Gino Fano

Reti di complessi lineari dello spazio S_5 aventi una rigata assegnata di rette-centri

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **II** (1930), p. 227–232

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1930_4>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 febbraio 1930 (Anno VIII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Reti di complessi lineari dello spazio* S_5 *aventi una rigata assegnata di rette-centri.* Nota[1] del Corrisp. GINO FANO.

1. La geometria della retta, in particolare dei complessi lineari di rette e loro fasci, in uno spazio qualsiasi è stata già abbastanza ampiamente studiata[2]. Nello spazio a 5 dimensioni, un complesso lineare di rette è in generale privo di punti singolari (complesso *generale*), ma può anche avere una *retta-centro* oppure uno *spazio* S_3*-centro*, luoghi di punti singolari (complessi *singolari*, o degeneri, risp. di 1ª e di 2ª specie). Rappresentato il complesso coll'equazione lineare in coordinate di retta $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$, contenente 15 termini corrispondenti alle combinazioni binarie degli indici da 1 a 6, i tre casi corrispondono all'ipotesi che, assunto $a_{ki} = -a_{ik}$, la caratteristica del determinante emisimmetrico $|a_{ik}|$, che è certamente pari, valga risp. 6, 4, 2. La polarità rispetto a un complesso generale associa ad ogni retta un S_3 polare e viceversa, senza eccezioni; questo S_3 non incontra quella retta, oppure la contiene, secondo che la retta non appartiene o

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) Per la letteratura relativa, cfr. nella *Encykl. der Mathem. Wissenschaften* i due articoli III C 7 (SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, in part. n. 22) e III C 8 (ZINDLER, *Algebraische Liniengeometrie*, in part. n. 23). V. anche BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi...* (2ª ediz., 1923; cap. V). Fra i lavori più recenti in argomento ricordo COMESSATTI, « Atti R. Ist. Veneto », to. 80, parte 2ª, 1920-21, p. 387.

appartiene al complesso. Ad ogni piano viene associato un piano polare, che ha a comune col primo un solo punto, oppure coincide con esso; in quest'ultimo caso si ha un *piano totale* del complesso (cioè le cui rette appartengono tutte al complesso). Un complesso singolare di 1ª specie si compone degli ∞^3 spazi S_3 rigati (S_3 totali) che dalla retta-centro proiettano le rette di un complesso lineare generale di uno spazio S_3 non incidente alla retta-centro; un complesso singolare di 2ª specie si compone delle rette incidenti al suo spazio S_3-centro.

I vari tipi di fasci di complessi lineari in S_5 sono stati determinati da E. v. Weber (1). Per sistemi lineari di tali complessi di dimensione > 1 alcune caratteristiche numeriche sono state determinate da F. Palatini (2). Avendo avuto occasione di approfondire questioni ulteriori, mi è parso che alcuni risultati presentino un certo interesse: ad essi sono dedicati la Nota presente, ed una successiva. Riferendomi soltanto a complessi *lineari*, quest'ultima qualifica sarà talvolta sottintesa.

2. Una rete di complessi lineari di S_5 del tipo più generale contiene un sistema ∞^1 ellittico d'indice 3 di complessi singolari di 1ª specie, le cui rette-centri formano una rigata ellittica del 6° ordine R^6 (3). Ogni R^6 di S_5 ha sempre almeno una cubica piana direttrice; e ne ha precisamente 1) o due (sole) distinte, ed è il caso più generale; oppure 2) una sola

(1) *Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen*, «Math. Ann.», 55, 1901, p. 386; cfr. in part. § 7. Come appare dal titolo, la classificazione dei fasci di complessi viene applicata allo studio dei sistemi di equazioni Pfaffiane. Dovendone approfittare in seguito, indico qui gli 11 tipi di fasci, con qualche maggior dettaglio geometrico:

I. Fasci il cui complesso generico non è singolare. Il fascio può allora contenere: 1) tre distinti complessi singolari di 1ª specie; si determina con due di questi, scelti in modo che la retta-centro di ciascuno dei due non appartenga all'altro; 2) due soli complessi singolari di 1ª specie, uno dei quali ne assorbe due del caso precedente; 3) un unico complesso singolare di 1ª specie; la sua retta-centro appartiene a tutti gli altri complessi del fascio, e ha come S_3 polare fisso un S_3 totale del primo; 4) due complessi singolari risp. di 1ª e 2ª specie, a retta-centro e spazio-centro sghembi; 5) un solo complesso singolare di 2ª specie, il cui spazio-centro ha rispetto agli altri complessi del fascio una retta polare fissa, in esso contenuta.

