad $\alpha^3$ contiene $\sigma$, e sega ulteriormente $V_4^3$ secondo un cono quadrico $\Gamma_3^2$ di $S_4$ (cono tangente a $M_3^8$ nel suo punto doppio $P$), i cui due sistemi di piani sono gli uni tangenti in $P$ alle singole $\varphi^3$, mentre gli altri contengono le $\infty^1$ coniche $\delta$ passanti per $P$, e sono tangenti alle $\Phi^5$ (ciascuno a $\infty^1$ $\Phi^5$). Di queste coniche, un numero finito si spezzano in 2 rette, delle quali una passa per $P$, ed è generatrice in pari tempo di $R^{35}$ e $\Sigma$. Ora, la forma cubica $\alpha^3$ contiene un cono sestico di $\infty^2$ rette uscenti da $P$, composto dello spazio $\sigma$ e di un cono quintico (avente a comune con $\sigma$ un cono cubico di $\infty^1$ rette); questo cono quintico è incontrato da $\Gamma_3^2$ in 10 rette, delle quali 3 stanno in $\sigma$ (e nel cono cubico), e le altre 7 sono quelle ora cercate, cioè contenute in $M_3^8$. D' altronde il cono $\Gamma_3^2$ contiene l'unica $\Phi^5$ avente un punto doppio in $P$, la quale è luogo delle $\infty^1$ coniche $\delta$ passanti per $P$; e di queste appunto 7 si spezzano in rette.

Si ha pertanto:

$$3m + 45 = 27 + 27 + 2m + 7$$

da cui $m = 16$; $\Sigma \equiv 16\,\varphi^3 + 9\,\Phi^5$, perciò di ordine 93.

Ogni generatrice di $\Sigma$ ne incontra altre 10 di $\Sigma$ stessa (contenute nella stessa $\varphi^3$), e 7 di $R^{35}$. Ogni generatrice di $R^{35}$ ne incontra una di questa stessa rigata, e $m = 16$ di $\Sigma$.

**8.** VARIETÀ $M_3^{10}$ DI $S_7$. — Consideriamo ora una $M_3^{10}$ di $S_7$ a curve sezioni canoniche di genere 6 generali, perciò riferibili a sestiche piane con 4 punti doppi ([32 bis]). Ciascuna di queste curve è intersezione di una superficie $\varphi^5$ a sezioni ellittiche con una quadrica, e contiene 5 serie lineari $g_4^1$ coi gruppi $G_4$ nei piani dei singoli fasci di coniche della $\varphi^5$: questi piani formano altrettante $V_3^3$, aventi a comune la $\varphi^5$, unica contenente la data $C_6^{10}$.

Similmente, la più generale $F^{10}$ di $S_6$ di generi 1 a curve sezioni canoniche è intersezione di una $V_3^5$ a curve sezioni ellittiche ([33]) con una quadrica; e la più generale $M_3^{10}$ di $S_7$ a curve sezioni canoniche è intersezione di una $V_4^5$ di $S_7$, sempre a curve sezioni ellittiche ([34]), anche con una quadrica.

Da un gruppo $G_4$ di una $g_4^1$ di una sua sezione generica $C_6^{10}$ (gruppo contenuto in un piano) la $M_3^{10}$ si proietta infatti su $S_4$ in una forma $V_3^6$

---

([32 bis]) Prescindiamo qui dallo studio di un' altra $M_3^{10}$, intersezione parziale del $S_1$-cono proiettante una $\varphi^4$ di VERONESE con una forma cubica, e le cui curve sezioni sono riferibili a $C^5$ piane generali.

([33]) ENRIQUES - SCORZA, lavori cit. al n.° 6.

([34]) SCORZA, l. c., n. 43-46. Questa $M_4^5$ è altresì la sezione generica della $M_6^5$ di $S_9$, Grassmanniana delle rette di $S_4$, con un $S_7$; immagine perciò della varietà base di un fascio di complessi lineari di $S_4$.

con superficie doppia del $4^0$ ordine, a sezioni razionali (dovendo questa superficie stare su un'unica quadrica, che sega l'unica aggiunta delle sezioni iperpiane). E tale superficie è precisamente una rigata $R^4$ (anzichè una superficie proiezione di quella di VERONESE, la quale avrebbe $\infty^3$ trisecanti invadenti l'intero spazio $S_4$). Ora le forme cubiche di $S_4$ passanti per una $R^4$ rappresentano appunto una $V_4^5$ di $S_7$ a curve sezioni ellittiche; e la data $M_3^{10}$, proiettata in una $M_3^6$ con $R^4$ doppia, ne è l'intersezione con una quadrica.

La $R^4$ ha un punto doppio ([35]) dal quale si proietta in un cono quadrico; i due sistemi di piani di questo cono contengono risp. le generatrici di $R^4$ e un fascio di cubiche piane razionali.

Da una sua retta generica $r$ la $M_3^{10}$ si proietta in una $M_3^6$ di $S_5$ (a curve sezioni canoniche di genere 4) contenente una $R^3$ immagine di $r$, e quindi anche una seconda $R^3$, intersezione residua coll' $S_4$ che contiene la prima (e proiezione dell'unica sezione iperpiana $F^{10}$ con $r$ doppia): le due $R^3$ s'incontrano secondo una $C_1^5$, e stanno in un medesimo cono quadrico. Viceversa, ogni $M_3^6$ di $S_5$ contenente una $R^3$ è proiezione di una $M_3^{10}$ da una sua retta. È noto che una $M_3^6$ di $S_5$ a curve sezioni canoniche di genere 4 può rappresentarsi birazionalmente sopra un' involuzione, in generale non razionale, di $S_3$. E dalle considerazioni di ENRIQUES e APRILE ([36]) risulta più particolarmente che, se la $M_3^6$ contiene una superficie razionale $\Phi^k$, la rappresentazione può farsi sopra un'involuzione di ordine doppio $2k$. Nel caso presente, poichè la $M_3^6$ contiene una $R^3$, *tale* $M_3^6$, *e quindi la data* $M_3^{10}$, *possono rappresentarsi sopra un' involuzione di* $6^0$ *ordine di* $S_3$.

