Gino Fano

Trasformazioni di contatto birazionali del piano

in: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 Settembre 1928, Zanichelli, Bologna, 1931, p. 35–42

G. FANO (Torino - Italia)

TRASFORMAZIONI DI CONTATTO BIRAZIONALI DEL PIANO

1. - Le trasformazioni di contatto nel piano, nello spazio, e anche a più variabili indipendenti, costituiscono una creazione geniale di S. LIE, il quale le ha studiate esclusivamente, o quasi, dal punto di vista differenziale, cioè nell'ipotesi che le funzioui che vi compaiono siano funzioni qualsiansi, soggette soltanto ad avere comportamento regolare nell'intorno di un punto generico della regione considerata. Esse possono anche studiarsi nel campo algebrico e nel campo birazionale, nel quale non sono state però finora molto approfondite. Per quanto a me consta, i lavori principali in argomento sono quelli di L. AUTONNE, il quale, in due Memorie del 1887-88 (1), ha impostato analiticamente il problema per il piano, studiandone alcuni casi elementari; e in lavori successivi (2) ha avviata la ricerca anche per lo spazio a tre o più dimensioni, studiando fra altro i diversi tipi di varietà, da lui dette « primordiales », che corrispondono ai punti e iperpiani come figure di elementi, e che al crescere della dimensione dello spazio ambiente danno luogo a un maggior numero di casi.

Ricordo che si chiama *elemento lineare* o anche solo *elemento* del piano la figura costituita dall'insieme di un punto del piano e di una retta passante per esso. Per la rappresentazione analitica, quando si tratta di elementi propri, si può far uso delle coordinate cartesiane ortogonali x, y del punto, aggiungendo come terza coordinata dell'elemento il coefficiente direttivo p della retta che fa parte dell'elemento. Due elementi infinitamente vicini (x, y, p) $(x+dx, y+dy, p+dp)$ si dicono *in posizione unita*, quando soddisfano alla condizione $dy-pdx=0$, ossia quando il punto dell'uno appartiene alla retta dell'altro (3). *Unione* (« *Verein* ») è ogni sistema ∞^1 di elementi, ciascuno dei quali sia in posizione unita col consecutivo. Nel piano, sono *unioni* tutte le linee, come

(1) Journ. de mathém. (4) vol. 3 (1887), p. 63; vol. 4 (1888), p. 177, 407.

(2) Ultimo, la Memoria riassuntiva: *Sur les formes mixtes*, Annales de l'Univ. de Lyon, Sciences et Médec., 16 (1905).

(3) Per elementi impropri, conviene ricorrere a coordinate omogenee sia di punto (x_1, x_2, x_3) che di retta (u_1, u_2, u_3). La relazione di posizione unita è allora caratterizzata da una qualunque delle due relazioni $\Sigma u_i dx_i=0$ oppure $\Sigma x_i du_i=0$, fra loro equivalenti in forza della $\Sigma u_i x_i=0$.

sistemi di elementi costituiti dai singoli loro punti insieme colle rispettive tangenti; in particolare le rette, figure di elementi a retta fissa e punto variabile; e in più i punti, come sistemi ∞^1 a punto fisso e retta variabile. *Trasformazioni di contatto* sono le trasformazioni delle tre variabili indipendenti x, y, p, cioè del sistema ∞^3 degli elementi del piano, che mutano elementi in posizione unita in elementi così fatti, ossia la relazione $dy-pdx=0$ in sè stessa, cioè ogni unione anche in una unione.

2. - Una trasformazione di contatto fra due piani:

$$x_1=X(x, y, p) \quad y_1=Y(x, y, p) \quad p_1=P(x, y, p) \tag{1}$$

si dirà *birazionale* quando è in pari tempo una trasformazione birazionale delle tre variabili x, y, p; cioè quando le X, Y, P sono funzioni razionali delle x, y, p, e tali che dalle (1), per valori generici di x_1, y_1, p_1, possano ricavarsi le x, y, p come funzioni pure razionali delle prime.

