Gino Fano

Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **23** (1936), p. 813–818

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1936_1>

Matematica. — *Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche.* Nota [1] del Corrisp. G. FANO.

1. È noto che per ogni valore intero di $p \geqq 3$ esistono nello spazio S_p superficie algebriche di ordine $2p - 2$ (F^{2p-2}) coi generi tutti eguali alla unità e curve sezioni canoniche $\left(C_p^{2p-2}\right.$ di $\left.S_{p-1}\right)$. Più particolarmente, per ogni p esiste una famiglia irriducibile di superficie così fatte, dipendente da 19 moduli, e la cui superficie generica contiene soltanto curve intersezioni complete con varietà V_{p-1} (sezioni iperpiane, e loro multipli). Queste infinite famiglie che si ottengono al variare del numero intero p sono birazionalmente distinte [2].

Per le varietà algebriche a 3 dimensioni, anche a curve sezioni canoniche e perciò con superficie sezioni F^{2p-2} del tipo precedente $\left(\text{varietà } M_3^{2p-2}\right.$ di $\left.S_{p+1}\right)$, coi generi tutti nulli e perciò non coni, alcuni indizi davano invece a credere ch'esse potessero esistere solo per valori di p non superiori a un certo limite. Fra altro, per i valori più piccoli di p queste varietà contengono una rigata R di ordine decrescente al crescere di p (per $p = 3, 4, 5, 6, \cdots$ di ordine rispett. $320, 180, 128, 100, \cdots$) [3]. Inoltre ognuna di queste M_3^{2p-2}, da una curva γ_π^n (di ordine n, genere π) in essa contenuta, almeno per valori di n non troppo elevati, si proietta in una $M_3^{2p'-2}$ del medesimo tipo, con $p' < p$, e contenente una rigata di ordine $n - 2\pi + 2$, immagine della γ_π^n. Era dunque a attendersi che, al crescere di p, l'ordine della rigata R dovesse gradualmente ridursi a zero, e dopo di ciò la successione delle M_3^{2p-2} avesse a interrompersi; e se anche per qualche valore di p si fossero trovate due o più M_3^{2p-2} differenti, e quindi complessivamente più successioni di tali M_3^{2p-2}, che così avvenisse per ciascuna di queste, sia pure per valori massimi diversi di p.

È anche noto da tempo che le varietà anzidette M_3^{2p-2} di S_{p+1} per $p = 3, 4$ *non* sono razionali: esse hanno appunto forniti esempi (finora, i soli) di varietà algebriche a generi tutti nulli e non razionali [4]. Per $p = 4$

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) ENRIQUES, «Rend. R. Accad. d. Scienze dell'Istituto di Bologna», seduta 13 dicembre 1908; SEVERI, «Atti R. Istit. Veneto», vol. 68 (parte II), 1908-09, p. 249 (adunanza 10 gennaio 1909).

(3) Per $p = 3, 4$, ved. MARLETTA, *Sulla varietà delle rette* ecc. «Atti Accad. Gioenia di Catania», ser. 4ª, vol. 16, 1902. Per i valori successivi di p, ved. un mio lavoro in corso di stampa, nel volume: *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari.* (Pavia, Tip. Rossetti, 1936).

(4) Ved. due mie Note negli «Atti della R. Accad. di Torino», vol. 43, 1907–08, p. 973; vol. 50, 1914-1915, p. 1067.

si ha una M_3^6 di S_5 riferibile tuttavia a una involuzione di punti dello spazio S_3: unico esempio finora accertato di involuzione irrazionale (di ordine 36) in S_3 (1). I primi casi successivi ($p = 5, 6, 7, \cdots$) son tuttora di dubbia razionalità, riferibili però sempre a involuzioni dello spazio S_3 (2), di ordine, in massima, decrescente; per $p \geqq 7$, già a involuzioni di coppie di punti (3). Esse dànno l'impressione (come già accennai qualche anno fa (4), e mi sono sempre confermato in tale opinione) di « non essere razionali, ma di accostarsi gradatamente alla razionalità ».