Poichè la $F^{10}$ sezione iperpiana di $M_3^{10}$, essendo la più generale di questo tipo, contiene soltanto curve intersezioni complete con ipersuperficie dei vari ordini, così anche *la* $M_3^{10}$ *considerata contiene soltanto superficie algebriche sue intersezioni complete con forme di* $S_7$. Ora, nella proiezione già accennata di $M_3^{10}$ in $M_3^6$ da una sua retta generica $r$, le $F^{10}$ sezioni iperpiane si proiettano in superficie di ordine 9, costituenti il sistema somma delle $F^6$ sezioni iperpiane e della $R^3$ immagine di $r$; esse incontrano pertanto l'altra $R^3$ (proiezione della $F^{10}$ con $r$ doppia) secondo curve $C_5^8$ (canoniche, con $g_3^1$) con 10 intersezioni variabili, perciò passanti per 11 punti fissi, doppi per $M_5^6$, comuni alle due $R^3$ e alla $C_1^5$ loro intersezione. Tali punti essendo immagini di rette di $M_3^{10}$ incidenti alla $r$,

---

([35]) SEVERI, Rend. Palermo, vol. 15 (1901), p. 44.

([36]) ENRIQUES, Rend. Acc. Lincei (5), 21 (1912), p. 81; APRILE, Rassegna di Matem. e Fisica, anno 1 (1921), p. 133. Lo spazio $S_3$ tangente alla $M_3^6$ in un suo punto l'incontra secondo una $C^6$ razionale con punto $4^{plo}$ nel punto di contatto. In corrispondenza ai punti di una $R^3$ contenuta in $M_3^6$ abbiamo $\infty^2$ curve costituenti una congruenza razionale. Questa congruenza ha infinite superficie unisecanti, perchè qualunque piano contenuto nella quadrica passante per $M_3^6$ incontra un $S_3$ generico, in particolare un $S_3$ tangente a $M_3^6$, in *un* punto $P$, e determina quindi sulla sestica contenuta in questo $S_3$ anche *un* punto (sulla retta congiungente $P$ col punto di contatto del detto $S_3$). La congruenza è infine del $6^0$ ordine; le 6 curve di essa passanti per un punto $O$ di $M_3^6$ sono date dagli $S_3$ tangenti a $M_3^6$ nei punti comuni a $R^3$ e alle varietà prime polari di $O$ rispetto alla quadrica e forma cubica di cui $M_3^6$ è intersezione.

asse di proiezione, se ne trae (n.° 1) che *le rette contenute in* $M_3^{10}$ *formano una rigata di ordine* 100, *segata da una forma di ordine* 10 ([37]).

Ritornando al sistema lineare rappresentativo della $V_4^5$ di $S_7$ sopra considerata mediante le forme cubiche di $S_4$ passanti per $R^4$, osserviamo che tra queste forme vi è in particolare quella luogo dei piani delle $\infty^1$ coniche direttrici di $R^4$ ($V_3^3$ con piano doppio ([38]), normale per $S_5$). Ad essa corrisponde su $V_4^5$ una $V_3^5$ sezione iperpiana, luogo pure di $\infty^1$ piani incidenti a un piano fisso $\pi$ secondo rette tangenti a una conica ([39]). Da questo piano la $V_4^5$ si proietta anche univocamente su $S_4$; le sue sezioni iperpiane si proiettano in quadriche passanti per una $C_0^3$ di $S_3$; le $M_3^{10}$ sezioni con quadriche, in forme di 4° ordine aventi la detta cubica come doppia; in particolare le $M_3^{10}$ contenenti il piano $\pi$ in forme cubiche generali di $S_4$ ([40]). La $V_4^5$ contiene $\infty^3$ rette incidenti a ciascuno dei suoi piani, le quali per il piano $\pi$ si distribuiscono negli $\infty^1$ piani della detta $V_3^5$; per i piani generatori di questa invadono invece tutta la $V_4^5$, e si proiettano da $\pi$ nella stella $\infty^3$ col centro in punto della detta $C_0^3$. Le $M_3^{10}$ contenenti uno di questi piani sono pertanto razionali.

**9**. Partiamo adesso, viceversa, dalla considerazione di una $M_3^{10}$ di $S_7$ contenente un piano $\pi$. Gli iperpiani passanti per $\pi$ segheranno su di essa superficie $\Phi^9$ che a loro volta incontreranno $\pi$ secondo cubiche (in generale ellittiche); queste ultime potranno formare un sistema lineare $\infty^3$, di grado 3, perciò con 6 punti basi, oppure $\infty^4$, di grado 4, con 5 punti basi; punti basi in ogni caso doppi per $M_3^{10}$.

