Gino Fano

# Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni

*Rendiconti Acc. Naz. Lincei*, Vol. (1930), p. 329–335

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1930_2>

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

## Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Fascicolo del 16 febbraio 1930 (anno VIII)*


## MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica** (Geometria). — *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni.* Nota[1] del Corrisp. GINO FANO.

1. Le rette dello spazio a 5 dimensioni, quando le loro 15 coordinate grassmanniane $p_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \cdots, 6 \;\; ; \;\; i \neq k \;\; ; \;\; p_{ki} = -p_{ik})$ si interpretino come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio $S_{14}$, sono rappresentate biunivocamente, senza eccezioni, dai punti di una varietà $M_8^{14}$ di questo spazio. Le intersezioni di questa $M_8^{14}$ con spazi minori $S_{14-i}$ sono immagini di varietà basi di sistemi lineari $\infty^{i-1}$ di complessi lineari; in particolare, per $i = 1$, di un unico complesso lineare. Il prof. Severi, in una Memoria dedicata alle varietà grassmanniane di spazi qualsiansi $S_k$ entro un $S_r$[2], ha dimostrato che, nel caso che ora ci interessa, le sezioni della grassmanniana $M_8^{14}$ con spazi $S_{13}, S_{12}, S_{11}, S_{10}$ generici entro $S_{14}$ sono varietà razionali; che la sezione con un generico $S_9$ è ancora una $M_3$ regolare di generi nulli, ma di dubbia razionalità; e inoltre sulla $M_8^{14}$ e sulle sue sezioni con spazi generici $S_{13}, S_{12}, S_{11}$, cioè su queste $M_{8-i}^{14}$ di $S_{14-i}$ per $i = 0, 1, 2, 3$, non esistono altre varietà algebriche di dimensione $7 - i$ all'infuori delle loro intersezioni complete con forme del rispettivo spazio; in altri termini, su queste $M_{8-i}^{14}$ le sezioni iperpiane costituiscono sempre una base minima. Mi propongo ora di dimostrare che

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1930.

(2) *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare*, « Ann. di Matem. », (3) 24, 1915, p. 89.

quest'ultima proprietà sussiste anche per $i = 4, 5, 6$, ossia per le sezioni con spazi $S_{10}, S_9, S_8$ generici; e che la sezione con un $S_9$ generico, di dubbia razionalità, è riferibile a una varietà (forma) cubica di $S_4$, priva di punto doppio.

Comincerò appunto collo studio della varietà $M_3^{14}$ intersezione della grassmanniana $M_8^{14}$ di $S_{14}$ con un $S_9$ generico del suo spazio, ossia della varietà $\infty^3$ di rette di $S_5$ base per un sistema lineare $\infty^4$ generico di complessi lineari.

2. Un sistema lineare $\infty^4$ generico $\Lambda$ di complessi lineari di $S_5$ contiene $\infty^3$ complessi singolari di 1ª specie, le cui rette–centri $a$ hanno per luogo una varietà $M_4^4$ di $S_5$ (1). Esse la ricoprono semplicemente, ossia per un punto generico P della $M_4^4$ passa una sola retta $a$: se ne passassero due, ne passerebbero infinite, perchè P sarebbe punto singolare per due complessi del sistema e quindi per tutti quelli del loro fascio, il che può avvenire soltanto per punti particolari di $M_4^4$. Ne segue che, fra gli $S_4$ polari di P rispetto ai complessi del sistema $\Lambda$, uno solo è indeterminato; perciò questi $S_4$ formano un sistema lineare $\infty^3$, cioè hanno a comune *una* retta passante per P, che sarà retta base di $\Lambda$. E la stessa $M_4^4$ è ricoperta semplicemente anche dalle $\infty^3$ rette base $b$ di $\Lambda$.

