Gino Fano

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli

in: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928, Zanichelli, Bologna, 1931, p. 115–121

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1931_3>

G. FANO (Torino - Italia)

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI AVENTI TUTTI I GENERI NULLI

1. - La distinzione, che pareva tradizionale, tra scienze di ragionamento e scienze sperimentali è ormai sorpassata. In ogni scienza hanno parte l'esperienza e il ragionamento; la distinzione concerne solo le reciproche proporzioni. In matematica la parte riservata all'esperienza, piccola e limitata alla fase di scoperta, consiste essenzialmente nell'esame accurato di qualche caso particolare. Io mi propongo appunto di esporre qui il risultato di un po' di lavoro sperimentale, e di qualche congettura ulteriore, riguardo a una questione ardua e importante, che da tempo attende invano la soluzione.

Chi, anche per poco, si è occupato di geometria algebrica a più dimensioni ha incontrato già sui primordi la questione della razionalità o meno della varietà cubica generale dello spazio a 4 dimensioni (V_3^3 di S_4), cioè della possibilità di risolvere l'equazione generale di 3° grado fra 4 variabili mediante funzioni razionali di 3 parametri tali che una soluzione generica della detta equazione si ottenga altresì per una sola terna di valori di questi parametri. Tale questione, posta già da oltre 40 anni, non è ancora risoluta ([1]). In questo frattempo si è, tra altro, brillantemente sviluppata la teoria generale delle superficie algebriche; sono stati considerati, per le superficie, oltre al genere, sia geometrico che aritmetico, i vari plurigeneri, e sono state da CASTELNUOVO determinate le condizioni di razionalità di una superficie, consistenti nell'annullarsi di tutti gli anzidetti generi e plurigeneri, ma che si riducono a due sole condizioni distinte. In relazione a ciò, la questione della razionalità o meno della varietà V_3^3 di S_4 veniva assorbita dall'altra, più generale, della razionalità o meno delle diverse M_3 algebriche aventi gli analoghi caratteri, generi e plurigeneri, tutti eguali a zero.

Fra queste M_3 sono comprese la V_3^4 generale di S_4, e la M_3^6 di S_5 intersezione generale di una forma quadratica e di una forma cubica, la quale M_3^6, quando come forma quadratica si assuma, secondo concetti ben noti, l'insieme delle rette dello spazio S_3, si identifica col complesso cubico generale di questo stesso

([1]) È noto però da tempo che l'equazione accennata sopra può risolversi mediante funzioni razionali di 3 parametri, in modo che una stessa soluzione si ottenga per un certo numero $k > 1$ di terne di valori dei parametri (e anche per $k = 2$).

spazio. È anche una proprietà nota da tempo, sebbene forse non consacrata in nessuna pubblicazione, che quando tale M_3^6 contenga *tre* piani di uno stesso sistema della quadrica passante per essa — ossia il complesso cubico contenga 3 stelle di rette, ovvero (dualmente) 3 piani rigati — questi enti divengono birazionalmente identici alla V_3^3 generale di S_4 ([1]). Bisogna dunque particolarizzare *molto* la detta M_3^6 (la quale in generale non contiene piani; ma a cui si può imporre di contenerne uno, o anche due, o tre, con un numero sempre crescente di condizioni) per renderla birazionalmente identica a una V_3^3 di S_4, e perciò forse ancora non razionale.

Da ciò la mia convinzione che, qualora le varietà in parola a generi nulli siano effettivamente non razionali, la M_3^6 di S_5, e così anche la V_3^4 di S_4, debbano essere *notevolmente più lontane dalla razionalità* che non la V_3^3 di S_4; e perciò per esse debba riuscire più facile l'assodarlo.

E infatti fino dal 1908, e più tardi, nel 1915, per altra via più semplice, mi riescì dimostrare che la V_3^4 generale di S_4 e l'anzidetta M_3^6 generale di S_5 *non sono razionali* ([2]). La V_3^4 generale non contiene altri sistemi lineari completi di superficie regolari a generi tutti eguali all'unità, all'infuori del sistema ∞^4 delle sue sezioni iperpiane; il che basta a differenziarla dallo spazio S_3. Inoltre, essa non ammette affatto trasformazioni birazionali. Nella M_3^6 generale di S_5 sopra accennata, i sistemi lineari completi di superficie regolari aventi i generi eguali all'unità sono soltanto il sistema ∞^5 delle sezioni iperpiane, e i suoi trasformati mediante proiezione doppia, una o più volte, dalle singole rette; e le trasformazioni birazionali si limitano appunto a queste proiezioni doppie, e ai loro prodotti. ENRIQUES ha poi dimostrato ([3]) che questa M_3^6 è riferibile a un'involuzione di S_3, donde appunto l'esistenza in S_3 di involuzioni irrazionali, di cui si aveva così un primo esempio. La M_3^6 è incontrata dai suoi S_3 tangenti secondo sestiche razionali; e in corrispondenza ai punti di una sua superficie razionale si ottiene una congruenza razionale, di ordine >1, di tali sestiche, con superficie unisecante, la quale conduce alla rappresentazione accennata. APRILE ([4]) ha determinato l'ordine di quella involuzione (di ENRIQUES), trovandolo $=216$; ma ha pure osservato che una lieve modificazione del procedimento stesso conduce a rappresentare la M_3^6 sopra un'involuzione I_{36}.