Sono ora riuscito a stabilire quanto segue (e ne esporrò la dimostrazione in altro lavoro, di prossima pubblicazione):

1°) *Le dette* M_3^{2p-2} *di* S_{p+1} *sono tutte razionali per* $p > 10$, *tranne un unico caso* (dubbio, e, come tale, ovvio): la varietà M^{24} di S_{14} riferibile a una forma cubica generale di S_4 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano su quest'ultima le F^6 segate da quadriche. I casi di dubbia razionalità, per le varietà in parola, sono così ridotti ai pochi $5 \leqq p \leqq 10$ (fra i quali sono compresi anche casi particolari notoriamente razionali), più il caso $p = 13$ già menzionato.

2°) *Le stesse* M_3^{2p-2} *di* S_{p+1} *esistono solo per* $p \leqq 37$ (cioè in spazi di dimensione $\leqq 38$): massimo che è effettivamente raggiunto (ved. appresso). Per conseguenza, è anche 38 la massima dimensione dei sistemi lineari di superficie dello spazio S_3 coi generi tutti eguali all'unità. - Poichè nel piano i sistemi lineari di curve di genere uno sono di dimensione $\leqq 9$, e quelli di dimensione 9 (massima) sono birazionalmente equivalenti al sistema ∞^9 di tutte le cubiche piane, si poteva pensare che una proprietà analoga potesse spettare in S_3 al sistema lineare ∞^{34} di tutte le superficie di 4° ordine, le quali sono appunto di genere uno (e il cui sistema rappresenta nel consueto senso una M_3^{64} di S_{34} del tipo qui in parola, per $p = 33$). Invece in S_3 esistono sistemi lineari di superficie di generi uno di dimensione > 34, e più particolarmente due tipi, birazionalmente distinti, aventi la dimensione massima 38 (rappresentanti varietà M_3^{72} di S_{38}); e cioè:

a) *Il sistema delle superficie di 6° ordine aventi a comune un punto quadruplo e una conica doppia infinitesima infinitamente vicina ad esso.* Assunto il punto quadruplo come punto fondamentale [4] delle coordinate, e il cono

(1) ENRIQUES, questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. XXI, 1° sem. 1912, p. 81. Vedasi anche la Nota successiva di G. APRILE, nella « Rassegna di Matematica e Fisica », anno I, 1921, p. 133.

(2) Varietà rappresentabili pertanto mediante funzioni razionali di 3 parametri, tali che a uno stesso punto della varietà corrisponda un numero (costante) $k > 1$ di gruppi di valori dei parametri.

(3) Ved. il mio lavoro già menzionato negli *Scritti matematici in onore di Luigi Berzolari*.

(4) « Atti del Congresso internazionale dei matematici a Bologna » (1928), vol. IV (pubbl. 1931), p. 115.

che da esso proietta la detta conica come cono $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, questo sistema lineare è rappresentato dall'equazione:

$$x_4^2 (x_2^2 - x_1 x_3)^2 + x_4 (x_2^2 - x_1 x_3) \cdot f_3 + f_6 = 0$$

dove f_3, f_6 sono polinomi omogenei generici di 3° e 6° grado nelle x_1, x_2, x_3 (e i parametri non omogenei sono in numero di $10 + 28$, cioè appunto 38). La M_3^{72} di S_{38} rappresentata da questo sistema lineare può riferirsi al cono Γ_3^9 di S_{10} proiettante una superficie di ordine 9 di DEL PEZZO (1), in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le intersezioni del cono Γ_3^9 con quadriche (2).