Nello stesso modo come, in $S_3$, una rete di complessi lineari del tipo più generale conduce a una quadrica ricoperta semplicemente dai due regoli delle direttrici degli $\infty^1$ complessi speciali della rete e delle $\infty^1$ rette basi, così avviene qui per la detta $M_4^4$, ricoperta semplicemente dalle $\infty^3$ rette $a$ e dalle $b$. La relazione fra questi due sistemi, a differenza di quanto avviene sopra una quadrica di $S_3$, non è però reciproca. P. es. ogni $S_3$ congiungente una retta $a$ con una $b$ è spazio totale per il complesso del sistema $\Lambda$ avente $a$ come retta–centro, e contiene perciò una seconda retta $b$, generalmente distinta dalla prima. (Infatti su questo spazio gli $\infty^4$ complessi di $\Lambda$ segano un sistema di complessi solamente $\infty^3$, perciò generalmente con due rette basi). E così pure (invertendo il ragionamento) lo spazio $S_3$ congiungente due $b$ generiche contiene una retta $a$. Invece lo spazio $S_3$ di due rette $a$ non contiene in generale nessuna $b$; e se ne contiene una, contiene infinite $b$ e anche infinite $a$, formanti, in generale, i due regoli di una quadrica. Invero, nelle ipotesi indicate, lo spazio $S_3$ delle due $a$ è totale per due diversi complessi del sistema $\Lambda$, e perciò per tutti quelli di un fascio [generalmente del tipo 6), fra quelli indicati nella nota (1) a p. 227 di questi « Rendiconti »]; donde segue appunto la proprietà enunciata.

In un $S_4$ generico sono contenute $\infty^1$ rette $a$ formanti una rigata $R^{10}$ (2), e $\infty^1$ rette $b$ formanti una rigata ellittica $R^5$ (base per il sistema $\infty^4$ di

(1) F. Palatini, « Atti R. Ist. Veneto », 40 (parte 2ª) 1900–1901, p. 371 e sg. Cfr. in particolare n. 15.

(2) F. Palatini, loc. cit.

complessi lineari segato da $\Lambda$ su questo $S_4$). Questa $R^5$ ha una $\infty^1$ anche ellittica di direttrici cubiche, i cui piani formano una $M_3^5$ avente $R^5$ come doppia [1]; le intersezioni ulteriori di questi piani colla $M_4^4$ sono le generatrici $a$ della precedente $R^{10}$ (anch'essa perciò ellittica). Infatti, entro l'$S_4$ considerato, lo spazio $S_3$ di due $b$ deve sempre contenere una $a$; e poichè queste $a$ sono soltanto $\infty^1$, ciascuna di esse deve appartenere a infiniti di quegli $S_3$, e quindi al piano asse di uno dei loro fasci. L'intersezione delle due varietà $M_4^4$ e $M_3^5$ ($\infty^1$ di piani) si compone perciò di $R^5$ contata due volte e di $R^{10}$; e le generatrici di $R^{10}$ sono trisecanti di $R^5$.

3. Designeremo d'ora in avanti semplicemente con $M_4^4$ la varietà (di Palatini) contenente i due sistemi $\infty^3$ di rette $a$ e $b$; con $M_3^4$ la sua sezione con un $S_4$ generico ($\Pi$); con $R^{10}$ e $R^5$ le rigate di rette $a$ e $b$ contenute in questo $S_4$.

I due sistemi di rette $a$ e $b$ contenuti in $M_4^4$ sono entrambi in corrispondenza birazionale colla detta $M_3^4$, e quindi tra loro. D'altra parte il sistema delle $a$ è in corrispondenza birazionale col sistema $\infty^3$ dei complessi singolari contenuti in $\Lambda$, dei quali esse sono rette-centri; e, considerando $\Lambda$ come uno spazio $\Sigma_4$, quei complessi singolari costituiscono una forma cubica ($V_3^3$) di questo spazio, priva di punti doppi [2]. Perciò: *La varietà $\infty^3$ delle rette basi di un sistema lineare $\infty^4$ generico di complessi lineari di $S_5$* (ossia l'intersezione della grassmanniana $M_8^{14}$ delle rette di $S_5$ con un $S_9$ generico del suo spazio $S_{14}$) *è riferibile birazionalmente a una forma cubica di $S_4$ priva di punto doppio.*