2. - Le due varietà ora considerate appartegono alla categoria delle varietà M_3^{2p-2} dello spazio S_{p+1}, aventi superficie-sezioni regolari coi generi tutti $=1$, e

([1]) Alle ∞^5 superficie sezioni iperpiane di M_3^6 si possono far corrispondere le superficie intersezioni della V_3^3 colle quadriche del suo spazio passanti per 3 sue rette mutuamente sghembe.

([2]) Atti R. Accad. di Torino, vol. 43 (1907-08), 50 (1914-15).

([3]) Rend. R. Accad. dei Licei (5), vol. 21 (1912_1), p. 81.

([4]) Rivista di Matem. e Fis., vol. 1 (1921), p. 133.

come curve-sezioni curve canoniche di genere p. Esse corrispondono ai due casi $p=3$ e $p=4$; un termine ancora precedente, nella loro successione, cioè per $p=2$, è dato dallo spazio S_3 doppio con superficie di diramazione generale del 6° ordine, anch'esso non razionale, perchè la M_3^6 dianzi considerata si proietta da una sua retta appunto in un S_3 doppio, più particolare, del tipo indicato. Esistono varietà M_3^{2p-2} del tipo in parola anche per valori più elevati di p; però, in quanto non siano coni o almeno luoghi di una ∞^2 di rette, forse soltanto per un numero finito di altri valori di p (¹). Non mi è nota, e potrebbe anche non esistere nemmeno, una loro legge di costruzione generale; come pure è tuttora dubbia la razionalità o meno di queste M_3^{2p-2} più generali non rigate ($p \geqslant 5$), ma con grande probabilità di una risposta negativa, almeno per parecchi valori di p. Il gruppo delle loro trasformazioni birazionali cresce e si complica rapidamente, al crescere di p.

Per $p=5$, si ha la M_3^8 di S_6 intersezione generale di tre quadriche, la quale non contiene altre superficie se non intersezioni complete con altre forme. Da una qualsiasi delle sue ∞^1 rette si proietta in una V_3^4 di S_4 contenente una rigata cubica R^3 e, come intersezioni ulteriori coi piani delle ∞^2 coniche di questa R^3, una congruenza del 1° ordine anche di coniche, aventi R^3 come quadrisecante. La M_3^8 si rappresenta quindi sopra un'involuzione I_4 di S_3 (mentre è dubbia l'esistenza di una bisecante razionale delle dette coniche, e quindi la rappresentabilità della detta M_3^8 generale sopra una I_2). Sopra questa M_3^8 esistono pertanto già infinite congruenze razionali, del 1° ordine, di curve razionali; quindi anche trasformazioni birazionali che spostano i punti sulle singole linee di una di queste congruenze; e aggiungendo a queste le ∞^2 proiezioni doppie della M_3^8 dai piani delle sue coniche, si perviene già ad un gruppo birazionale complessivo molto ampio.

Per $p=6$ e $p=7$, cioè negli spazi S_7 e S_8, rientrano in questa categoria le varietà intersezioni di M_4 razionali a curve-sezioni ellittiche (²) con quadriche.

Per $p=6$, si ha la M_3^{10} di S_7 immagine, nel senso Grassmanniano, della varietà ∞^3 di rette di S_4 intersezione generale di due complessi lineari e di un complesso quadratico. Essa si proietta da una delle ∞^1 sue rette in una particolare M_3^6 di S_5; e si può rappresentare sopra un'involuzione I_6 di S_3.