b) Il sistema lineare riferibile a quello delle superficie (di ordine 18) contenute in un S_0-cono razionale normale V_3^8 di S_{10}, con cono quadrico direttore (3), e ivi segate dalle forme cubiche passanti per 6 piani del cono stesso. – Questo cono V_3^8 si proietta univocamente sullo spazio S_3 dall'S_6 determinato da 2 sue rette (non passanti pel vertice) e da 3 suoi punti, contenuti in 5 piani diversi. Se i 5 piani proiezioni dei precedenti, tutti appartenenti a un fascio, si indicano con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e l'ultima terna con $\xi_3(x_1, x_2) = 0$, e il punto proiezione del vertice (che sta sull'asse del fascio) si assume come punto [4], il sistema lineare ∞^{10} rappresentante il cono V_3^8 ha l'equazione:

$$x_4 x_1 x_2 \xi_3 + x_3 \xi_3 \varphi_2 + \varphi_6 = 0$$

dove φ_2, φ_6 sono forme binarie generiche nelle x_1, x_2 di gradi 2, 6. E per il sistema ∞^{38}, immagine del sistema $|F^{18}|$ sul cono V_3^8, si trova l'equazione:

$$x_4^2 x_1^2 x_2^2 \xi_3^2 + x_4 x_1 x_2 \xi_3 (x_3 \xi_3 f_2 + f_6) + (x_3^3 \xi_3^3 + x_3^2 \xi_3^2 f_4 + x_3 \xi_3 f_8 + f_{12}) = 0$$

dove le f sono ancora forme binarie nelle x_1, x_2 di gradi eguali ai rispettivi indici (sicchè si hanno complessivamente 38 parametri) (4).

Questi due sistemi lineari ∞^{38} contengono entrambi un sistema lineare ∞^{37} di superficie razionali. Le due varietà M_3^{72} di S_{38} che li rappresentano contengono pure entrambe una congruenza del 1° ordine di coniche, passanti per un punto fisso, e immagini entrambe della stella di rette [4]. I sistemi

(1) «Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», vol. I, 1884–87, p. 241, n. 33.

(2) Altri sistemi lineari di superficie di generi uno, di dimensione minore, si ottengono, al pari di questo, raddoppiando i sistemi lineari a intersezioni variabili ellittiche determinati da ENRIQUES, questi «Rendiconti», ser. 5ª, vol. III, 1° sem. 1894, pp. 481, 536; «Mathematische Annalen», vol. 46, 1895, p. 179, in part. n. 11 e sg.

(3) In altri termini, il cono V_3^8 proiettante una rigata razionale normale di ordine 8 con conica direttrice.

(4) Queste superficie, di ordine 12, hanno il punto [4] come punto 10$^{\text{plo}}$ con cono tangente (riducibile) fisso; la retta $x_1 = x_2 = 0$ come 9$^{\text{pla}}$, e 3 rette triple infinitamente vicine a questa nei piani $\xi_3(x_1 x_2) = 0$. L'unica loro aggiunta, di ordine 8, si compone dei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e della terna $\xi_3(x_1 x_2) = 0$ contata due volte.

$a), b)$ sono birazionalmente distinti, poichè il primo è divisibile per 2, e non così il secondo (1).

2. La ricerca di cui ho testè esposti i risultati principali mi ha anche condotto a una classificazione, almeno provvisoria, delle superficie F^{2p-2} di S_p (classificazione per un dato p, perciò di carattere proiettivo), della quale aggiungo un cenno.

Un esempio, anzitutto (2). Sulla superficie generale F^4 di S_3 le ∞^9 quadriche segano un sistema lineare di curve, di grado 16, il quale conduce a rappresentare la detta F^4 sopra una superficie di ordine 16 in S_9, che indicheremo con $\overline{F}^{16}$, diversa dall'altra, che designeremo con F^{16}, pure di S_9, contenente soltanto curve intersezioni complete. La $\overline{F}^{16}$ contiene in più il sistema lineare $|\gamma_3^8|$ immagine delle sezioni piane di F^4 e sottomultiplo (divisore) d'indice 2 delle proprie sezioni iperpiane. Entrambe dipendono da 19 moduli, e hanno il numero base $\rho = 1$ (3); ma esse appartengono a famiglie irriducibili distinte, probabilmente senza elementi comuni. Alla F^{16} si può imporre, con una sola condizione, di contenere una retta, e perciò, nella relativa famiglia, ogni sistema algebrico ∞^k comprende ∞^{k-1} superficie contenenti una retta (o una retta in più della propria superficie generica, se questa già ne contiene). Invece la $\overline{F}^{16}$ e tutte quelle della sua famiglia (tutte riferibili a superficie F^4) *contengono solo curve di ordine pari* (immagini proiettive di serie lineari segate su curve algebriche di S_3 dalla totalità delle quadriche); nessuna di esse contiene dunque rette.