Nel primo caso le $\Phi^9$ si incontrano a due a due secondo curve $\gamma_1^6$; e la $M_3^{10}$ si proietta da $\pi$ (come dal piano $\pi$ del numero prec.) in una

---

([37]) Il sistema lineare delle $F^4$ di $S_3$ passanti per una $\gamma_6^8$ rappresenta una (particolare) $M_3^{10}$ di $S_7$. Alla curva base $\gamma_6^8$ e alla rigata delle sue trisecanti (di ordine 34, con $\gamma$ multipla di ordine 9) corrispondono su $M_3^{10}$ rigate di ordini risp. 22 e 74. Ritenuto poi che $\gamma_6^8$ sta sopra una superficie cubica, immagine di una quadrica di $M_3^{10}$, ritroviamo appunto, fra le dette due rigate e i due regoli di questa quadrica, l'ordine 100 della rigata complessiva di $M_3^{10}$. Inoltre, in $S_3$, la $R^{34}$, più la superficie cubica anzidetta contata 2 volte, più la $\gamma_6^8$ (il che equivale a diminuire di un'unità la multiplicità di $\gamma$ per questa superficie complessiva), fornisce appunto una superficie decupla del sistema $[F^4]$.

([38]) C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche...*, Mem. Acc. Torino (2), vol. 39 (1888), n. 52.

([39]) D'altronde la varietà base di un fascio di complessi lineari di $S_4$ contiene appunto $\infty^1$ stelle, in spazi $S_3$ di un fascio e coi centri su una conica. E queste rette sono tutte quelle delle varietà base che si appoggiano al piano di questa conica (CASTELNUOVO, l. c. al n.° 6).

([40]) Sopra una forma cubica $V_3^3$ di $S_4$ le quadriche passanti per una sua cubica sghemba segano appunto un sistema $\infty^7$ di $F^6$, rappresentante una $M_3^{10}$ di $S_7$. Alla cubica base, alle $R^{45}$ delle rette di $V_3^3$ incidenti a detta cubica, e alla superficie di 3° ordine segata dallo spazio $S_3$ di questa cubica corrispondono su $M_3^{10}$ una $R^8$ (che incontra il piano $\pi$ in una $C^5$ con 6 punti doppi), una $R^{87}$ e un piano. Di nuovo quindi, per ricostituire l'ordine 100 della rigata complessiva di $M_3^{10}$, il piano va computato per 5 unità (cfr. n. 4). Una generatrice di $R^{87}$ ne incontra altre 10 di questa stessa rigata, una di $R^8$, e non incontra generalmente il piano. Una generatrice di $R^8$ ne incontra 6 di $R^{87}$; a integrare il totale di 11 occorre computare di nuovo per 5 unità il fascio delle rette incidenti a questa generatrice e contenute nel piano di $M_3^{10}$.

forma cubica generale di $S_4$. I 6 punti doppi contenuti in $\pi$ hanno per immagini le 6 rette contenute in questa forma e corde della $C_0^3$ considerata al n.° prec.

Nel secondo caso invece le $\Phi^9$ si incontrano a due a due secondo curve $\gamma_0^6$; e la $M_3^{10}$ si proietta da $\pi$ in una quadrica di $S_4$, è dunque razionale. Alle sezioni iperpiane di $M_3^{10}$ corrispondono su questa quadrica le $F^6$ sue intersezioni con forme cubiche passanti per una $C_6^9$ (contenuta in una $\varphi^4$, intersezione di 2 quadriche, e immagine del piano $\pi$). I 5 punti doppi su $\pi$ hanno per immagini rette di $\varphi^4$ trisecanti la $C_6^9$. Si ha una $M_3^{10}$ di questo tipo segando la $V_4^5$ considerata al n.° prec. con una quadrica passante — anzichè per il piano direttore della $V_3^5$ — per uno degli $\infty^1$ piani generatori di questa. (La $M_3^{10}$ non ammette lungo questo piano un $S_6$ tangente fisso, e perciò le $\Phi^9$ residue del detto piano devono incontrarlo secondo $\infty^4$ cubiche distinte) (41).

La $M_3^{10}$ può anche contenere una $R^3$, ed è allora proiezione di una $M_3^{14}$ di $S_9$ da una sua retta: questa $M_3^{14}$ fu già da me incontrata in altra occasione (42), ed è riferibile a una forma cubica generale di $S_4$. Dagli $\infty^2$ iperpiani passanti per $R^3$ essa è incontrata ulteriormente secondo superficie di ordine 7 a sezioni di genere 2, le quali segano $R^3$ secondo una rete di $C_1^5$, con 6 punti comuni, doppi per $M_3^{10}$, e si tagliano a due a due secondo una congruenza del 1° ordine di coniche $\gamma$ (43).

**10.** Varietà $M_3^{10}$ con fascio di $\varphi^3$. — Se la $M_3^{10}$ ha curve sezioni contenenti una $g_3^1$, essa contiene a sua volta (n.° 2) un fascio di $\varphi^3$, negli spazi $S_3$ di una $V_4^4$ ($\infty^1$ razionale normale di $S_3$), ed è intersezione di questa $V_4^4$ con una forma cubica passante per due suoi $S_3$.

Supponiamo che questa $V_4^4$ non sia un cono (sia quindi generata da due spazi $S_3$ indipendenti, in corrispondenza omografica). In tal caso la $M_3^{10}$ si proietta univocamente dallo spazio $S_3$ di una delle sue $\varphi^3$ sopra un altro $S_3$, indipendente da questo; ossia il sistema lineare residuo del fascio di $\varphi^3$ rispetto alle sezioni iperpiane $F^{10}$ è un sistema omaloidico, composto di $\Phi^7$, a intersezioni variabili $C_0^4$. Nella detta proiezione univoca di $M_3^{10}$, alle sezioni iperpiane corrispondono le $F^4$ di $S_3$ passanti per una $\gamma_{10}^9$, base di un fascio di superficie cubiche (immagini delle $\varphi^3$).