(¹) Potrebbe verificarsi qui un fatto analogo a quello delle superficie a curve-sezioni di genere uno. Queste possono essere razionali, ma soltanto se di ordine $\leqslant 9$; in caso diverso, sono sempre rigate (in particolare coni), e possono avere ordine comunque elevato. Del pari, per p qualsiasi, esistono superficie F^{2p-2} di S_p regolari, con tutti i generi $=1$, e aventi come sezioni curve canoniche di genere p; quindi anche S_0-coni a 3 dimensioni (Γ_3^{2p-2}) di S_{p+1}, proiezioni delle dette superficie da un punto esterno al loro spazio. Ma potrebbe darsi che varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} *non rigate,* con superficie sezioni del tipo indicato, esistessero solo per alcuni valori di p, p. es. solo da un certo valore di p in giù.

(²) SCORZA, Annali di Matem. (3), vol. 15 (1908), p. 217.

Per $p=7$ si ha la M_3^{12} di S_8 intersezione di una quadrica con una M_3^6 « di SEGRE », rappresentante cioè in modo biunivoco senza eccezioni le coppie di punti di 2 piani fissi. Essa contiene due congruenze razionali del 1° ordine di coniche, ciascuna con una rete di superficie razionali bisecanti queste coniche e appartenenti all' altra congruenza; si rappresenta perciò su di un' involuzione I_2 di S_3.

Per $p=8$ rientra ancora in questa categoria, di dubbia razionalità, la M_3^{14} di S_9 immagine, nel solito senso Grassmanniano, della varietà di rette base per un sistema lineare ∞^4 generico di complessi lineari di S_5 [1].

Per $p=9$, si ha lo spazio S_3 doppio con superficie di diramazione generale del 4° ordine, quando se ne consideri come immagine la M_3^{16} di S_{10} rappresentante il sistema (lineare, rispetto allo spazio doppio) delle F^4 tangenti alla superficie di diramazione lungo le curve di 8° ordine e genere 9 sue intersezioni con quadriche (incluse naturalmente, fra tali F^4, tutte le quadriche doppie).

Anche la V_3^3 di S_4 può trovar posto in questo elenco di M_3^{2p-2}, quando le si sostituisca la varietà birazionalmente equivalente che rappresenta, nel senso abituale, il sistema lineare ∞^{14} delle superficie intersezioni di V_3^3 colle quadriche del suo spazio (varietà M_3^{24} di S_{14}, onde $p=13$). Questa varietà è rappresentabile anch' essa sopra un' involuzione I_2 di S_3, e contiene congruenze razionali del 1° ordine di curve razionali con sistemi lineari ∞^4, di grado 3, di superficie razionali bisecanti quelle curve.

Esaminando queste diverse varietà, si ha l'impressione che esse, qualora non siano razionali, tuttavia, al crescere di p, pur con qualche restrizione, *vadano gradatamente accostandosi alla razionalità.* Si osservino le rappresentazioni sopra involuzioni di S_3, di ordine, generalmente, decrescente; la comparsa, per $p=5$, di congruenze razionali del 1° ordine di curve razionali, con superficie razionali prima quadrisecanti, poi bisecanti, e variabili entro sistemi progressivamente più ampi [2]. Queste stesse varietà, dalle curve degli ordini minori in esse contenute, si proiettano in altre, ancora della stessa categoria M_3^{2p-2} di S_{p+1}, corrispondenti a valori più piccoli di p, e contenenti, come immagine della curva da cui si è fatta la proiezione, una rigata che *non* esiste nel caso più generale. (Se la proiezione è fatta da uno spazio incontrante la varietà secondo una curva di ordine n e genere π, l'ordine della M_3 diminuisce di $2(n+1-\pi)$ unità, e la rigata immagine della curva è di ordine $n+2-2\pi$). Vediamo così che, dal

---

(1) V. p. es. SEVERI, Annali di Matem. (3), vol. 24 (1915), p. 189. Questa M_3^{14}, come è dimostrato in una mia Nota posteriore al Congresso (Rend. Acc. dei Lincei (6), vol. 11 (1930), p. 329), è birazionalmente identica alla V_3^3 generale di S_4. Esistono però anche altre M_3^{14} di S_{14}, che presumo birazionalmente distinte dalla prima.

