Gino Fano

Osservazioni sopra una nota del prof. H. F. Baker

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Serie 2, Vol. **65** (1930), p. 93–96

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1930_3>

OSSERVAZIONI

SOPRA UNA NOTA DEL PROF. H. F. BAKER

Nota del S. C. GINO FANO

(Adunanza del 21 gennaio 1932)

Sunto. — Si completano e si mettono in più precisa luce alcuni risultati contenuti in un lavoro del Prof. Baker (Journ. London Math. Soc., vol. 6, p. 176), relativi alla superficie F^5 di S_5 di Del Pezzo e a una varietà studiata dal Prof. U. Perazzo.

In un lavoro pubblicato recentemente nel « Journal of the London Mathem. Society » (1) il prof. Baker dimostra che per la superficie (generale) F^5 di S_5 di Del Pezzo (superficie razionale rappresentata sopra un piano π dal sistema lineare delle cubiche passanti per 4 punti fissi, distinti e indipendenti) (2) passano 10 varietà M_4^3 con 9 rette doppie, del tipo studiato dal prof. Perazzo (3) (varietà di cui la M_3^3 di C. Segre citata nel titolo è intersezione con uno spazio tangente generico), e che due qualunque di queste M_4^3 sono scambiate fra loro da un'omografia involutoria di S_5 che muta in sè la detta F^5. Risultato non privo d'interesse, ma suscettibile di essere completato; al che giova soprattutto mettere in evidenza il carattere gruppale della questione, inerente alle omografie che mutano in sè la F^5.

La F^5 di Del Pezzo contiene 5 reti omaloidiche di cubiche sghembe, rappresentate sul piano π rispettivamente dalle rette, e dalle reti delle coniche passanti per 3 dei 4 punti fondamentali;

(1) Vol. 6 (1931), fasc. 3, p. 176 (pres. 12 marzo 1931), col titolo: « Segre's ten nodal cubic primal in space of four dimensions and Del Pezzo's surface in five dimensions ».

(2) Rendic. Circolo Matem. di Palermo, vol. 1°, p. 241 (1887).

(3) Atti della R. Accad. di Torino, vol. 36 (1901).

5 fasci di coniche, residui di queste reti rispetto alle sezioni iperpiane; 10 rette, rappresentate su π dai 4 vertici e dai 6 lati del quadrangolo fondamentale. Queste rette possono designarsi con simboli c_{ik}, dove ik è una combinazione binaria dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, in guisa che due fra esse siano sghembe o incidenti secondo che i rispettivi simboli hanno o non hanno un indice comune (1). Ogni retta è perciò incidente a altre *tre*, e i punti d'intersezione delle 10 rette a 2 a 2 sono complessivamente 15; le *sei* rette che non incontrano una assegnata fra le 10 (Baker, l. c.), p. es. la c_{12}, formano un seilatero semplice — il seilatero $c_{13}\, c_{24}\, c_{15}\, c_{23}\, c_{14}\, c_{25}$ — che diremo « corrispondente » alla c_{12} (2). Ogni rete di cubiche su F^5 ha come rette fondamentali (non incontrate dalle cubiche della rete che non la contengono come parte) *quattro* rette fra le 10, mutuamente sghembe, aventi simboli con *un* indice i comune; possiamo perciò designare le 5 reti, in relazione a quest'indice, coi simboli (1), (2), (3), (4), (5). Viceversa, la retta c_{ik} è fondamentale per le *due* reti (i), (k).

Le 10 varietà M_4^3 di Perazzo considerate dal prof. Baker sono coordinate alle 10 rette c_{ik} di F^5. Da ogni retta c_{ik} la F^5 è proiettata in una quadrica di S_3, e il seilatero corrispodente a c_{ik} in un seilatero giacente su questa quadrica coi lati appartenenti alternativamente ai due diversi regoli. In quest'ultimo seilatero le tre congiungenti delle coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto P_{ik}; si ha allora una delle dette M_4^3 come luogo degli ∞^2 piani di S_5 appoggiati al piano proiettante $c_{ik}\, P_{ik}$ e a 3 lati a 2 a 2 non consecutivi del seilatero di F^5 corrispondente a c_{ik}. Variando questa terna di lati, si hanno due diverse generazioni, con due diversi sistemi ∞^2 di piani, della stessa M_4^3; e

(1) Basta ad. es. designare con c_{15}, c_{25}, c_{35}, c_{45} le rette corrispondenti ai 4 punti fondamentali (1, 2, 3, 4), e cogli altri simboli c_{ik} $(i, k \neq 5)$ le rette aventi per immagini i lati del detto quadrangolo rispett. *opposti* ai lati ik.