Sono trasformazioni di contatto birazionali le trasformazioni cremoniane del piano, estese agli elementi nel senso di S. LIE, cioè in quanto gli elementi uscenti da un punto P generico vengono già, come conseguenza della trasformazione puntuale, a corrispondere proiettivamente agli elementi uscenti dal punto omologo P'; e le trasformazioni birazionali del piano rigato (da alcuni chiamate trasformazioni « ortiche ») estese in senso duale; quindi anche tutti i loro prodotti, i quali, ovviamente, possono ridursi a prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente; e conducono già a tipi abbastanza complessi. Ai punti e alle rette corrispondono, in generale, sistemi ∞^2 di curve. Sono pure trasformazioni di contatto birazionali le reciprocità piane, che mutano elementi punto-retta in analoghi elementi retta-punto, e le unioni-punti in unioni-rette e viceversa; esse si possono però ottenere come prodotti di trasformazioni dei tipi precedenti.

Nelle trasformazioni cremoniane del piano punteggiato, l'interesse principale si concentra sulle così dette *reti omaloidiche*, cioè sui sistemi ∞^2 di curve, necessariamente *razionali*, dell'un piano, che corrispondono alle rette dell'altro piano. Questi sistemi sono completamente caratterizzati dalle due proprietà seguenti:

a) la *linearità*, cioè per due punti generici del piano passa una e una sola curva del sistema;

b) due curve generiche del sistema hanno una sola intersezione variabile (cioè fuori dei punti basi);

e anzi la proprietà *a*) è in questo caso una conseguenza della *b*). La più generale trasformazione cremoniana si ottiene scegliendo ad arbitrio nei due piani due reti omaloidiche di curve, una delle quali si può sempre supporre che sia la rete delle rette, e ponendo fra queste due reti una proiettività arbitraria.

Nelle trasformazioni di contatto birazionali, i sistemi pure ∞^2 di curve che corrispondono, nei singoli piani, ai punti dell'altro piano, o anche alle rette (poichè punti e rette sono ora per noi sistemi ∞^2 di unioni, fra loro equivalenti), si compongono pure di curve razionali, e sono caratterizzati da due proprietà analoghe alle precedenti, che si potrebbe dire sono ancora le stesse, *limitate al campo infinitesimale.* Esse costituiscono ora due condizioni distinte:

a) Poichè ogni elemento del piano appartiene a un unico punto, come pure a un'unica retta, così: *Vi è nel sistema* ∞^2 *una e una sola curva contenente un elemento generico assegnato.*

b) Due punti (e così due rette) infinitamente vicini hanno a comune un solo elemento, il quale è altresì l'unico elemento dell'un punto (o retta) che sia in posizione unita con un elemento dell'altro. Ne segue che, entro il nostro sistema ∞^2 di curve, una curva generica fissa γ avrà un solo elemento *variabile* in posizione unita con un elemento di ogni singola curva ad essa infinitamente vicina. Per conseguenza, γ avrà anche colle sue infinitamente vicine *una sola intersezione variabile*, e *una sola tangente comune variabile* (mentre le altre, intersezioni e tangenti comuni di una data γ e delle curve infinitamente vicine a questa saranno tutte fisse). In altri termini, *il sistema* ∞^2 *ha come serie caratteristica una* g_1^1.

Chiamerò d'ora in poi *sistema* Ω ogni sistema ∞^2 di linee piane soddisfacenti alle due proprietà *a*), *b*) ultimamente indicate, incluso altresì il sistema ∞^2 dei punti, i quali, considerati come unioni, anche vi soddisfano.

Sono razionali anche le linee di un qualsiasi sistema Ω, risultando ciascuna di esse, in forza della proprietà *b*), riferita birazionalmente al sistema delle sue infinitamente vicine. È pure razionale ogni sistema Ω come ente ∞^2, perchè le sue curve passanti per un punto generico costituiscono ∞^2 diversi enti ∞^1 razionali in esso contenuti.

Ogni trasformazione di contatto birazionale fra 2 piani muta un sistema Ω anche un sistema Ω. E una tale trasformazione può individuarsi dando nei piani stessi due sistemi Ω arbitrari, uno dei quali può supporsi sempre che sia il sistema dei punti o delle rette, e ponendo fra i 2 sistemi, come enti razionali ∞^2, una trasformazione cremoniana arbitraria. Anche in ciò è ovvia l'analogia colle trasformazioni cremoniane.