Nella rappresentazione del sistema delle rette $a$ e quindi di $M_3^4$ su $V_3^3$, alle superficie ($\varphi^3$) e alle curve sezioni spaziali e piane di $V_3^3$ corrispondono le rette-centri dei complessi singolari di $\Lambda$ contenuti in un sistema lineare $\infty^3$ (rette formanti una $M_3^7$ [3]) o rispettivamente in una rete (generatrici di una $R^6$ ellittica [4]), e sopra $M_3^4$ superficie razionali $F^7$ e curve ellittiche $C^6$. Alle generatrici di $R^{10}$, che sono rette fondamentali per il sistema lineare $|F^7|$ e tali che ogni $F^7$ contiene 5 di esse [5], corrispondono su $V_3^3$ i punti di una curva fondamentale ellittica $\gamma_1^5$. Si riconosce facilmente che le $F^7$ hanno curve sezioni di genere 4, e sono segate su $M_3^4$

(1) Cfr. p. es. C. SEGRE, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », 2 (1888), p. 45 e sg.

(2) Un punto doppio potrebbe essere costituito soltanto da un complesso singolare di 2ª specie, oppure da un complesso singolare di 1ª specie la cui retta-centro sia in pari tempo retta base per $\Lambda$; nessuna di queste due eventualità può verificarsi se il sistema $\Lambda$ è preso in modo generico.

(3) F. PALATINI, loc. cit. La varietà base di questo sistema lineare $\infty^3$ si compone delle rette di $S_5$ quadrisecanti la $M_3^7$; per un punto generico di $S_5$ ne passa una sola; per un punto di $M_3^7$ ne passa un fascio.

(4) F. PALATINI, loc. cit. Cfr. anche la mia Nota precedente, a p. 227 di questi « Rendiconti ».

(5) F. PALATINI, loc. cit.

dalle forme cubiche dello spazio $\Pi$ passanti per la rigata $R^5$ (1). Esse incontrano $R^5$ secondo curve $C_{16}^{15}$, quadrisecanti le sue generatrici, le quali formano su $R^5$ un sistema lineare di grado 15, e hanno a comune 25 punti fissi, comuni pertanto a $R^5$ e a tutte le $F^7$; questi ultimi sono punti doppi di $M_3^4$ (e di $R^{10}$), e quindi anche di $M_4^4$ (2). La $M_4^4$ di Palatini ha dunque una curva doppia di ordine 25, luogo dei punti da ciascuno dei quali esce tutto un fascio di rette $b$ (basi per $\Lambda$), e che sono in pari tempo singolari per un fascio di complessi contenuti in $\Lambda$ [fascio del tipo 7) indicato nella nota (1) a p. 227 di questi « Rendiconti »]; da ognuno di questi punti esce un cono quadrico di rette $a$ (contenute in $M_4^4$).

Alle sezioni spaziali ($F^4$) e piane di $M_3^4$ corrispondono su $V_3^3$ superficie $F^6$ segate dalle quadriche passanti per la quintica fondamentale $\gamma_1^5$, e curve $C_3^7$ incontranti $\gamma_1^5$ in 10 punti. Alla rigata $R^5$ contenuta in $M_3^4$ corrisponde una $\varphi^{15}$ avente $\gamma_1^5$ come tripla, cioè la superficie intersezione di $V_3^3$ colla varietà di 5° ordine costituita dalle corde di $\gamma_1^5$: in particolare alle generatrici di $R^5$ corrispondono le quartiche intersezioni ulteriori di $V_3^3$ colle rigate cubiche determinate dalle involuzioni $g_2^1$ su $\gamma_1^5$ (3), e ai 25 punti doppi di $M_3^4$ (che appartengono a $R^5$) le 25 corde di $\gamma_1^5$ contenute in $V_3^3$ e quindi in $\varphi^{15}$.