---

(41) Alla curva $C_6^9$ (contenuta in $\varphi^4$) corrisponde su $M_3^{10}$ una rigata $R^{17}$ incontrante il piano $\pi$ in una $C^8$ con 5 punti tripli; alla superficie intersezione della varietà delle corde di $C_6^9$ (di ordine 22) colla quadrica immagine di $M_3^{10}$ corrisponde su $M_3^{10}$ una $R^{79}$. In questo caso dunque il piano contenuto nella $M_3^{10}$ deve computarsi per 4 unità nell'ordine complessivo 100 della rigata.

(42) Rend. Acc. Lincei (6), vol. 11 (1930), p. 329.

(43) La rigata complessiva di ordine 100 contenuta in questa particolare $M_3^{10}$ si compone della rigata cubica $R^3$, di una $R^{62}$, proiezione delle $R^{70}$ contenuta nella $M^{14}$ suindicata e le cui generatrici generiche non incontrano $R^3$, e di una $R^{35}$ luogo delle rette componenti di coniche $\gamma$ riducibili. Da ciascuno dei 6 punti doppi di $M_3^{10}$, tutti appartenenti a $R^3$, escono 5 rette generatrici comuni di $R^{62}$ e $R^{35}$. La rigata $R^{35}$ incontra $R^3$ secondo una curva di ordine 25, che ne taglia le generatrici in 10 punti e la direttrice rettilinea in 5 punti.

Ogni retta di $M_3^{10}$ o sta su una $\varphi^3$, oppure è direttrice del loro fascio e sta su $\infty^2$ $\Phi^7$. Queste ultime sono immagini dei punti di $\gamma_{10}^9$, e formano una $R^{18}$. Le prime sono immagini delle trisecanti di $\gamma_{10}^9$, e formano una $R^{96}$. Ogni generatrice di $R^{18}$ ne incontra 11 di $R^{96}$, nessuna di $R^{18}$; mentre ogni generatrice di $R^{96}$ ne incontra altre 10 di questa e 3 di $R^{18}$. Fra queste varie superficie su $M_3^{10}$ intercedono le relazioni

$$R^{18} \equiv 3\Phi^7 - \varphi^3 \equiv 3F^{10} - 4\varphi^3 ; \qquad R^{96} \equiv 11F^{10} - 2\Phi^7 \equiv 11\varphi^3 + 9\Phi^7$$

Se invece la $V_4^4$ è un $S_0$-cono, il cui vertice indicheremo con $P$, si può ugualmente costruire in essa una $M_3^{10}$, segandola con una forma cubica passante per due fra gli spazi $S_3$ generatori della $V_4^4$; questa forma cubica passa allora per $P$, e può avervi un punto semplice, avendo in tal caso come spazio $S_6$ ivi tangente ad essa lo spazio dei detti due $S_3$ ([44]). Il punto $P$ è doppio per questa $M_3^{10}$; le $\varphi^3$ e le $\Phi^7$ loro residue rispetto alle sezioni iperpiane $F^{10}$ passano tutte per $P$, ma vi hanno generalmente punti semplici; vi è inoltre una rigata razionale $R^4$, avente in $P$ un punto doppio, residua di tutte le coppie di $\varphi^3$ rispetto alle $F^{10}$ (e perciò delle $\varphi^3$ rispetto alle $\Phi^7$). Queste $\Phi^7$ sono però di tipo diverso dalle precedenti; le precedenti si rappresentavano sul piano col sistema delle $C^4$ aventi a comune 9 punti semplici; queste hanno sezioni iperpiane contenenti (parzialmente) tutte le coppie di cubiche segatevi dalle $\varphi^3$, e si rappresentano con sestiche piane aventi a comune 7 punti doppi e un punto semplice. Le $\Phi^7$ si segano a due a due secondo quartiche ellittiche, contenute in coni quadrici di vertice $P$, e a 3 a 3 in coppie di punti (non formano dunque più sistema omaloidico). La conoscenza, sopra ogni $\Phi^7$, di questa rete di quartiche e del punto $P$ permette di rappresentare la $\Phi^7$ razionalmente sopra un' involuzione piana, e la $M_3^{10}$ sopra un' involuzione di $S_3$ ([45]); questa $M_3^{10}$ è pertanto di dubbia razionalità ([46]).

**11.** Varietà $M_3^{12}$ di $S_8$. — Per $p = 7$ abbiamo già incontrato ai n. 5-6 una $M_3^{12}$ di $S_8$, razionale, contenente soltanto superficie intersezioni complete con forme di $S_8$, e in particolare una rigata di ordine $12.7 = 84$; le curve sezioni di questa $M_3^{12}$ sono curve generali di genere 7, non contenenti serie lineari $g_4^1$. (Proiettata, come si è veduto, la $M_3^{12}$ in una $M_3^4$ di $S_4$, le $F^4$ sezioni di questa contengono curve $\gamma_7^{12}$, sezioni della rigata $\Lambda^{12}$, riferibili a $C^7$ piane con 8 punti doppi generici). Anche questa $M_3^{12}$

([44]) Se questa forma cubica avesse in $P$ un punto doppio, altrettanto avverrebbe di tutte le $\varphi^3$; la $M_3^{10}$ sarebbe razionale, e si proietterebbe da $P$ in una $V_3^4$ di $S_6$, $\infty^1$ razionale normale di piani. La $V_4^4$ considerata di sopra potrebbe essere anche un $S_1$-cono; la $M_3^{10}$ sarebbe allora, nel caso più generale, luogo di $\infty^2$ coniche contenute in piani passanti per la retta asse del cono.