3. - A quali condizioni devono soddisfare le curve di un sistema Ω? Già si è detto che le curve (γ) di questo sistema sono razionali. Ora le C^n piane razionali (generalmente irriducibili) formano un unico sistema continuo di dimensione $3n-1$. E poichè gli $\binom{n-1}{2}$ punti doppi di una curva generica del sistema assorbono $(n-1)(n-2)$ sue intersezioni fisse colle curve infinitamente vicine, rimarranno solo più $3n-2$ intersezioni variabili; vale a dire il sistema complessivo di tutte le C^n razionali ha come serie caratteristica una g_{3n-2}^{3n-2} (completa).

Per staccare da questo sistema un sistema ∞^2 con g_1^1 caratteristica, occorrono $3(n-1)$ condizioni ulteriori, tali da implicare complessivamente, per ciascuna curva, un egual numero di intersezioni fisse colle sue infinitamente vicine. Si trova che tali condizioni sono generalmente costituite da un egual numero di contatti con linee algebriche fisse, potendosi anche avere più contatti con una stessa curva, oppure contatti di ordine superiore, eventualmente anche contatti in punti assegnati, assorbenti sempre un numero corrispondente di condizioni fra le $3(n-1)$. Qualcuna di queste linee (come unione) può essere sostituita da un punto, assegnato come multiplo di un ordine dato k; esso assorbe allora $\frac{k(k-1)}{2}$ dei punti doppi, e, per due curve infinitamente vicine, precisamente k intersezioni in più delle $k(k-1)$ già assorbite dai suddetti punti doppi. Si può altresì richiedere che uno o più dei punti doppi variabili siano cuspidi; il che, per ciascuno di questi punti, implica una condizione fra le $3(n-1)$. Mentre però la curva generica di un sistema Ω può avere punti doppi ordinari e cuspidi variabili, gli eventuali punti multipli di ordine superiore a due dovranno essere tutti fissi, cioè punti basi del sistema.

Naturalmente, imponendo a una curva razionale di ordine assegnato n di avere complessivamente $3(n-1)$ contatti con curve algebriche arbitrarie, ne risulterà un sistema ∞^2 soddisfacente alla proprietà *b*), ma in generale non alla proprietà *a*). Perchè risulti soddisfatta anche quest'ultima proprietà, dovranno le curve a cui le C^n devono essere tangenti (o le altre condizioni che vi si possono sostituire) essere scelte con particolari criteri, che non sono in grado per ora di precisare.

Se la curva generica di un sistema Ω ha soltanto punti multipli ordinari, essa sarà di classe $\nu = 2(n-1)$; e perciò il numero $3(n-1)$ delle condizioni ulteriori cui essa è assoggettata risulta $= n+\nu-1$. E poichè ogni eventuale cuspide diminuisce ulteriormente di un'unità la classe ν, e conta in pari tempo come una condizione fra le $3(n-1)$ suddette, si può affermare altresì che, dopo fissato il numero delle cuspidi delle C^n generica di un sistema Ω, e conseguentemente la classe ν di questa curva, sarà $n+\nu-1$ il numero delle condizioni ulteriori cui la curva stessa dovrà ancora soddisfare.

A chiudere questa prima parte della comunicazione, aggiungo due osservazioni:

1°) In un sistema continuo di curve piane algebriche, indicando con n, ν rispettivamente l'ordine e la classe della curva generica del sistema, la somma $n+\nu$ (carattere duale di sè stesso) può ricevere un significato geometrico molto semplice: cioè il numero degli elementi di questa curva generica che sono in posizione unita rispettivamente con altrettanti elementi di una curva infinitamente vicina. P. es.: nel sistema di tutte le C^n piane, due curve generiche infinitamente vicine hanno n^2 intersezioni, e altrettante coppie di elementi in posizione unita; e n^2 è appunto la somma dell'ordine n e della classe $n(n-1)$.