(2) Il sistema delle 10 rette di F^5 è una C_6^{10} riducibile, la quale (come si vede p. es. dalla rappresentazione piana) costituisce l'intersezione completa di F^5 con una quadrica, e si può ottenere colla costruzione seguente. Partendo da un seilatero semplice arbitrario di S_5, non contenuto in un S_4 (e sia ad es. quello sopra indicato delle rette di F^5 sghembe con c_{12}), si considerino le intersezioni dei suoi lati con un medesimo iperpiano generico; le congiungenti delle tracce delle coppie di lati opposti saranno 3 nuove rette del sistema (c_{45}, c_{35}, c_{34}); la rimanente (c_{12}) sarà la retta (unica) incidente alle 3 precedenti.

questa M_4^3 contiene sempre la F^5, perchè fra i piani di ciascun sistema ∞^2 vi sono sempre quelli di uno tra i fasci di coniche esistenti su F^5.

Tutto ciò premesso, ogni omografia sulla F^5 deve operare una certa sostituzione sulle 5 reti di cubiche sghembe; e, viceversa, si può individuare un'omografia su F^5 riferendo proiettivamente due arbitrarie fra le 5 reti anzidette, in modo che si corrispondano, in ordine qualsiasi, le rispettive quaderne di rette fondamentali (da considerarsi in certo modo come punti della superficie). Si ha così, come gruppo totale delle omografie su F^5, un gruppo G_{120}, oloedricamente isomorfo al gruppo totale su 5 elementi, e che opera appunto come tale sulle 5 reti di cubiche; e sulle dieci rette di F^5, quindi anche sulle dieci M_4^3, esso opera come sulle 10 combinazioni binarie degli stessi elementi. Ora le operazioni involutorie del gruppo G_{120} sono di due tipi diversi, secondo che lasciano fisse 3 delle 5 reti di cubiche su F^5 e scambiano le altre due (tipo $\mathbf{I}_1$), oppure ne lasciano fissa una sola e scambiano le altre a coppie (tipo $\mathbf{I}_2$). Vi sono perciò 10 omografie $\mathbf{I}_1$, ciascuna delle quali lascia fisse 4 rette c_{ik} e le corrispondenti M_4^3, e scambia a coppie le rimanenti 6; e 15 omografie $\mathbf{I}_2$, ciascuna delle quali lascia invariate 2 rette c_{ik} e le relative M_4^3, e scambia a coppie le rimanenti 8. Complessivamente, le coppie di rette, o di M_4^3, scambiate fra loro da omografie involutorie della F^5 sono $3.10+4.15=90$; e poichè le coppie stesse, distinte, sono 45, è a prevedere che ognuna di queste coppie verrà scambiata non solo da una (come trova il sig. Baker), ma *da due diverse omografie involutorie*. Un'omografia di tipo $\mathbf{I}_1$, quella p. es. che scambia le sole reti (4) e (5) e che possiamo indicare simbolicamente con 123 (45), scambia fra loro le rette c_{14} e c_{15}, c_{24} e c_{25}, c_{34} e c_{35}, tutte coppie di rette con un indice comune, e perciò composte di rette sghembe. Viceversa due rette sghembe e le relative M_4^3 sono scambiate da un'omografia di tipo $\mathbf{I}_1$ e da una di tipo $\mathbf{I}_2$ (p. es. c_{14} e c_{15} anche dall'involuzione 1 (23) (45)). Invece due rette incidenti, ossia senza indici comuni, e le corrispondenti M_4^3, sono scambiate da *due* omografie entrambe di tipo $\mathbf{I}_2$, p. es. c_{12} e c_{34} dalle involuzioni (13) (24) 5 e (14) (23) 5.

Un'omografia del tipo $\mathbf{I}_2$, e sia ad es. la 1 (23) (45), quando si rappresenti la F^5 sul piano in modo che alla rete di cubiche invariante (1) corrispondano le rette di questo piano, dà luogo nel piano a un'omografia involutoria, perciò omologia armonica, che scambia a coppie i 4 punti fondamentali, e ha quindi per asse una retta non contenente nessuno di questi 4 punti. Su F^5 si ha perciò un'omografia involutoria, per la quale sono uniti tutti i punti di una cubica sghemba irriducibile, quindi tutti quelli di un S_3 (non certo di un S_4) e di una retta, come appunto il sig. Baker trova per lo scambio delle rette da lui chiamate e e p, che sono incidenti. Le omografie del tipo $\mathbf{I}_1$ hanno invece due piani di punti uniti; e tale è appunto quell'unica che il sig. Baker trova per lo scambio delle due rette sghembe e ed a. Invero, ad es. per l'omografia 123 (45) su F^5 è luogo di punti uniti (per considerazioni analoghe alle precedenti) la retta c_{45}. Da questa retta, F^5 e l'involuzione considerata su di essa si proiettano in una quadrica di S_3 e in un'omologia armonica di centro P_{45}; perciò in S_5 lo spazio di punti uniti contenente la retta c_{45}, non potendo certo essere un S_4, sarà il (solo) piano $c_{45} P_{45}$.

Ogni omografia $\mathbf{I}_2$ è il prodotto di due $\mathbf{I}_1$ permutabili, le quali insieme con essa e coll'identità formano un gruppo trirettangolo (o quadrinomio); qualcuna di queste relazioni fra le $\mathbf{I}$ è data anche dal sig. Baker alla fine della sua Nota.