Gino Fano

Sulle curve algebriche contenenti serie autoresidue rispetto alla serie canonica

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Serie 2, Vol. **63** (1930), p. 949–967

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1930_1>

SULLE CURVE ALGEBRICHE CONTENENTI SERIE AUTORESIDUE RISPETTO ALLA SERIE CANONICA.

Nota di Gino Fano

(Adunanza del 26 giugno 1930)

Sunto. — Nella prima parte della Nota vengono determinati alcuni tipi di curve di genere 5 contenenti serie lineari g_4^1 autoresidue; in particolare una C_5^8 di S_4 contenente *sei* diverse g_4^1 autoresidue, valendosi di considerazioni sui coni contenuti nella rete di quadriche di cui la C_5^8 è base. Seguono considerazioni sulla varietà degli spazi cui appartengono i gruppi di una g_{p-1}^r autoresidua su una curva canonica, con particolare riguardo ai casi $r = 2$ e $r = 3$.

1. Una curva di genere p a moduli generali contiene sempre, se $p > 3$, delle serie lineari (speciali) g_{p-1}^1, a due a due mutuamente residue rispetto alla serie canonica; ma non contiene delle g_{p-1} autoresidue di dimensione > 0. L' esistenza di una g_{p-1}^1 completa autoresidua richiede infatti l' annullarsi, per i valori nulli degli argomenti, di una tra le funzioni ϑ pari relative all' ente algebrico, e impone quindi appunto una condizione ai moduli dell' ente stesso; e l' esistenza di una g_{p-1} completa autoresidua di dimensione $r > 1$ richiede analogamente l' annullarsi di una ϑ e delle sue derivate fino all' ordine r incluso (e non oltre) (¹). D' altra parte sulla curva canonica C_p^{2p-2} di S_{p-1}, contenuta in $\binom{p-2}{2}$ quadriche linearmente indipendenti, i gruppi di due g_{p-1}^1 complete mutuamente residue appartengono a spazi S_{p-3} costituenti rispett. i due sistemi di

(¹) Per $r = 1$, la ϑ pari ha le derivate prime che sono funzioni dispari, e perciò nulle pei valori nulli degli argomenti.

S_{p-3} contenuti in un S_{p-5}-cono quadrico (ossia in un cono quadrico avente come asse uno spazio S_{p-5}) passante per la curva stessa; e di tali coni, se $p > 4$, ve ne sono (almeno) ∞^{p-4}. I gruppi di un' eventuale g^1_{p-1} autoresidua devono stare negli spazi S_{p-3} di un S_{p-4}-cono quadrico passante per la detta curva; e l'esistenza di un tal cono nel sistema delle quadriche passanti per la C_p^{2p-2} canonica richiede generalmente $\binom{p-2}{2}$ condizioni, cioè una di più di quelle che possono essere soddisfatte.

La ricerca delle eventuali g_{p-1} autoresidue di dimensione $\geqq 1$, ossia degli eventuali S_{p-4}-coni quadrici passanti per una curva canonica, rientra nel problema della *bisezione della serie canonica*, che per moduli generali è risoluto solo da gruppi G_{p-1} isolati (¹).

Per $p = 4$ la curva canonica C_4^6 di S_3 è intersezione di una quadrica con una superficie cubica, e contiene due distinte g_3^1 mutuamente residue rispetto alla serie canonica, oppure una sola g_3^1 autoresidua, secondo che quella quadrica non è oppure è un cono. Per $p = 5$, la curva canonica C_5^8 di S_4 è contenuta in una rete di quadriche. Escludiamo senz' altro ch'essa sia comunque riducibile, o sia iperellittica (si riduca cioè a una quartica doppia), e anche che contenga una g_3^1; essa costituirà allora la completa varietà base di quella rete, e la quadrica generica della rete non sarà un cono (²). Per la C_5^8 passeranno

(¹) Assunto come modello proiettivo della curva una C^n piana, si tratta delle aggiunte di ordine $n-3$ tangenti alla C^n in ogni loro punto comune con questa, all' infuori dei punti multipli. E questa ricerca rientra a sua volta in quella di curve, anche non aggiunte, tangenti alla C^n in ogni loro intersezione, eventualmente anche con contatti di ordine superiore assegnato; questione ampiamente trattata, da CLEBSCH in poi. Non sembra tuttavia studiata la questione speciale delle serie autoresidue, oggetto della presente Nota.

(²) Se invece la C_5^8 canonica contiene una g_3^1, essa sta su una rigata cubica le cui generatrici contengono i singoli gruppi della g_3^1; e le ∞^2 quadriche passanti per la C_5^8 contengono tutte questa rigata, e sono precisamente gli ∞^2 coni che la proiettano dai singoli suoi punti. Questa particolare C_5^8 contiene una g_4^1 autoresidua nel solo caso ch' essa sia tangente alla retta direttrice della rigata cubica; questa g_4^1 risulta dalla detta g_3^1 con questo punto di contatto come elemento fisso in più. Non esistono altri casi in cui le quadriche passanti per una C_5^8 irriducibile sono tutte coni.