2°) L'*aequatio directrix* (PLÜCKER) $\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$, nella quale Φ indica un polinomio nelle 4 variabili x, y, x_1, y_1, definisce fra i 2 piani (x, y) e (x_1, y_1) una trasformazione di contatto algebrica, ma in generale non birazionale. Perchè sia tale, occorre ancora e basta che i 2 sistemi ∞^2 di linee rappresentati da $\Phi=0$ quando vi si considerino x, y come coordinate e x_1, y_1 come parametri e viceversa soddisfacciano entrambi alla proprietà *a*) di cui sopra, oppure entrambi alla proprietà *b*); poichè la proprietà *a*) dell'uno equivale alla proprietà *b*) dell' altro.

4. - Per uno studio ulteriore delle trasformazioni di contatto birazionali del piano riesce utile la rappresentazione, già data da LIE [1], del sistema degli elementi lineari di un piano sullo spazio punteggiato; rappresentazione algebrica e generalmente biunivoca, quindi birazionale.

Fra le coordinate (ξ, η, p) di un elemento lineare del piano e le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto dello spazio poniamo le relazioni:

$$x=\xi; \qquad y=\frac{1}{2}p; \qquad z=\eta-\frac{1}{2}p\xi$$

dalle quali si ricava, viceversa:

$$\xi=x; \qquad \eta=z+xy; \qquad p=2y.$$

Si ha così una rappresentazione birazionale della varietà ∞^3 degli elementi del piano sopra lo spazio punteggiato. E poichè l'equazione differenziale $d\eta-pd\xi=0$, che caratterizza le coppie di elementi in posizione unita, cioè le unioni del piano, si muta nell'equazione $dz+xdy-ydx=0$, equazione Pfaffiana di un certo complesso lineare non speciale A, così alle unioni del piano (linee e punti, come insiemi ∞^1 di elementi) corrispondono nello spazio linee appartenenti al complesso lineare A, cioè le cui tangenti sono rette di questo complesso; e viceversa. In particolare a linee piane algebriche corrispondono linee del complesso A anche algebriche, in corrispondenza birazionale colle prime; e viceversa. È noto che queste curve appartenenti a un complesso lineare hanno in ogni loro punto, come piano osculatore, il piano polare di questo stesso punto rispetto al complesso; ogni loro singolarità è *autoduale*; inoltre, se sono algebriche, hanno la classe eguale all'ordine.

Le trasformazioni di contatto birazionali del piano avranno per immagini le trasformazioni cremoniane dello spazio, che mutano in sè l'equazione Pfaffiana del complesso lineare A, cioè il sistema degli elementi punto-retta, e quindi anche il sistema degli elementi punto-piano di questo complesso. Le chiameremo *trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare* A.

Ai sistemi Ω del piano, in particolare ai sistemi ∞^2 dei punti e delle rette,

---

[1] *Geometrie der Berührungstransformationen* I, p. 238. La rappresentazione risale però ai vecchi lavori di LIE del 1872-74.

corrisponderanno nello spazio *congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso lineare* A (congruenze che indicheremo con Ω_0).

Più particolarmente, agli ∞^2 punti e alle ∞^2 rette del piano corrispondono due congruenze lineari speciali di rette contenute nel complesso lineare A. Introducendo coordinate omogenee di punto (x, y, z, t), sono queste le due congruenze lineari di direttrice (unica) $x=t=0$, rispettivamente $y=t=0$. Designeremo con p_0 e r_0 queste due direttrici, e con p ed r le rette delle due congruenze.

Sono elementi fondamentali della rappresentazione:

Nello spazio, tutti i punti delle due rette p_0 e r_0, a ciascuno dei quali corrispondono gli ∞^1 elementi di un'unione; a ogni punto di p_0, gli elementi di una retta parallela all'asse η; a ogni punto di r_0, gli elementi di uno stesso punto improprio.

Nel piano, l'elemento costituito dal punto all'infinito dell'asse η (punto che indicheremo con A) insieme colla retta all'infinito (chc indicheremo con a). A questo elemento Aa corrispondono gli infiniti punti del piano $t=0$, ossia p_0r_0. Più particolarmente, ai singoli elementi consecutivi ad Aa nell'intorno di 2° ordine di A corrispondono i punti delle diverse rette del fascio p_0r_0.