([45]) Enriques, Mathem. Ann. 49 (1896), p. 1; v. in part. pp. 14-22.

([46]) Rappresentata la $V_4^4$ di $S_7$ ($S_0$-cono) col sistema delle quadriche di $S_4$ contenenti un piano $\pi$ assegnato e aventi in un punto $P$ di questo piano un $S_3$ tangente anche dato, alla $M_3^{10}$ corrisponde una forma di 4° ordine contenente il piano $\pi$, e avente in $P$ un *tacnodo* col dato $S_3$ tangente (cioè un punto doppio, con un piano doppio infinitesimo ad esso infinitamente vicino in questo $S_3$).

ha casi particolari contenenti un piano, oppure una rigata cubica $R^3$. P. es. il sistema lineare delle $F^4$ di $S_3$ passanti per una $\gamma_3^7$ rappresenta una $M_3^{12}$ di $S_8$ contenente una rigata $R^3$, immagine dell'unica superficie cubica passante per $\gamma_3^7$: a questa curva e alla rigata (di ordine 25) delle sue trisecanti corrispondono su $M_3^{12}$ rigate $R^{24}$ e $R^{57}$, che insieme colla $R^3$ ne formano una complessiva di ordine 84, appartenente al sistema $7^{plo}$ delle sezioni iperpiane. La $M_3^{12}$ ha su $R^3$ cinque punti doppi, immagini delle 5 quadrisecanti di $\gamma_3^7$ ([47]).

Mentre la più generale $M_3^{10}$ di $S_7$, studiata al n.° 8, è intersezione di una $V_4^5$ a curve sezioni ellittiche con una quadrica, operando analogamente in $S_8$ su una $V_4^6$ anche a curve sezioni ellittiche si hanno soltanto $M_3^{12}$ le cui curve sezioni contengono serie $g_4^1$, e generalmente 3 di tali serie (sono dunque riferibili a sestiche piane con 3 punti doppi). Sono infatti di questo tipo le $C_7^{12}$ di $S_6$ intersezioni di una $\Phi^6$ razionale a sezioni ellittiche (DEL PEZZO) con una quadrica.

Nello spazio $S_8$ vi sono due diversi tipi di $V_4^6$ non coni a curve sezioni ellittiche ([48]): la $V_4^6$ detta « di C. SEGRE » ([49]), che rappresenta biunivocamente senza eccezioni le coppie dei punti di due piani, e un' altra $V_4^6$ intersezione parziale di una quadrica con un cono che da un piano della stessa quadrica proietta una superficie di VERONESE (di 4° ordine, in $S_5$). Essi conducono a due diverse $M_3^{12}$.

VARIETÀ $M_3^{12}$ « DI SEGRE ». La $V_4^6$ di SEGRE in $S_8$ contiene due distinte schiere $\infty^2$ di piani, ciascuna delle quali punteggia proiettivamente i piani dell' altra; e due sistemi $\infty^2$ di $V_3^3$ di $S_5$, ciascuna luogo di $\infty^1$ piani di una delle due schiere, e incontrante in rette (direttrici della $V_3^3$) i piani dell' altra schiera. Due $V_3^3$ di sistemi opposti si incontrano secondo una quadrica di $S_3$, $q$; e vi sono in tutto $\infty^4$ quadriche così fatte.

La $M_3^{12}$ intersezione generale di questa $V_4^6$ con una quadrica $Q$ (e che diremo pure « di SEGRE ») contiene pertanto due congruenze del 1° ordine di coniche, e due reti di superficie $\Phi^6$ (di $S_5$), a sezioni di genere 2, intersezioni di $Q$ colle precedenti $V_3^3$. Le superficie $\Phi^6$ di ciascuna delle due reti hanno come intersezioni variabili le coniche di una delle due congruenze, e bisecano le coniche dell'altra congruenza; delle $\infty^1$ coniche contenute in una $\Phi^6$, 6 si spezzano in due rette, e queste rette formano per ciascuna delle 2 congruenze una rigata $R^{36}$. Queste due rigate esauri-

---

([47]) Da una generatrice della rigata $R^3$ questa $M_3^{12}$ si proietta in una $M_3^8$ di di $S_5$, contenente in pari tempo un piano, proiezione di $R^3$, e un' altra rigata cubica, immagine della retta asse di proiezione; caso particolare comune delle $M_3^8$ considerate ai n. 4, 5, 6. La stessa $M_3^{12}$ da una generatrice di $R^{57}$ si proietta invece nella particolare $M_3^8$ considerata nella nota ([18]).

([48]) SCORZA, l. c., n.° 47-50. Ci limitiamo qui a considerare le $M_3^{12}$ intersezioni di quadriche con $V_4^6$ non coni.

([49]) C. SEGRE, Rend. Palermo, vol. 5 (1891), p. 192; Mathem Annalen, vol. 40 (1891), p. 413; in part. n.° 6.

scono la totalità delle rette contenute nella $M_3^{12}$ (perchè ogni retta delle $V_4^6$ sta in un piano di una delle 2 schiere), e costituiscono complessivamente l'intersezione di $M_3^{12}$ con una forma di $6^0$ ordine. Ogni generatrice di una $R^{36}$ ne incontra una della stessa rigata e *sei* dell'altra, dunque in tutto 7. Le coniche di una congruenza appoggiate a una retta contenuta nell'altra formano una (particolare) $\Phi^6$, con questa retta direttrice.