4. I complessi lineari di $S_5$ segano sulla varietà $\infty^3$ delle rette $b$ (base di $\Lambda$) un sistema lineare di congruenze, di dimensione 9 e grado 14, al quale corrisponde sulla $M_3^4$ dello spazio $\Pi$ il sistema lineare completo $|F^4 + R^5|$ (come si vede immediatamente riferendosi p. es. al complesso delle rette incidenti a uno spazio $S_3$ contenuto in $\Pi$). Ne segue che la detta $M_3^4$ è proiezione della $M_3^{14}$, sezione della grassmanniana $M_8^{14}$ con un $S_9$ generico, da una sua quintica ellittica $\delta_1^5$ della quale $R^5$ è l'immagine (4). E nella rappresentazione di questa $M_3^{14}$ di $S_9$ (5) sopra una forma cubica di $S_4$ priva di punto doppio (cfr. n.° prec.), alle sezioni iperpiane

(1) Le generatrici di $R^5$ sono rette basi di $\Lambda$, perciò di ogni sistema contenuto in $\Lambda$; sono dunque quadrisecanti di ogni $M_3^7$, e di ogni $F^7$ contenuta in $\Pi$. La forma cubica passante per una $F^7$ contiene perciò sempre $R^5$.

(2) A titolo di conferma, ricordiamo che una forma di $S_{2k}$ obbligata a passare per una $V_k$ assegnata ha in conseguenza un numero finito di punti doppi in punti semplici di questa (SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*..., « Mem. R. Acc. di Torino », (2) 52, 1902; n. 7). Per una forma di 4° ordine di $S_4$ obbligata a contenere $R^5$ questo numero è appunto 25.

(3) Queste quartiche incontrano $\gamma_1^5$ in 7 punti; perciò le generatrici di $R^5$ sono 7-secanti di $R^{10}$.

(4) Entro $M_3^4$, il sistema lineare $|F^4 + R^5| \equiv 4|F^4| - F^7$ sega su $R^5$ solamente gruppi di 5 generatrici; queste generatrici sono dunque rette fondamentali per il sistema $|F^4 + R^5|$.

(5) Varietà appartenente alla categoria delle $M_3^{2p-2}$ di $S_{p+1}$ a curve sezioni canoniche di genere $p$, oggetto di una mia comunicazione al Congresso internazionale dei Matematici a Bologna (1928). Questa comunicazione è in corso di stampa negli Atti del detto Congresso.

di $M_3^{14}$ corrispondono sulla forma cubica $V_3^3$ superficie $\varphi^{21}$ (intersezioni complete con forme di $7^o$ ordine) aventi la quintica $\gamma_1^5$ come linea quadrupla (e la $\varphi^{15}$ anzidetta come unica aggiunta).

Le due varietà $M_3^{14}$ di $S_9$ e $V_3^3$ di $S_4$, prive entrambe di punti multipli, sono così rappresentate birazionalmente l'una sull'altra, in modo che su ciascuna di esse vi è un'unica linea fondamentale, cioè rispettivamente le due quintiche ellittiche normali $\delta_1^5$ e $\gamma_1^5$ (e nessun punto fondamentale isolato). A $\delta_1^5$ corrisponde su $V_3^3$ la superficie $\varphi^{15}$ già accennata; a $\gamma_1^5$ corrisponde su $M_3^4$ la rigata $R^{10}$, segata da una forma di $5^o$ ordine con $R^5$ doppia, onde $R^{10} \equiv 5\,|F^4| - 2\,R^5 \equiv 5\,|F^4 + R^5| - 7\,R^5$; perciò su $M_3^{14}$ le corrisponde una superficie intersezione completa con una forma di $5^o$ ordine, e avente inoltre $\delta_1^5$ come curva $7^{pla}$. Alle superficie $\varphi^3$, sezioni iperpiane di $V_3^3$, corrispondono su $M_3^4$ le $F^7 \equiv 3\,|F^4| - R^5 \equiv 3\,|F^4 + R^5| - 4\,R^5$; perciò su $M_3^{14}$ superficie segate da forme cubiche, e aventi $\delta_1^5$ come curva quadrupla. Poichè dunque alle $\varphi^3$, che costituiscono su $V_3^3$ la base minima del sistema superficie, e alla curva $\gamma_1^5$, che su $V_3^3$ è l'unico ente fondamentale della rappresentazione anzidetta, corrispondono su $M_3^{14}$ superficie intersezioni complete con forme di $S_9$, è ovvio che anche su $M_3^{14}$ esisteranno soltanto superficie intersezioni complete con forme di $S_9$; vale a dire anche su $M_3^{14}$ le sezioni iperpiane $F^{14}$ costituiscono una base minima. Alle superficie intersezioni di $V_3^3$ con forme di ordine $m$, e aventi $\gamma_1^5$ come curva $k^{pla}$, corrispondono su $M_3^{14}$ superficie intersezioni con forme di ordine $3\,m - 5\,k$, e aventi $\delta_1^5$ come curva $(4\,m - 7\,k)^{pla}$.