A una curva piana algebrica di ordine n e classe ν in posizione generale (più precisamente, non passante per A nè tangente alla retta a) corrisponde nello spazio una curva sghemba di ordine $n+\nu$, appartenente al complesso lineare A e avente le due rette r_0 e p_0 rispettivamente come corda n^{pla} e come corda ν^{pla}. P. es.: alle rette $(n=1,\ \nu=0)$, le rette r del complesso A semplicemente incidenti alla r_0; alle coniche $(n=\nu=2)$, le quartiche appartenenti al complesso e aventi sia r_0 che p_0 come corde.

Ora, le curve sghembe razionali di ordine assegnato $n+\nu$ e appartenenti a un dato complesso lineare dipendono da $2(n+\nu)+1$ parametri. Imponendo a queste di avere le rette r_0 e p_0 come corde delle multiplicità indicate, rimangono ancora disponibili $n+\nu+1$ parametri. D'altra parte, le curve piane razionali di un sistema Ω, quando se ne indichi con n l'ordine e con ν la classe, risultano ancora assoggettate a $n+\nu-1$ condizioni ulteriori, consistenti in altrettanti contatti con curve piane assegnate (o passaggi per punti). Nella rappresentazione del sistema degli elementi del piano sullo spazio punteggiato, queste ultime condizioni si traducono, per le curve della congruenza corrispondente Ω_0, nell'appoggiarsi in $n+\nu-1$ punti a altrettante curve (non necessariamente distinte) appartenenti anch'esse al complesso A. Risulta così confermato che le curve di ordine $n+\nu$ (razionali, appartenenti al complesso A) che soddisfano alle condizioni accennate dipendono ancora da due parametri. Esse costituiscono una congruenza del 1° ordine appartenente al complesso A, e le cui direttrici, o linee focali, p_0 e r_0 incluse, sono esse medesime linee di questo complesso.

Se le curve piane del sistema Ω passano per A, oppure sono tangenti alla a, una o più volte, le curve del complesso A loro immagini sono di ordine inferiore a $n+\nu$, e diminuisce corrispondentemente anche la multiplicità di una almeno delle corde r_0 e p_0. Viceversa, a una curva sghemba di ordine m appartenente al complesso A, non appoggiata nè a r_0 nè a p_0, corrisponde una curva piana di ordine e classe $2m$, avente (fra altro) due punti m^{pli} infinitamente vicini, in A e nel punto consecutivo sopra a. Es.: alle ∞^3 rette del complesso, le ∞^3 coniche passanti per A e ivi tangenti alla a (LIE). E a una congruenza del 1° ordine di linee del complesso, le cui linee focali appartengono pure al complesso, corrisponde nel piano un sistema Ω; se le curve sono di ordine m, su ciascuna vi saranno $2m-1$ fuochi (calcolando solo quelli generalmente distinti).

La determinazione di tutti i sistemi Ω di curve piane equivale pertanto alla determinazione di tutte le possibili congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti a un dato complesso lineare, e aventi per linee focali esclusivamente linee del complesso medesimo. Le linee della congruenza possono anche passare per uno o più punti fissi, ciascuno dei quali assorbirà 2 dei $2m-1$ fuochi.

5. - Nel piano, una trasformazione di contatto birazionale si può definire assegnando ad arbitrio due sistemi Ω fra loro omologhi e la corrispondenza birazionale subordinata fra essi come enti razionali ∞^2. Corrispondentemente, nello spazio, una trasformazione cremoniana inerente a un dato complesso lineare A si può individuare assegnando ad arbitrio due congruenze Ω_0 — cioè congruenze del 1° ordine di curve razionali del complesso del tipo indicato —, e la corrispondenza birazionale fra esse subordinata.