La quadrica $Q$ incontra le $\infty^4$ quadriche $q$ secondo altrettante $C_1^4$, delle quali $\infty^2$ spezzate in due coniche ($\delta$); ogni $\Phi^6$ contiene perciò $\infty^2$ quartiche, delle quali un numero finito, 16, si spezzano in due coniche $\delta$ ([50]), *direttrici* del fascio di coniche ivi contenuto.

Proiettando $M_3^{12}$ da una sua retta $r$, parte di una conica $\gamma$ di una determinata congruenza (che diremo *prima*), avremo una $M_3^8$ di $S_6$ contenente una rigata $R^3$, immagine di $r$. Le $\Phi^6$ generiche del primo sistema si proiettano anche in $\Phi^6$ (parimente normali); ma quelle $\infty^1$ fra esse che contengono $r$ (cioè la conica riducibile $\gamma$) si proiettano in un fascio di superficie cubiche $\varphi^3$ ([51]). La rigata $R^{36}$ del primo sistema si proietta in una $R^{33}$.

Invece le $\Phi^6$ del secondo sistema danno in proiezione una rete di $\Phi^5$ (anche a sezioni di genere 2); e quell'una fra esse che ha $r$ come direttrice si proietta in una quadrica $K^2$, i cui due regoli sono proiezioni rispett. delle coniche della seconda congruenza incidenti a $r$ e di cubiche aventi $r$ come corda. La $K^2$ insieme a $R^3$ costituisce una particolare $\Phi^5$; esse hanno a comune una cubica sghemba, e $K^2$ sta nello spazio $S_4$ di $R^3$. Le detta cubica contiene 6 punti doppi di $M_3^8$, immagini delle rette di $M_3^{12}$ del secondo sistema appoggiate a $r$; un $7^0$ punto doppio $P$, comune a $R^3$ e alle $\varphi^3$, è immagine della retta che con $r$ forma la conica $\gamma$. La $R^{36}$ del secondo sistema si proietta in una $R^{30}$.

Questa $M_3^8$ di $S_6$, contenendo un fascio di $\varphi^3$, è caso particolare di quella considerata al n.° 7 ([52]). Invece, pur contenendo una $R^3$, *non* è caso particolare di quella dei n. 5 - 6 (fra altro, essa ha soltanto 7 punti doppi, mentre la $M_3^8$ dei n. 5-6 ne ha 8); inoltre, come vedremo, essa è di dubbia razionalità. Gli iperpiani passanti per $R^3$ l'incontrano ulteriormente

---

([50]) Le $\Phi^6$ si rappresentano sul piano mediante il sistema lineare delle quartiche aventi a comune un punto doppio $A$ e 6 punti semplici. Alle $\infty^2$ quartiche della $\Phi^6$ corrispondono le cubiche piane passanti semplicemente per i 7 punti basi; la quartica si spezza in 2 coniche quando questa cubica si spezza nella conica passante per $A$ e per 4 altri punti basi e nella retta che congiunge i rimanenti due (15 casi), oppure nel punto base $A$, più la cubica con $A$ doppio e passante semplicemente per gli altri punti basi.

([51]) Delle 27 rette di una $\varphi^3$, 16 sono proiezioni di coniche $\delta$ della corrispondente $\Phi^6$ appoggiate alla retta $r$; una è proiezione di una cubica avente $r$ come corda; le rimanenti 10 - quelle incidenti alla precedente - sono proiezioni di rette di $\Phi^6$ (ossia delle altre 5 coniche riducibili di $\Phi^6$.

([52]) La rigata $R^{35}$ del n.° 7 si compone della $R^{30}$, della $R^3$ e di uno dei due regoli di $K^2$. La rigata $\Sigma$ è composta della $R^{33}$, dell'altro regolo di $K^2$, e della rigata (che dovrà essere di ordine 58) proiezione della superficie luogo delle coniche $\delta$ appoggiate a $r$. Effettivamente, lo studio diretto di questa rigata mostra che essa ha su ogni $\varphi^3$ 16 generatrici, e incontra le $\Phi^5$ in curve di ordine 42 (tali curve hanno in $P$ un punto $6^{plo}$; incontrano le $\infty^1$ cubiche piane della $\Phi^5$ in 16 punti, le sue coniche in 20).

secondo la quadrica $K^2$ parte fissa, più una $\varphi^3$ variabile; questa superficie complessiva « $K^2$ fissa $+ \varphi^3$ variabile » (con una retta comune) sostituisce il fascio di superficie di $5^0$ ordine a sezioni ellittiche del n.° 5, ma non ne è caso particolare ([53]).

Proiettando invece la $M_3^{12}$ da una delle $\infty^2$ sue coniche $\delta$, si ha una $M_3^6$ di $S_5$ contenente due piani incidenti, proiezioni delle $\Phi^6$ dei due sistemi che passano per questa conica, e (nel loro stesso $S_4$) una rigata $R^4$, immagine della $\delta$. È questa la più generale $M_3^6$ di $S_5$ contenente due piani dello stesso sistema della quadrica su cui essa giace (immagine quindi del più generale complesso cubico di $S_3$ contenente 2 stelle di rette); le quadriche passanti per questi due piani segano su di essa il sistema lineare $\infty^8$ di superficie, di ordine 10, rappresentante la $M_3^{12}$.