II. Fasci di complessi tutti singolari, generalmente di 1ª specie: 6) Le rette-centri sono a 2 a 2 sghembe e formano un regolo, il cui spazio è S_3 totale per tutto il fascio; 7), 8) le rette-centri passano per uno stesso punto P e formano un cono quadrico, o risp. un fascio di rette; i due casi si distinguono secondo che i complessi hanno a comune un unico S_3 totale, o un fascio di tali S_3; il fascio 8) contiene anche un complesso singolare di 2ª specie; 9), 10) fasci a retta-centro fissa, che proiettano da questa fasci di complessi lineari di S_3 contenenti due complessi speciali distinti, ovvero uno solo. Infine: 11) fascio di complessi tutti singolari di 2ª specie, i cui spazi-centro formano anche fascio (cioè stanno in un S_4, e hanno a comune un S_2).

(2) «Atti R. Ist. Veneto», 40, parte 2ª, 1900-01, p. 371. Un lavoro successivo dello stesso A. («Giorn. di Matem.», 41, 1903) è dedicato ai complessi lineari e loro fasci in uno spazio qualunque.

(3) PALATINI, nota cit. degli «Atti Ist. Veneto».

(due infinitamente vicine); o infine 3) un intero fascio (razionale) (1). Il tipo 1) è generato da due cubiche piane in piani indipendenti, riferite in una corrispondenza birazionale non proiettiva. Il tipo 2) è caratterizzato dalla proprietà che lo spazio S_4 determinato dalle 3 generatrici uscenti da punti allineati della direttrice cubica contiene sempre il piano di questa stessa linea. Il tipo 3 è generato da cubiche in piani indipendenti e in corrispondenza proiettiva; pensando questa corrispondenza proiettiva estesa agli interi piani delle due cubiche, le congiungenti delle ∞^2 coppie di punti omologhi sono le direttrici rettilinee di una $V_3{}^3$, varietà ∞^1 razionale normale di piani (2), i cui piani contengono le ∞^1 direttrici cubiche di R^6.

I tre tipi anzidetti di R^6 dipendono risp. da $36, 35, 33$ parametri. Poichè anche le reti di complessi lineari di S_5 dipendono da 36 parametri, nasce la domanda se ogni R^6 del tipo 1) sia luogo delle rette-centri dei complessi singolari di qualche rete, e di quante. Vedremo ch'essa è tale per *quattro* reti, una delle quali però degenera nei casi 2) e 3).

Sia R^6 una rigata del tipo 1), colle direttrici cubiche γ, γ' contenute rispettivamente nei piani π, π'. Per ogni rete di complessi lineari avente R^6 come rigata delle rette–centri dei complessi singolari, i piani π, π' saranno piani totali della varietà base. Viceversa, ogni generatrice k di R^6 è retta-centro di ∞^3 complessi singolari di 1ª specie contenenti i piani totali π, π', e nessuno dei quali contiene R^6; infatti R^6 è proiettata da k sopra un S_3 secondo una rigata R^4 con due rette direttrici doppie, e fra gli ∞^3 complessi lineari di S_3 contenenti queste due rette nessuno contiene R^4. Gli ∞^3 complessi considerati di retta-centro k segano dunque ulteriormente R^6 secondo i gruppi di generatrici di una serie lineare completa $g_4{}^3$, fra i quali gruppi precisamente *quattro* (distinti) G_4 costituiscono gli elementi doppi di involuzioni razionali $g_2{}^1$ sopra R^6 (3); e queste quattro $g_2{}^1$ hanno a loro volta quella $g_4{}^3$ come serie lineare doppia (4). Variando k sopra R^6, i gruppi somme di k contata due volte e dei corrispondenti G_4 appartengono sempre alla $g_6{}^5$ segata su R^6 dalla totalità di complessi lineari di S_5; perciò le serie somme di k e delle 4 corrispondenti $g_2{}^1$ coincideranno sempre rispettivamente colle 4 ben determinate $g_3{}^2$ aventi per serie doppia la detta $g_6{}^5$. Questa $g_6{}^5$ è inoltre la serie somma delle due $g_3{}^2$ (di-

(1) C. SEGRE, *Ricerche sulle rigate ellittiche...*, «Atti R. Accad. di Torino», 21, 1885-86. V. anche U. PERAZZO, *Sulla incidenza di rette, piani e spazi ordinari...*, «Mem. R. Accad. di Torino» (2), 54, 1904.