Può avvenire in particolare, che vi sia, nel complesso lineare, una congruenza lineare speciale (di rette) la quale si muti pure in una congruenza del medesimo tipo. È interessante vedere, in questo caso, in qual modo di una linea comunque data appartenente al complesso lineare A si può costruire la corrispondente, che apparterrà anche a quel complesso. Indichiamo con (h), (k) le due congruenze lineari speciali fra loro omologhe, e fra le quali supponiamo assegnata una qualsiasi corrispondenza birazionale; h_0 e k_0 siano le loro direttrici rettilinee. Data ad arbitrio una linea $\mathfrak{C}$, appartenente al complesso A, le rette di (h) che ad essa si appoggiano costituiscono una rigata $\mathfrak{R}$, della quale $\mathfrak{C}$ è, oltre ad h_0, l'unica direttrice (ed asintotica) appartenente al complesso A. Alla rigata $\mathfrak{R}$ corrisponderà entro (k) anche una rigata, la quale all'infuori della direttrice rettilinea k_0 avrà una e una sola direttrice (ed asintotica) appartenente al complesso A: sarà questa la curva omologa a $\mathfrak{C}$.

La questione (che sarebbe interessante risolvere) se le trasformazioni di contatto birazionali del piano possano ottenersi *tutte* come prodotti di sole trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente (n. 2), equivale sostanzialmente all'altra, se le trasformazioni cremoniane dello spazio inerenti a un dato complesso lineare A si possano ottenere come prodotti di quelle particolari fra esse, ciascuna delle quali muta in sè stessa una congruenza lineare speciale (di rette) contenuta nel complesso. Si tratta quindi di un problema di operazioni generatrici di un gruppo abbastanza ampio di trasformazioni cremoniane dello spazio; il che fa presumere che la sua risoluzione non sia molto semplice.

La stessa questione può anche prospettarsi in modo diverso. Due congruenze Ω_0 di curve di uno stesso complesso lineare si dicano fra loro *coniugate* quando le curve di ciascuna delle due incidenti a una stessa curva dell'altra formano, entro la prima come ente razionale, le ∞^2 famiglie ∞^1 di una rete omaloidica. Questa relazione ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare; e basta ch'essa si verifichi, per due date congruenze Ω_0, in uno dei 2 sensi, perchè debba pure verificarsi nell'altro senso. La questione posta dianzi equivale allora a quest'altra: Se da una qualsiasi congruenza Ω_0 contenuta nel complesso Λ si possa passare a una congruenza lineare speciale (cioè a una congruenza Ω_0 di rette) del complesso medesimo pel tramite di un numero finito di altre congruenze Ω_0, ciascuna delle quali sia coniugata alla precedente.

6. - Osserverò infine che un esempio molto semplice di trasformazione birazionale (non proiettiva) inerente a un complesso lineare è dato da una trasformazione da tempo nota, ma per la quale questa proprietà non è stata forse ancora rilevata.

Si tratta della trasformazione involutoria in cui si corrispondono in doppio modo le coppie di punti «coniugati» rispetto a una cubica sghemba γ^3, ossia appartenenti a una stessa corda di questa curva e coniugati armonici rispetto ai 2 punti comuni alla cubica e a questa corda. È una ben nota trasformazione cubica, studiata da Cremona, Sturm, Reye; ai piani corrispondone le ∞^3 superficie cubiche φ^3 aventi la cubica γ^3 come asintotica; ciascuna di esse ha 3 punti doppi nelle intersezioni di γ^3 col piano omologo. Alle rette corrispondono cubiche sghembe, appoggiate a γ^3 in 4 punti; ma per le rette appoggiate a γ^3 questa cubica si spezza; e in particolare ai così detti « raggi osculatori » (*Schmiegungsstrahlen*) della cubica γ^3, cioè alle rette che passano per un punto di γ^3 e stanno nel relativo piano osculatore, corrispondono (a prescindere dalla tangente a γ^3 in quel punto, retta fondamentale, contata 2 volte) anche raggi osculatori, e ai 3 raggi osculatori di γ^3 passanti per un punto generico P dello spazio, i 3 raggi osculatori passanti pel punto omologo P'. Poichè queste 2 terne di raggi stanno rispettivamente nei piani polari di P e P' rispetto al complesso lineare definito dalla cubica γ^3, è chiaro che il sistema degli elementi punto-piano di questo complesso lineare è mutato in sè stesso.