Più particolarmente, la quadrica di $S_8$ che sulla $V_4^6$ di SEGRE sega le $M_3^{12}$ può passare per una quadrica $q$ (che starà allora sulla $M_3^{12}$). Dallo spazio $S_3$ di tale $q$ questa (particolare) $M_3^{12}$ si proietta in una forma cubica generale $V_3^3$ di $S_4$; le due $\Phi^6$ contenenti $q$, e più precisamente le $R^4$ residue di $q$ rispetto ad esse, si proiettano in rette sghembe $a$, $b$ della $V_3^3$; le $\Phi^6$ generiche dei due sistemi, nelle sezioni iperpiane di $V_3^3$ passanti risp. per $a$, $b$; le sezioni iperpiane di $M_3^{12}$, nelle $F^6$ segate dalle quadriche passanti per $a$ e $b$. La quadrica $q$ ha per immagine la $\varphi^3$ segata dallo spazio $a\,b$.

Pertanto la $M_3^{12}$ considerata nel presente n.° è ancora di dubbia razionalità, e soltanto in un caso particolare è riferibile a una $V_3^3$ di $S_4$. Contenendo tuttavia una congruenza del $1^0$ ordine di coniche con superficie razionali bisecanti (le $\Phi^6$ dell'altro sistema), essa è sempre riferibile a un' involuzione di coppie di punti in $S_3$ ([54]).

**13.** ALTRA $M_3^{12}$ DI $S_7$. — Consideriamo ora l'altra $V_4^6$ di $S_8$ a curve sezioni ellittiche ([55]), ottenuta prendendo l'$S_2$-cono che da un piano $\pi$ proietta una superficie di VERONESE ($\varphi^4$, in $S_5$), e segando questo cono con una quadrica $Q$ contenente il piano $\pi$ e tutto il cono $\Gamma$ ($\infty^1$ di $S_3$) che da $\pi$ proietta una delle coniche di $\varphi^4$. Lo spazio $S_3$ che da $\pi$ proietta un punto generico di $\varphi^4$ è incontrato ulteriormente da $Q$ secondo un piano; perciò la $V_4^6$ contiene un (unico) sistema $\infty^2$ di piani, tutti incidenti secondo rette a $\pi$ (il quale ultimo è piano doppio di $M_3^{12}$). Gli $\infty^2$ $S_2$-coni che da $\pi$ proiettano le coniche di $\varphi^4$ sono segati da $Q$ secondo un $S_3$ (appartenente a $\Gamma$), più una $V_3^3$ di $S_5$, $\infty^1$ di piani, e più precisamente $S_0$-cono, col vertice su $\pi$, e $\pi$ stesso come piano direttore; il sistema di queste $V_3^3$ è autoresiduo rispetto alle sezioni iperpiane di

([53]) Nello spazio $S_5$ le superficie $\varphi^5$ a sezioni ellittiche dipendono da 35 parametri (quelle generiche sono a 2 a 2 omografiche, in un numero finito di modi); invece le superficie riducibili composte di una quadrica e di una $\varphi^3$ con una retta a comune dipendono da 37 parametri ($2 \cdot 8 = 16$ per la coppia di spazi $S_3$ delle due superficie parziali, e altri 6 e rispett. 15 per queste singole superficie, già vincolate a contenere una retta assegnata).

([54]) ENRIQUES, l. c. in *Annali di Matem.* (3), vol 20 (1913), p. 109.

([55]) SCORZA, l. c., n. 50.

$V_4^6$ [56]. Le $V_3^3$ si incontrano a 2 a 2 secondo piani; ciascuna di esse contiene $\infty^2$ coni quadrici, e di questi se ne hanno in tutto $\infty^4$. Si può forse dire che questa $V_4^6$ sta a quella di SEGRE in una relazione analoga a quella delle quadriche generali di $S_3$ rispetto ai coni quadrici.

Dallo spazio $S_3$ di uno $\Delta$ dei suoi coni quadrici la $V_4^6$ si proietta univocamente su $S_4$; il piano $\pi$ ha per immagine una retta $r$; gli $\infty^2$ piani e le $V_3^3$ di $V_4^6$ si proiettano nei piani e negli spazi $S_3$ passanti per $r$; le sezioni iperpiane di $V_4^6$, in quadriche passanti anche per $r$, e che per di più in ogni punto di $r$ hanno un piano tangente fisso, entro l' $S_3$ corrispondente alla $V_3^3$ che contiene il cono $\Delta$ (in sostanza dunque, quadriche passanti per due rette sghembe infinitamente vicine).

La $M_3^{12}$ intersezione generale di questa $V_4^6$ con una quadrica contiene un' unica congruenza del $1^0$ ordine di coniche, con conica fissa bisecante (è quindi pur essa riferibile a un' involuzione $I_2$ di $S_3$, di dubbia razionalità); e si può proiettare in una forma di $4^0$ ordine di $S_4$ con due rette doppie sghembe infinitamente vicine.

Se la quadrica che su $V_4^6$ sega la $M_3^{12}$ si fa passare per uno degli $\infty^4$ coni quadrici di $S_3$ contenuti in $V_4^6$, si ottiene una $M_3^{12}$ riferibile a una forma cubica generale di $S_4$, sulla quale le superficie immagini delle sezioni iperpiane di $M_3^{12}$ sono $F^6$ segate da quadriche aventi di nuovo a comune due rette sghembe infinitamente vicine.