(2) Teniamo conto, naturalmente, delle sole involuzioni e congruenze riscontrate, cioè (sostanzialmente) di quelle che si presentano in modo semplice.

punto di vista birazionale (con qualche limitazione), ***ciascuna delle varietà enumerate comprende come casi particolari le successive*** (corrispondenti a valori più elevati di p), dalla seconda successiva in poi; sicchè il crescere di p implica, in massima, una progressiva ***particolarizzazione*** della M_3. Quasi tutte queste M_3 possono proiettarsi in particolari V_3^4, anche queste contenenti, caso per caso, una rigata che non esiste nella V_3^4 generale. La M_3^6 di S_5, quando contenga due o tre piani di uno stesso sistema della quadrica passante per essa, si identifica birazionalmente coi casi $p=8$ e $p=13$ dianzi accennati. Lo spazio S_3 doppio con superficie di diramazione del 4° ordine, qualora questa superficie ammetta un piano tangente lungo una conica, si identifica colla V_3^3 generale di S_4 (ossia ancora col caso $p=13$), potendosi quello spazio doppio considerare come proiezione di questa V_3^3 ([1]). Ecc.

3. - Poichè la V_3^4 generale di S_4 e la M_3^6 di S_5 dianzi considerata certamente non contengono sistemi lineari di superficie regolari di generi uno e di dimensione superiore rispett. a 4 o 5, mentre nello spazio S_3 esistono sistemi lineari di superficie regolari di genere uno di dimensione notevolmente superiore (p. es. il sistema ∞^{34} di tutte le superficie del 4° ordine; e anche, come vedremo, sistemi di dimensione superiore), è presumibile esistano altresì varietà M_3 a generi e plurigeneri nulli per le quali la dimensione massima di un sistema lineare di superficie regolari di generi uno abbia valori intermedi fra quelli testè indicati; varietà che evidentemente non sarebbero razionali. L'anzidetta dimensione massima costituirebbe per le varietà in parola un invariante assoluto, in base al quale potrebbe stabilirsi una prima loro classificazione. Assumendo per comodità come invariante, che designeremo con Λ, la dimensione stessa aumentata di un'unità, per le varietà M_3^{2p-2} dianzi enumerate sarebbe in ogni caso $\Lambda \geqslant p+2$; ed è possibile, quasi direi probabile, che per le M_3^{2p-2} più generali sia precisamente $\Lambda = p+2$ (come io ho dimostrato per i due casi $p=3$, $p=4$). A una possibile classificazione delle varietà M_3^{2p-2} anzidette, e probabilmente alla stessa testè accennata, si è pure guidati dalle considerazioni seguenti.

Per le superficie algebriche, si suole considerare, fra i diversi invarianti, il così detto ***invariante*** ω (di CASTELNUOVO-ENRIQUES) ([2]), che è un invariante relativo, ma il cui valore massimo per una data classe di superficie birazionalmente equivalenti costituisce un invariante assoluto, e precisamente il ***genere lineare virtuale*** $p^{(1)}$. In particolare, per le superficie con $p_g > 0$ è questo il genere virtuale delle curve canoniche. Per le superficie razionali è $p^{(1)} = 10$; e per queste stesse superficie il valore $p^{(1)} - 1 = 9$ è altresì la massima dimensione di un sistema lineare di curve ellittiche, o anche (il che fa lo stesso) la massima

---

([1]) SEGRE, Mem. Accademia di Torino, ser. 2a, t. 39 (1888).

([2]) Annali di Matem. (3), vol. 6 (1901), p. 165.

dimensione che può raggiungere (in quanto sia effettivo) un sistema lineare $|C-C'|$, differenza fra un sistema lineare $|C|$ e il suo aggiunto $|C'|$.

Per le varietà M_3, il carattere analogo a ω è quello generalmente indicato con Ω_2, cioè il genere aritmetico virtuale della superficie canonica (superficie anch'essa « virtuale » per le M_3 in discorso). Anche Ω_2 è soltanto un invariante relativo; ma un suo valore estremo, per una data classe di varietà birazionalmente identiche, costituirà per la classe un invariante assoluto. In massima, le circostanze che tendono a far crescere ω tendono invece, per la diversa parità della dimensione, a far diminuire Ω_2; il quale, per le varietà qui considerate, è negativo. Sembra perciò che potrebbe convenire fissarsi, per ogni classe di varietà birazionalmente equivalenti (almeno nel campo che ora consideriamo), sul valore minimo di Ω_2, cambiato di segno.

Per le varietà M_3^{2p-2} dianze considerate risulta precisamente $\Omega_2=-(p+2)$; e per quelle del tipo più generale e loro trasformate birazionali è presumibilmente questo il valore minimo di Ω_2 stesso; con che questo nuovo invariante assoluto verrebbe a coincidere coll'invariante Λ di poc'anzi (analogamente a quanto avviene per le superficie razionali).

Il crescere di Λ, nei limiti qui considerati, implicherebbe, in massima, un avvicinamento alla razionalità.