(2) C. SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni...*, «Atti R. Accad. di Torino», 21, 1885-86.

(3) Rappresentata la $g_4{}^3$ con una quartica ellittica di S_3, sono queste le $g_2{}^1$ aventi gli elementi doppi in un piano; cioè quelle determinate dalle generatrici dei 4 coni quadrici passanti per la quartica.

(4) Sopra una cubica piana (ad es.), ogni $g_2{}^1$ è segata dalle rette passanti per un punto fisso della cubica, e il gruppo dei suoi 4 elementi doppi da una conica tangente alla cubica in questo stesso punto.

stinte) costituite dalle terne di generatrici di R^6 che incontrano rispettivamente le cubiche γ o γ' in punti allineati (lo si vede subito riferendosi a un complesso singolare di 2ª specie con spazio–centro incidente secondo rette sia a π che a π').

Fissiamo ora ad arbitrio sopra R^6 una delle quattro g_3^2 aventi come serie doppia la g_6^5 segata dai complessi lineari. Rispetto a questa g_3^2 ogni generatrice k di R^6 ha una g_2^1 residua, e vi è sempre un determinato complesso singolare Γ, di retta–centro k, contenente i 4 elementi doppi (G_4) di questa g_2^1 e i piani totali π, π', ma non R^6. Al variare di k sopra R^6, questi gruppi $k^2 + G_4$ (di sei generatrici) non solo sono equivalenti, ma stanno in una g_6^2 (rappresentata la g_3^2 iniziale con una cubica piana, sono i gruppi ivi segati dalle coniche polari dei punti della cubica; coniche contenute a loro volta nella rete di tutte le coniche polari). E il minimo sistema lineare contenente gli ∞^1 complessi Γ è appunto una rete. Basta all'uopo accertare che l'insieme dei complessi Γ, ∞^1 ed ellittico, è d'indice 3. Ora per una generatrice arbitraria k di R^6 passano esclusivamente un complesso Γ in corrispondenza alla g_2^1 che ha k come elemento doppio, e quell'altro per cui k è retta–centro. Per il primo, k è intersezione semplice con R^6; sicchè R^6 non giace sull'inviluppo dei complessi Γ, e perciò quel Γ conta semplicemente fra i complessi del sistema passanti per k. Conta invece doppiamente il secondo, pel quale k è retta doppia. Complessivamente se ne hanno dunque 3 passanti per k.

In corrispondenza alle 4 serie g_3^2 sopra considerate, troviamo altrettanti sistemi di complessi Γ, e altrettante reti che li contengono e hanno R^6 come luogo delle rette-centri dei complessi singolari. Entro ciascuna di queste reti, appartengono ad un fascio quei complessi che segano su R^6 gruppi di generatrici di una stessa g_6^1; e a questi gruppi corrispondono, sulla cubica rappresentativa della g_3^2, quelli segati da coniche polari di punti allineati. Perciò la g_3^2 inizialmente fissata su R^6 è quella costituita dalle terne di generatrici che sono rette–centri di complessi Γ di un medesimo fascio.

Pertanto: *Le generatrici di una rigata ellittica* R^6 *di* S_5 *con due* (e non più) *direttrici cubiche distinte sono rette-centri dei complessi singolari* (*di 1ª specie*) *di quattro diverse reti. Le terne di generatrici che sono rette–centri di complessi di un medesimo fascio entro le singole reti formano le quattro diverse* g_3^2 *aventi come* g_6^5 *doppia la serie segata su* R^6 *dalla totalità dei complessi lineari di* S_5. *La stessa* g_6^5 *è altresì somma delle due* g_3^2 (distinte) *costituite dalle terne di generatrici appoggiate all'una o rispettivamente all'altra direttrice cubica in punti allineati.*

Il ragionamento precedente è applicabile alle rigate R^6 dei tipi 2) e 3) solo con opportune modificazioni; invero R^6 è allora proiettata da una sua generatrice nel caso 3) secondo una quadrica doppia, e nel caso 2) secondo una R^4 con un'unica direttrice rettilinea, tale perciò che vi sono ∞^1 complessi lineari di S_3 contenenti R^4 e questa direttrice. Senza trattenermi su queste modificazioni, mi limito a osservare che in questi casi vengono a coincidere, su R^6, le due $g_3{}^2$ delle terne di generatrici appoggiate a γ e rispettivamente γ' in punti allineati, e con essi perciò anche la $g_3{}^2$ delle rette-centri dei complessi di uno stesso fascio entro *una* delle 4 reti trovate. Questa rete, al limite, risulta composta di complessi tutti singolari di 2ª specie, cogli spazi-centro passanti nel caso 2) per il piano dell'unica cubica direttrice, nel caso 3) per il piano di una fra le ∞^1 cubiche. La rigata R^6 rimane luogo delle rette-centri dei complessi singolari di altre *tre* reti. Per la R^6 con ∞^1 direttrici cubiche questo viene anche confermato dalle considerazioni esposte al n.° seguente.