Questo esempio può generalizzarsi, sostituendo alla F^4 di S_3 iniziale (generica) una qualsiasi F^{2p-2} di S_p contenente soltanto curve intersezioni complete, e alle quadriche di S_3 le forme di un ordine qualsiasi $k > 1$ in S_p.

Chiamo pertanto « di 1ª specie » le F^{2p-2}, di famiglie irriducibili dipendenti da 19 moduli, nelle quali la superficie generica contiene soltanto curve intersezioni complete (come la detta F^{16}). Queste esistono per ogni valore di p; possono obbligarsi, con una sola condizione, a contenere una retta, o anche una conica, o altre curve. Una M_3^{2p-2} con superficie sezioni di questo tipo contiene ∞^1 rette formanti una rigata R, la cui considerazione (come già detto) è fondamentale per trovare per le M_3^{2p-2}, in questo caso, un limite superiore al carattere p.

(1) Altri sistemi lineari di superficie di generi uno in S_3, di dimensioni e grado inferiori, si ricavano in modo analogo da S_0-coni razionali normali V_3^n di S_{n+2} di ordini $n < 8$, e egualmente con cono quadrico direttore. Per $n > 8$ le forme cubiche occorrenti, dovendo passare per $n-2$ piani di V_3^n, conterebbero per intero intero il detto cono quadrico.

(2) Cfr. anche ENRIQUES, Nota cit. dei « Rendiconti Accademia di Bologna » (13 dicembre 1908), N. B. a p. 6.

(3) SEVERI, « Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc. », vol. CXL, 6 febbraio 1905; « Mathem. Ann. ». vol. 62, 1906, p. 194; « Annales Éc. Norm. Sup. » (3), vol. 25, 1908, p. 449; « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », vol. 30, 2° sem., 1910, p. 265.

Chiamo invece « di 2ª specie » le famiglie irriducibili di F^{2p-2}, dipendenti pur esse da 19 moduli, nelle quali la superficie generica contiene soltanto (come la detta F^{16}) curve multiple di un sistema lineare minimo, che è a sua volta divisore d'indice $k > 1$ delle sezioni iperpiane. Queste esistono solo per particolari valori di p, tali che sia $2p - 2 = k^2(2p' - 2)$, ossia $p = k^2(p' - 1) + 1$. Una M_3^{2p-2} con superficie sezioni di questo tipo non contiene rette; contiene bensì un sistema lineare di superficie $|\Gamma|$, divisore di indice k del sistema delle sezioni iperpiane. Le Γ sono superficie razionali, e le loro intersezioni sono curve razionali (nel qual caso $k \leq 4$), oppure ellittiche (e allora $k = 2$). E per questa via se ne determinano tutti i vari casi.

Le osservazioni precedenti pongono il problema (che non mi consta sia stato risolto), se una superficie F^{2p-2} di S_p, sulla quale un determinato sistema lineare non è divisibile per un certo intero $k > 1$, possa per variazione continua acquistare un divisore di indice k del detto sistema. Sembra che a tale questione dovrebbesi rispondere negativamente.

