Gino Fano

Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **15** (1932), p. 3–5

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1932_1>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 gennaio 1932 (Anno X)

Presidenza del prof. sen. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli.* Nota [1] del Corrisp. G. FANO.

Consideriamo una $\mathbf{V}_3$ algebrica, regolare e a generi tutti nulli, la quale ammetta un gruppo continuo *finito* $\mathbf{G}$ di trasformazioni birazionali (gruppo dipendente cioè da un numero finito di parametri). Questo gruppo lascerà invariati entro $\mathbf{V}_3$ infiniti sistemi lineari (ampi quanto si vuole) di superficie algebriche: partendo infatti da un qualsiasi sistema continuo $\mathbf{S}$, lineare o no, di superficie algebriche, i sistemi trasformati di questo mediante le operazioni del gruppo formeranno complessivamente un *corpo* di superficie, di un certo ordine n; e il minimo sistema lineare contenente questo corpo, e così pure il minimo sistema lineare completo determinato dal medesimo gruppo base, saranno sistemi invarianti rispetto al gruppo $\mathbf{G}$ (cioè nuovi corpi). Fra questi sistemi ve ne saranno certo di quelli *semplici*, tali cioè che le superficie del sistema passanti per un punto generico di $\mathbf{V}_3$ non passeranno di conseguenza per altri punti variabili col primo, bastando all'uopo che sia semplice il sistema $\mathbf{S}$. La varietà $\mathbf{V}_3$ potrà così rappresentarsi birazionalmente sopra un'altra varietà algebrica Φ_3, sulla quale il gruppo continuo corrispondente a $\mathbf{G}$ risulterà *proiettivo*.

Nel gruppo proiettivo totale $\mathbf{G}_0$ della varietà Φ_3 vi è certamente qualche sottogruppo continuo ∞^1 *algebrico* (cioè a traiettorie algebriche, e quindi, come è noto da tempo, *razionali*). Invero, se $\mathbf{G}_0$ è un gruppo non integra-

(1) Presentata nella seduta del 3 gennaio 1932.

bile, e contiene perciò almeno un sottogruppo ∞^3 semplice, sono algebrici tutti i gruppi continui ∞^1 contenuti nel precedente ∞^3 (1). Se $\mathbf{G}_0$ è integrabile, si possono da esso staccare algebricamente sottogruppi invarianti di dimensioni decrescenti di un'unità per volta, e quindi anche certo un sottogruppo algebrico ∞^1 (2). Le traiettorie di questo gruppo ∞^1 formeranno, entro Φ_3, una congruenza $\mathbf{C}$ del 1° ordine di curve razionali, dotata di varietà (superficie, linea, punto) unisecante (3); e perciò, con procedimento già usato ripetutamente nella Memoria cit. Enriques–Fano, Φ_3 potrà a sua volta trasformarsi birazionalmente in una nuova varietà, sulla quale alle linee della congruenza $\mathbf{C}$ corrispondano rette; in particolare in un cono Γ_3 di uno spazio conveniente (sul quale a $\mathbf{G}_0$ corrisponderà un gruppo in generale non proiettivo).

Ogni $\mathbf{V}_3$ *algebrica regolare a generi tutti nulli, la quale ammetta un gruppo continuo finito di trasformazioni birazionali, è dunque riferibile birazionalmente a un cono.*

Questo cono Γ^3 rappresenta d'altra parte l'insieme delle ∞^3 coppie di punti appartenenti l'uno dei due a una curva razionale (generatrice del cono), l'altro alla superficie F sezioni iperpiana generica di Γ^3. Indicati con p_a, p_g i generi aritmetico e geometrico di F, sarà (4) Γ^3 di genere geometrico $P_g = 0$ (essendo qui $p = 0$), genere aritmetico $P_a = -p_a$ e irregolarità superficiale $q_2 = p_g - p_a$. Nel caso presente ($\mathbf{V}_3$, Γ_3 regolari a generi nulli) sarà dunque $p_a = p_g = 0$; e la superficie F, sezione del cono Γ^3, sarà razionale, e razionali perciò anche Γ^3 e $\mathbf{V}_3$, oppure una superficie regolare di genere zero e bigenere > 0. Viceversa, ogni cono Γ^3 proiettante una superficie a generi nulli e bigenere $\geqq 0$ ha tutti i generi nulli.

Il cono Γ_3 proiettante una superficie regolare di genere zero e bigenere > 0 ammette bensì gruppi continui proiettivi, ma non è razionale. Non è razionale infatti il sistema ∞^2 delle sue generatrici: mentre d'altra parte entro una $\mathbf{V}_3$ razionale, ossia entro uno spazio S_3, ogni congruenza algebrica del 1° ordine di curve algebriche è razionale. Invero, entro S_3, queste curve incontrano un piano generico secondo i gruppi di punti di un'involuzione piana, che è appunto razionale. Per la stessa ragione, il detto cono Γ^3 non è nemmeno riferibile a un'involuzione di S_3; infatti una congruenza del 1° ordine sulla V_3 rappresentativa di questa involuzione ha per immagine nello spazio S_3 (che è in corrispondenza $[n, 1]$ con quella involuzione) una congruenza anche del 1° ordine, e perciò razionale, generalmente appartenente alla detta involuzione; e anche se l'immagine in S_3

(1) Ciò risulta dalle equazioni dei vari tipi di gruppo semplice proiettivo ∞^3, date in una mia Memoria del 1896 («Mem. R. Accad. di Torino», serie 2ª, t. 46; § 3).

(2) Per dettagli, v. la Memoria Enriques–Fano negli «Annali di Matematica», ser. 2ª, t. 24, 1897; n. 9.

(3) Enriques–Fano, Mem. cit., n. 7.

(4) Severi, «Rend. Circolo Matem. di Palermo», vol. 28, 1909; n. 28.

di ogni curva della prima congruenza si spezzasse in più curve staccate, sarebbero pur sempre razionali entrambe le congruenze. Questi coni Γ^3 costituiscono dunque un tipo di $\mathbf{V}_3$ a generi nulli distinto dalle varietà semirazionali e pseudorazionali considerate in una mia comunicazione al Congresso Internazionale di Bologna (1928)(1).

Concludiamo dunque: *Una varietà algebrica* $\mathbf{V}_3$ *regolare e a generi tutti nulli, la quale ammette un gruppo continuo finito di trasformazioni birazionali, è razionale, oppure riferibile a un cono proiettante una superficie regolare di genere zero e bigenere* >0. Viceversa, una $\mathbf{V}_3$ algebrica regolare a generi nulli, non razionale nè riferibile a un cono del tipo suindicato (p. es. una varietà semirazionale), può ammettere trasformazioni birazionali, e anche schiere continue di trasformazioni birazionali, ma *non gruppi continui finiti* di tali trasformazioni.

Una involuzione di S_3 *è razionale o irrazionale secondo che, come varietà* $\mathbf{V}_3$, *ammette o non ammette gruppi continui finiti di trasformazioni birazionali.* In particolare un'involuzione irrazionale in S_3 non può essere trasformata in sè da un gruppo continuo finito di trasformazioni cremoniane.