3. Quando le rette-centri dei complessi singolari di una rete formano una rigata R^6 del tipo 3) (1), la varietà base della rete contiene come piani totali i piani delle ∞^1 direttrici cubiche di R^6, formanti una $V_3{}^3$; e la rete è perciò contenuta nel sistema lineare Λ di tutti i complessi contenenti questi ∞^1 piani rigati. Nella varietà $M_8{}^{14}$ di S_{14} costituita dalle rette di S_5 questi ∞^1 piani rigati sono anche piani, e formano una $V_3{}^6$ di S_8 con ∞^2 coniche direttrici (immagini dei regoli direttori di $V_3{}^3$); per i detti piani rigati passano dunque (precisamente) ∞^5 complessi lineari di S_5. Rappresentando proiettivamente il loro sistema Λ sopra uno spazio Σ_5, ai complessi singolari di 1ª e 2ª specie contenuti in Λ corrispondono rispettivamente punti di una $M_4{}^3$ e di una superficie F^4 di Veronese; quest'ultima doppia per la $M_4{}^3$, mentre la prima è luogo dei piani tangenti di F^4 e dei piani delle sue ∞^2 coniche. Alle reti di complessi contenute in Λ corrispondono perciò i piani di Σ_5; e per questa via si possono determinare tutti i vari tipi di quelle reti: nelle reti di tipo più generale i complessi singolari hanno per rette-centri appunto le generatrici di una R^6 contenuta in $V_3{}^3$. – In particolare, i piani delle coniche di F^4 sono immagini di reti di complessi singolari aventi una retta centro fissa, direttrice di $V_3{}^3$. Nasce così una corrispondenza proiettiva fra i due sistemi ∞^2 delle coniche di F^4 e delle direttrici rettilinee di $V_3{}^3$; e a una R^6 ellittica formata da queste direttrici corrisponde un sistema ellittico ∞^1 d'indice 3 di coniche di F^4. Accoppiando queste coniche secondo le *tre* involuzioni ellittiche di 2° ordine contenute nel loro sistema, si hanno su F^4 quartiche riducibili di tre diverse reti; i piani assi di queste reti (tutti incidenti ai piani di quelle ∞^1 coniche di F^4) sono le immagini, in Σ_5, delle tre reti di complessi aventi la data R^6 come rigata delle rette-centri.

Risulta così confermato che *Ogni rigata ellittica* R^6 *con* ∞^1 *cubiche direttrici è luogo delle rette-centri di tre diverse reti di complessi lineari.*

(1) Il prof. G. Gherardelli mi comunica che gli ∞^2 complessi lineari contenenti la rigata delle tangenti di una C^6 ellittica normale formano appunto una rete di questo tipo particolare. Mi auguro egli possa presto pubblicare i suoi risultati, applicandoli altresì allo studio delle C^6 ellittiche di S_3 appartenenti a un complesso lineare.

Un piano di Σ_5 non contenuto nella M_4^3 anzidetta può incontrare F^4 in 1, 2, 3 punti; esso è allora immagine di una rete contenente un egual numero di complessi singolari di 2ª specie (oltre a ∞^1 complessi singolari di 1ª specie). Nel primo caso si hanno le reti più generali contenenti un complesso singolare di 2ª specie. Le rette-centri degli ∞^1 complessi singolari di 1ª specie formano allora una rigata razionale R^4 con ∞^1 coniche direttrici. Lo spazio–centro del complesso singolare di 2ª specie contiene due generatrici di R^4 (distinte o coincidenti). Una stessa R^4 è luogo delle rette-centri dei complessi di ∞^1 reti diverse, tutte contenenti lo stesso complesso singolare di 2ª specie; i fasci contenuti in queste reti determinano su R^4, colle loro terne di rette-centri, le ∞^1 serie g_3^2 per le quali le due generatrici contenute nello spazio-centro del complesso singolare di 2ª specie formano una coppia neutra.

Matematica (Geometria). — *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni.* Nota del Corrisp. Gino Fano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.