(precisamente) ∞^1 S_0 - coni quadrici, i cui piani dei due sistemi determineranno su di essa coppie di $g_4{}^1$ mutuamente residue, mentre le eventuali $g_4{}^1$ autoresidue saranno determinate dai piani di altrettanti (eventuali) S_1 - coni appartenenti alla rete.

Esistono certamente curve di genere 5 contenenti una, due o tre $g_4{}^1$ autoresidue, tali essendo le $C_5{}^8$ canoniche intersezioni di 3 quadriche delle quali una, o due, o tutte tre siano S_1 - coni (1); e sono pure ovvii taluni casi di $C_5{}^8$ contenenti un maggior numero di $g_4{}^1$ autoresidue, potendosi formare una rete con due fasci di quadriche aventi una quadrica in comune e contenenti ciascuno due S_1 - coni, o anche contenenti quattro S_1 - coni (di cui uno comune ai due fasci) se ciascun fascio è composto di soli coni col vertice comune. In ogni caso entro la rete di quadriche (non tutte coni) passanti per la $C_5{}^8$, considerata come un piano proiettivo, gli ∞^1 S_0 - coni costituiscono una quintica piana, della quale gli eventuali S_1 - coni sono punti doppi (anzi i soli punti doppi, se la $C_5{}^8$ base non ha essa punti doppi). Si tratta dunque di esaminare quanti punti doppi può avere quella quintica piana, eventualmente anche spezzandosi (ma senza contenere parti multiple, nel qual

(1) Di queste $C_5{}^8$, considerate come curve di genere 5 per le quali una o più funzioni ϑ pari si annullano per i valori nulli degli argomenti, vi è cenno in alcune Memorie pubblicate attorno al 1880 (H. WEBER, Math. Ann. 13, p. 47; KRAUS, Math. Ann. 16, p. 245; cfr. in part. § 3, p. 255. KRAUS p. es. ha osservato che una $C_5{}^8$ con due distinte ϑ pari nulle, ossia con due $g_4{}^1$ autoresidue, può proiettarsi in una sestica piana con 2 tacnodi e le cui tangenti tacnodali si incontrano nell'ulteriore punto doppio). Nella Memoria di M. NOETHER: *Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten* (Math. Ann. 16, p. 270-344; cfr. in part. § 19, p. 337) è anche considerato il caso dell'annullarsi di certi gruppi di funzioni ϑ pari di $p=5$ argomenti; ma si tratta di funzioni ϑ a moduli b_{ik} generali, moduli perciò in numero di $\binom{p+1}{2}$ indipendenti, soggetti soltanto, nelle parti reali, alle diseguaglianze necessarie a rendere convergente la nota serie che compare nelle ϑ; di risultati dunque non applicabili a curve algebriche (come avverrebbe se si trattasse di ϑ Riemanniane). Ad. es. perchè queste ϑ diventino iperellittiche, occorrono 6 condizioni distinte, tante quant'è, per $p=5$, la differenza fra $\binom{p+1}{2}=15$ e $2p-1=9$.

caso si avrebbero ancora C_5^8 con punti doppi, o addirittura riducibili).

Segnaliamo subito come particolarmente semplici e interessanti i due casi seguenti:

1) La rete determinata da tre S_1 - coni quadrici aventi per assi i lati di un triangolo. Essa contiene *nove* S_1 - coni (altri due entro ciascuno dei fasci determinati dai primi tre, a due a due), e la sua C_5^8 base contiene perciò *nove* diverse g_4^1 autoresidue.

2) Le reti composte di quadriche aventi uno stesso pentagono (simplex) autopolare; reti di equazione:

$$\lambda \Sigma a_i x_i^2 + \mu \Sigma b_i x_i^2 + \nu \Sigma c_i x_i^2 = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots 4)$$

dove le a, b, c sono costanti, e λ, μ, ν i parametri. In questa rete sono contenuti 5 fasci di coni, ciascuno a vertice fisso e coincidente con uno dei vertici del pentagono autopolare, e *dieci* S_1 - coni, aventi per assi i singoli spigoli del pentagono stesso, ottenibili per i valori di λ, μ, ν che annullano due fra i 5 coefficienti (complessivi) delle x_i^2. *La* C_5^8 *base di questa rete contiene il numero massimo di* g_4^1 *autoresidue, cioè* DIECI (1).

Non ci tratteniamo sugli altri casi in cui il sistema ∞^1 dei coni quadrici contenuto nella rete si spezza. Se invece questo sistema ∞^1 è irriducibile, esso potrà avere al più *sei* elementi doppi, ossia nella rete potranno esservi al più *sei* S_1 - coni. E la presunzione di poter arrivare effettivamente a questo massimo è confermata dalla considerazione, che i vertici degli ∞^1 S_0 - coni della rete hanno per luogo, in generale, una curva di ordine 10 e genere 6, e che per ogni eventuale S_1 - cono contenuto nella rete la retta asse è parte dell'anzidetta C_6^{10}, mentre la parte residua ha tale retta come corda. Riesce perciò presumibile che la C_6^{10} possa arrivare a spezzarsi nell'insieme di una quartica razionale normale e di *sei* sue corde. Vedremo ora come ciò possa ottenersi.