3. Esistono però anche, almeno per certi valori di p, superficie F^{2p-2} di S_p non di 1ª nè di 2ª specie.

Consideriamo, ad es., una superficie F^8 di S_5 $(p = 5)$, intersezione generica di una V_3^3, ∞^1 razionale normale di piani e non cono, con una forma cubica passante per un suo piano. Essa contiene un fascio di γ_1^3, nei piani di V_3^3; e, come residue di queste rispetto alle sezioni iperpiane, una rete di quintiche δ_2^5; dipende da 18 moduli, e su di essa le curve γ_1^3 e δ_2^5 formano evidentemente una base. Il sistema lineare $|2\gamma_1^3 + 3\delta_2^5|$ rappresenta allora, nel solito senso, una superficie F^{54} di S_{28}, pure a curve sezioni canoniche $(p = 28)$, che contiene un fascio di γ_1^9 e una rete di δ_2^{12}. Questa è la superficie più generale di una famiglia di F^{54}, dipendente da 18 moduli, e non contenuta in altra famiglia più ampia di F^{54}. Una F^{54} di 1ª specie obbligata a contenere una γ_1^9 (e non vincolata ad altre condizioni) dipende anche da 18 moduli, ma contiene soltanto i sistemi $|C^{54} - \gamma_1^9|$, $|C^{54} - 2\gamma_1^9|$, $|C^{54} - 3\gamma_1^9|$, il secondo dei quali ha gli stessi caratteri del sistema $|3\delta_2^{12}|$ sulla F^{54} precedente, e non contiene pertanto, come la precedente, una rete $|\delta_2^{12}|$. Invero, su di essa le curve C^{54} e γ_1^9 formano una base minima (1); sicchè ogni altra curva della superficie potrà

(1) SEVERI, lavori vari ultimi cit. Sulla F^{54} in parola le curve $\varepsilon = C^{54} - 3\gamma_1^9$ costituiscono un secondo fascio di curve ellittiche. Se le curve C^{54}, γ_1^9 formano una base minima, altrettanto avviene per γ_1^9, ε; e viceversa. Ora γ, ε hanno 9 intersezioni; perciò il sistema somma $|\gamma_1^9 + \varepsilon|$ rappresenta una F^{18} di S_{10} (del solito tipo F^{2p-2}, per $p = 10$), sulla quale alle γ, ε corrispondono fasci di curve ellittiche entrambi di ordine 9; e su questa superficie, come su ogni F^{2p-2} generica di 1ª specie assoggettata soltanto a avere una sezione iperpiana spezzata in due γ_1^{p-1}, è ovvio che queste due γ_1^{p-1} formano una base minima. Altrettanto avviene perciò per ε, γ_1^9 e quindi anche per C^{54}, γ_1^9 sulla F^{54}.

rappresentarsi sotto la forma $mC^{54} + n\gamma_1^9$, con m, n interi, eventualmente anche negativi; e ad essa spetta il grado $54\,m^2 + 0 \cdot n^2 + 18\,mn = 18\,m(3\,m + n)$, che non può mai risultare $= 2$ (come occorrerebbe per le δ_2^{12}).

Questa ulteriore categoria di F^{2p-2}, che chiamo « di 3ª specie », potrebbe per ora precisarsi così: superficie appartenenti a una famiglia irriducibile, nella quale la superficie generica ha le sezioni iperpiane C^{2p-2} esprimibili come somme di altre curve (effettive) del tipo $\sum_i k_i \gamma_i$, con $i \geqq 2$, e colle k_i anche numeri interi e $\geqq 2$. Si può supporre che nessun sistema $|\gamma|$ sia somma di altri di ordini inferiori, e in particolare che nessuno di essi contenga uno degli altri. Queste famiglie dipendono tutte da un numero di parametri $\leqq 18$, nè sembrano contenute in altre più ampie.

Per la superficie F^{2p-2} di 1ª e 2ª specie è $i = 1$, e l'unico k rispett. $= 1$ oppure > 1. In queste famiglie di 3ª specie sono però comprese superficie particolari, che appartengono altresì alle famiglie di 1ª o 2ª specie.

La determinazione delle M_3^{2p-2} che hanno superficie sezioni di questo ultimo tipo si effettua con procedimento analogo a quello usato per le superficie di 2ª specie. La classificazione indicata delle F^{2p-2} si è rivelata sufficiente allo scopo che ora mi sono proposto: si vedrà in seguito, da eventuali ricerche ulteriori, se e come converrà modificarla o meglio precisarla.