*La varietà* $M_3^{14}$ *di* $S_9$ *sezione generica della grassmanniana delle rette di* $S_5$ *non contiene altre superficie algebriche all'infuori delle sue intersezioni complete con forme dello spazio* $S_9$. O in altri termini: *Entro la varietà* $\infty^3$ *delle rette di* $S_5$ *base di un sistema lineare* $\infty^4$ *generico di complessi lineari non esistono altre varietà algebriche* $\infty^2$ *(congruenze) all'infuori delle sue intersezioni complete con un nuovo complesso (di grado qualsiasi).*

La $M_3^{14}$ di $S_9$ contiene una semplice infinità di rette, immagini dei fasci di rette $b$ contenuti nella $M_4^4$ di Palatini; quelle rette costituiscono una rigata P, che sarà anch'essa intersezione completa di $M_3^{14}$ con una forma di $S_9$ (1). Nella proiezione di $M_3^{14}$ da $\delta_1^5$ su $M_3^4$, le generatrici di P appoggiate a $\delta_1^5$ danno come immagini i 25 punti doppi di $M_3^4$; se ne trae che *la rigata* P *delle rette contenute in* $M_3^{14}$ *è segata da una forma di* $5^o$ *ordine, ed è essa stessa di ordine* 70. *Ogni generatrice di* P *ne incontra altre sei*: infatti da una ($g$) di queste rette la $M_3^{14}$ si proietta in una $M_3^{10}$ di $S_7$ contenente una rigata cubica $R^3$ di $S_4$, immagine di $g$; gli iperpiani passanti per $R^3$ segano ulteriormente $M_3^{10}$ secondo $\infty^2$ superficie di ordine 7, che incontrano a loro volta $R^3$ secondo una rete di quintiche ellittiche, di

(1) Alle generatrici di P corrispondono su $V_3^3$ cubiche sghembe incontranti $\gamma_5^1$ in 5 punti.

grado due, e perciò con 6 punti basi, doppi per $M_3^{10}$ e immagini delle generatrici di P incidenti a $g$ (1).

5. La proprietà ora dimostrata della $M_3^{14}$ di $S_9$, di avere cioè le proprie sezioni iperpiane come base minima, si estende senz'altro alle sezioni $M_4^{14}$ della grassmanniana $M_8^{14}$ di $S_{14}$ con spazi generici $S_{10}$, riguardo alle $M_3$ loro sezioni iperpiane; ossia alle varietà basi di sistemi lineari $\infty^3$ generici di complessi lineari di $S_5$, riguardo ai sistemi algebrici $\infty^3$ di rette ivi contenuti. Sulla detta $M_4^{14}$ di $S_{10}$ ogni $M_3$ algebrica avrà infatti ordine multiplo di 14; e, se quest'ordine è $14k$, dovrà appartenere al sistema lineare segato dalle forme di ordine $k$.