**14.** VARIETÀ $M_3^{12}$ CON FASCIO DI $\varphi^3$. — Esiste anche una $M_3^{12}$ di $S_8$ contenente un fascio di superficie cubiche $\varphi^3$, ossia con curve sezioni contenenti una $g_3^1$ (conforme al tipo generale del n.$^0$ 2); essa è intersezione di una $V_4^5$, $\infty^1$ razionale normale di spazi $S_3$, che pel momento supponiamo non cono, con una forma cubica passante per tre di questi spazi $S_3$. Il sistema residuo delle $\varphi^3$ rispetto alle $F^{12}$ sezioni iperpiane è $\infty^4$, di grado 3, a intersezioni ellittiche; la $M_3^{12}$ si proietta perciò dallo spazio di una $\varphi^3$ in una forma cubica generale di $S_4$, sulla quale le $\varphi^3$ hanno per immagini anche $\varphi^3$ di un fascio, e alle $F^{12}$ corrispondono $F^6$, intersezioni colle quadriche passanti per la curva $\gamma_1^3$ base di quest' ultimo fascio (ossia per il suo piano).

La $V_4^5$ contenente $M_3^{12}$ ha $\infty^2$ rette direttrici, costituenti una $V_3^3$ di $S_5$; e alla $\gamma_1^3$ considerata sulla forma cubica di $S_4$ corrisponde su $M_3^{12}$ una rigata ellittica $R^6$, le cui generatrici sono fra le direttrici della $V_4^5$, e anche direttrici del fascio di $\varphi^3$ in $M_3^{12}$. Le rette della forma cubica appoggiate a $\gamma_1^3$ formano una $R^{45}$; a questa corrisponde su $M_3^{12}$ una rigata $R^{99}$, luogo delle rette contenute nel fascio di $\varphi^3$. Ogni generatrice di $R^6$ non ne incontra altre di questa stessa rigata, bensì 6 di $R^{99}$; ogni generatrice di $R^{99}$ ne incontra 10 altre di $R^{99}$ medesima e una di $R^6$. Tra le superficie considerate su $M_3^{12}$ intercedono le relazioni:

---

[56] Vi sono perciò degli iperpiani $S_7$ che incontrano la $V_4^6$ secondo una $V_3^3$ contata due volte, e che quindi contengono tutti gli spazi $S_4$ tangenti a $V_4^6$ nei punti di questa $V_3^3$. Le superficie sezioni di $V_4^6$ con spazi $S_6$ hanno un punto doppio, e sono rappresentate sul piano da sistemi lineari di cubiche con 3 punti basi allineati.

$$R^6 \equiv F^{12} - 2\varphi^3 ; \qquad R^{99} \equiv 9F^{12} - 3\varphi^3$$

La $V_4^5$ sopra considerata potrebbe anche essere un $S_0$ - cono oppure un $S_1$ - cono (non un $S_2$ - cono, se no le $\infty^1$ superficie $\varphi^3$ contenute negli spazi $S_3$ della $V_4^5$ si ridurrebbero a quadriche, e le superficie sezioni della $M_3^{12}$ sarebbero razionali). Escludiamo tuttavia il caso in cui la forma cubica $\alpha$ che sega la $M_3^{12}$ abbia un punto doppio nel vertice o sull' asse di questo cono, perchè questo punto sarebbe pure doppio per tutte le $\varphi^3$, e la $M_3^{12}$ si proietterebbe da esso in una $\infty^1$ razionale di piani; sarebbe dunque razionale.

Se la $V_4^5$ è un $S_0$ - cono, il cui vertice indicheremo con $P$, la forma cubica $\alpha$ potrà avere in $P$ un punto semplice soltanto se i tre $S_3$ ch' essa deve contenere stanno in uno spazio $S_7$ (che sarà ad essa tangente in $P$), e perciò se $V_4^5$ contiene un cono quadrico $\Gamma_3^2$ (di $S_4$) direttore. La forma $\alpha$ e la $M_3^{12}$ incontreranno il cono $\Gamma_3^2$ secondo due terne di piani di sistemi opposti, e conterranno perciò tre piani di questo cono, uscenti da $P$, e incontranti in rette gli $\infty^1$ spazi $S_3$ di $V_4^5$. Ciascuna $\varphi^3$ ha, rispett. in questi tre piani, una terna di rette uscenti da $P$, anche complanari ; e naturalmente, nei piani per ciascuna sua retta, un fascio di coniche. Complessivamente, la $M_3^{12}$ contiene tre congruenze del $1^0$ ordine di coniche, bisecanti rispett. i piani anzidetti, e colle coniche tutte in piani passanti per $P$. Essa è pertanto riferibile, come la precedente, a un' involuzione di coppie di punti in $S_3$ (non però, sembra, a una forma cubica di $S_4$).

Se poi la $V_4^5$ è un $S_1$ - cono, di asse $r$, affinchè la forma cubica $\alpha$ non abbia sopra $r$ alcun punto doppio è necessario che il suo spazio tangente in un punto generico di $r$ varii con questo punto, e perciò che i tre spazi $S_3$ di $V_4^5$ contenuti in $\alpha$ stiano in un $S_6$. La $V_4^5$ ha allora uno spazio $S_3$ direttore, incontrante gli $\infty^1$ $S_3$ generatori secondo piani passanti per $r$, dei quali 3 contenuti in $\alpha$; questi stessi $\infty^1$ piani sono osculatori alle singole $\varphi^3$ lungo $r$. Ogni $\varphi^3$ ha sopra $r$ due punti doppi, variabili colla $\varphi^3$; e la $M_3^{12}$ è luogo di $\infty^2$ coniche in piani passanti per $r$, e distribuite sulle singole $\varphi^3$.

*Torino, 21. XII. 1935 (XIV).*