Queste varietà, in quanto effettivamente non siano razionali, potrebbero chiamarsi *semirazionali*. Esse appaiono come intermedie fra gli enti razionali e quelli aventi almeno uno dei generi e plurigeneri maggiore di zero (e gli altri ancora nulli).

Osserviamo infine che, mentre per le superficie razionali l'invariante ω raggiunge il suo massimo ($=10$) nel caso del piano e delle superficie rappresentabili sul piano mediante corrispondenza biunivoca *senza eccezioni*, per le M_3 razionali il valore $\Omega_2=-35$ ottenuto nel caso dello spazio S_3 *non* è un minimo. Per il cono Γ^9 di S_{10} che proietta la superficie F^9 di S_9, rappresentante il sistema lineare di tutte le cubiche piane, da un punto non appartenente al suo stesso spazio S_9, è $\Omega_2=-39$; perciò per gli enti razionali sarebbe $\Lambda \geqslant 39$. E d'altra parte esistono pure in S_3 sistemi lineari di superficie regolari di genere uno e di dimensione >34, cioè superiore a quella del sistema di tutte le F^4 (che sarebbero le analoghe, in S_3, delle cubiche nel piano). È tale il sistema delle F^6 aventi a comune un punto quadruplo e una conica doppia infinitesima infinitamente vicina a questo punto; sistema di dimensione 38, e equivalente a quello segato sul detto cono Γ^9 dalle quadriche del suo spazio (S_{10}). Questo sistema lineare ha la proprietà, non condivisa dal sistema di tutte le F^4, di contenere un sistema lineare di superficie razionali di dimensione inferiore alla propria di un'unità soltanto.

4. - Un altro tipo di varietà algebriche M_3 a generi e plurigeneri nulli, incontrato più volte da ENRIQUES, è quello delle varietà riferibili a M_3^n di S_4 con

retta $(n-2)^{pla}$, e contenenti perciò una ∞^2 razionale del 1° ordine di coniche, nei piani passanti per questa retta. Anche per questa varietà, se del tipo più generale, la razionalità o meno non è finora assodata, ma appare poco probabile. L'invariante relativo Ω_2, per $n \geqslant 4$, vale $-\frac{(n-6)(3n-17)}{2}$.

Per $n=4$, si ha la V_3^4 con retta doppia; poichè questa retta, bisecante le ∞^2 coniche, può pensarsi, nei riguardi di esse, come un piano doppio con quartica (generale) di diramazione, quindi razionale, la detta V_3^4 potrà rappresentarsi sopra un'involuzione I_2 di S_3. È un caso particolare della V_3^4 generale considerata ai num[i] prec.

Per $n=5$ è $\Omega_2=-1$. La retta tripla, nei riguardi delle ∞^2 coniche da essa bisecate, può pensarsi come un piano doppio con sestica di diramazione, quindi di genere uno. E forse non esistono in questa varietà superficie regolari di generi uno, se non isolate.

Per $n=6$ è $\Omega_2=0$, e forse non esistono affatto, sulla varietà più generale di questo tipo, superficie regolari di generi uno.

Queste varietà, che potrebbero chiamarsi *pseudorazionali*, avrebbero come analogo, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superficie razionali e le rigate irrazionali. Le rigate ammettono infinite trasformazioni birazionali, che spostano ogni singolo punto sulla generatrice che lo contiene, ma non altrimenti, salvo casi particolari; e altrettanto avviene per queste varietà, spostandosi ogni punto sulla conica che passa per esso. Per le rigate irrazionali vien meno la coicidenza, riscontrata per le superficie razionali, fra il genere lineare $p^{(1)}$ e il massimo numero di curve di genere uno linearmente indipendenti: sulle rigate ellittiche esistono sistemi lineari di curve ellittiche di dimensione comunque elevata, mentre sulle rigate di genere >1 non esistono affatto curve ellittiche. Così, nelle varietà ora considerate, per $n \geqslant 6$ è presumibile non esistano superficie regolari di generi uno; e cade, per $n>6$, la relazione fra queste superficie e l'invariante Λ, intraveduta per le M_3 del tipo precedente

Elementi per una classificazione di queste varietà pseudorazionali potrebbero essere forniti dal *genere minimo* delle superficie regolari contenute in esse e non appartenenti alla congruenza di coniche, e dalla dimensione del loro sistema. Per le varietà M_3^n più generali di questo tipo, quel genere minimo sarà dato probabilmente dalla retta $(n-2)^{pla}$, come bisecante le ∞^2 coniche; e sarebbe allora $=\frac{(n-3)(n-4)}{2}$.