La stessa proprietà di avere le sezioni iperpiane come base minima sussiste altresì per le superficie $F^{14}$ sezioni iperpiane generiche di $M_3^{14}$, ossia sezioni della grassmanniana $M_8^{14}$ con $S_8$ generici. Benchè la $M_3^{14}$ non sia intersezione completa di 6 forme di $S_9$, è egualmente applicabile ad essa una dimostrazione data da me per le $M_3$ di $S_r$ $(r \geqq 4)$ complete intersezioni di $r - 3$ forme (2), e fondata essenzialmente sulle considerazioni seguenti. Se sulla $F^{14}$ generica esistesse una curva algebrica $\eta$ che non ne fosse intersezione completa con una forma di $S_8$, al variare di $F^{14}$ entro un fascio sulla $M_3^{14}$ anzidetta il sistema lineare completo $|\eta|$ dovrebbe assumere sopra ognuna di queste $F^{14}$ due o più posizioni diverse $|\eta|, |\eta'|, |\eta''| \cdots$; e su qualche particolare $F^{14}$ del fascio due almeno di questi sistemi dovrebbero coincidere. Questa coincidenza non può aver luogo che sopra $F^{14}$ dotate di punto doppio, e la curva virtuale $\eta - \eta'$ deve precisamente ridursi al punto doppio. Ma per queste particolari $F^{14}$ il numero $\rho_0$ degli integrali doppi di 2ª specie distinti diminuisce di un'unità; deve dunque aumentare di un'unità il numero base $\rho$ (tenendo conto anche dell'intorno del punto doppio); ed è perciò inammissibile che sistemi $|\eta|, |\eta'|$ generalmente distinti vengano a coincidere su queste $F^{14}$ a meno del punto doppio (3).

(1) Perciò sulla $M_4^4$ di Palatini il piano di un qualsiasi fascio di rette $b$ incontra la linea doppia in *sette* punti; il centro del fascio stesso, e altri sei.

(2) *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme*, « Atti R. Accad. di Torino », 44 (1909).

(3) Questa superficie $F^{14}$, di genere 1, è immagine del sistema di rette base di un sistema lineare $\infty^5$ generico di complessi lineari di $S_5$. Queste rette basi ricoprono una $M_3^9$ a curve sezioni di genere 8. (L'ordine è dato dal numero delle rette di $S_5$ incidenti in pari tempo a sei spazi $S_3$ e a un piano). Il detto sistema contiene $\infty^4$ complessi singolari di 1ª specie, e la $M_3^9$ delle rette basi è focale per il sistema (di 1° ordine) delle rette-centri; queste ultime sono quadrisecanti della $M_3^9$, e in ogni $S_3$ ne sono contenute 13.

Un sistema lineare $\infty^6$ generico di complessi lineari ha per base una rigata $R^{14}$ di genere 8, e contiene 14 complessi singolari di 2ª specie, i cui $S_3$-centri incontrano $R^{14}$ secondo curve di ordine 9, direttrici di $R^{14}$. Gli iperpiani passanti per questi $S_3$ segano su $R^{14}$ le serie lineari minime $g_5^1$, che sono appunto in numero di 14; le rette mutue intersezioni dei vari $S_3$ sono quadrisecanti di $R^{14}$.

Concludiamo perciò: *La grassmanniana* $M_8^{14}$ *di* $S_{14}$ *delle rette di* $S_5$ *è incontrata da ogni spazio generico* $S_{14-i}$, *ove* $i \leq 6$, *secondo una* $M_{8-i}^{14}$, *sulla quale le sezioni iperpiane costituiscono una base minima.*

*La varietà base di un sistema lineare* $\infty^k$ *generico di complessi lineari di* $S_5$, *finchè* $k \leq 5$, *non contiene altri sistemi algebrici* $\infty^{6-k}$ *di rette all'infuori delle sue intersezioni complete con altri complessi di grado qualunque.*

È possibile quindi che anche per altre grassmanniane l'analogo teorema di Severi abbia una portata più ampia di quanto finora accertato; per le grassmanniane di rette ad es. non è forse da escludere ch'esso abbia a valere per *tutte* le sezioni spaziali generiche di dimensione $\geq 3$, e anche per quelle di dimensione 2 purchè non razionali (ossia dallo spazio $S_5$ in su) (1).