---

(1) Questa rete e la sua curva base C_5^8 dipendono, nello spazio S_4, da 26 parametri (di cui 20 per la determinazione del pentagono autopolare, e 6 per la determinazione della rete entro il sistema lineare ∞^4 di tutte le quadriche aventi l'assegnato pentagono autopolare). *La detta* C_5^8 *dipende perciò da due soli moduli*; in sostanza, dai due invarianti assoluti del gruppo di 5 rette costituito dai 5 fasci di coni entro la rete proposta.

2. Consideriamo in S_4 una rete di quadriche con curva base C_5^8 irriducibile, nella quale il sistema ∞^1 dei coni, supposto pur esso irriducibile, contenga k S_1 - coni, e la linea luogo dei vertici dei coni si componga perciò di una C_{6-k}^{10-k}, che indicheremo con γ, e delle k rette $a_1, \dots a_k$ corde di γ e assi dei vari S_1 - coni $(\Gamma_1, \dots \Gamma_k)$. A ciascuna delle rette a_i la rete associa un S_0 - cono quadrico (polare di a_i rispetto alla rete), i cui due sistemi ∞^1 di piani sono costituiti:

1) dai piani π polari di a_i rispetto ai singoli fasci di quadriche passanti per Γ_i entro la rete (ossia piani polari fissi di a_i rispetto a tutte le quadriche di uno di questi fasci distinte da Γ_i). Poichè uno generico di questi fasci contiene, all'infuori di Γ_i, *tre* S_0 - coni, i piani π sono trisecanti rispetto a γ; inoltre $k - 1$ fra essi contengono le singole rette a di indice $\neq i$;

2) dai piani σ polari dei singoli punti di a_i rispetto all'intera rete (cioè intersezione degli S_3 polari di uno di questi punti rispetto a due quadriche della rete non formanti fascio con Γ_i). Questi piani incontrano γ in $7 - k$ punti, e si appoggiano a tutte le rette a d'indice $\neq i$.

Ogni punto P di γ, come vertice di un S_0 - cono contenuto nella rete, ha rispetto alla rete un piano polare ξ, incidente a tutte le rette a_i; e per ogni punto A di una a_i passano $7 - k$ piani ξ, corrispondenti rispett. a quei punti P che sono reciproci di A rispetto alla rete, secondo 2). In particolare, per $k = 6$ i piani ξ formano un sistema ∞^1 razionale di cui le a_i sono direttrici (semplici); e dalla classificazione di C. SEGRE delle varietà composte di una serie ∞^1 razionale di piani (1) risulta che la varietà luogo dei piani ξ è una M_3^3 con piano doppio e ∞^2 direttrici rettilinee (normale perciò per S_5) (2). Per $k = 5$ invece i piani ξ costituiscono la M_3^5 luogo dei piani appoggiati alle 5 rette a_i: e queste rette, per i cui punti passano *due* piani ξ, sono generatrici della rigata ellittica R^5, doppia per M_3^5 (3).

Per ogni retta a_i, corda di γ, consideriamo ancora il cono δ_i che da essa proietta la curva γ, e il cono inviluppo Δ_i che

(1) Atti R. Accad. di Torino 21 (1885), p. 95.

(2) V. anche: C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni* .....; Mem. R. Accad. di Torino (2) 39 (1888), n. 52.

(3) C. SEGRE, Rend. di Palermo 2 (1888), p. 45-52.

da essa proietta il sistema ∞^1 dei piani ξ. Poichè ogni punto P di γ ha uno determinato dei piani ξ come piano polare rispetto all'intera rete, il piano a_iP e lo spario $a_i\xi$ saranno mutuamente polari rispetto al cono Γ_i, e in questa stessa polarità si corrisponderanno anche i due coni δ_i e Δ_i, riferiti come sopra.

Sulla curva γ, i gruppi di 5 punti che sono vertici di S_0 - coni di un medesimo fascio entro la rete formano una $g_5{}^2$, della quale gli estremi delle corde a_i costituiscono le coppie neutre (immagini cioè dei punti doppi della quintica rappresentativa della $g_5{}^2$). Gli spazi S_3 polari di un punto P di γ rispetto alle quadriche della rete, vale a dire gli S_3 passanti per il piano ξ corrispondente a P nel senso già precisato, segheranno su γ la serie $g_4{}^1$ residua di P stesso rispetto alla detta $g_5{}^2$; perciò i piani ξ saranno $(6 - k)$ - secanti rispetto a γ, e per ogni punto P di γ passeranno $6 - k$ piani ξ. In particolare, per $k = 6$, la quartica γ non sta sulla $M_3{}^3$ dei piani ξ, e la incontra nei 12 punti estremi delle corde a_i.

Similmente, ogni coppia neutra della $g_5{}^2$, ossia ogni retta a_i, ha rispetto alla $g_5{}^2$ una $g_3{}^1$ residua; e, per ogni punto P di γ, la sua coppia residua rispetto a questa $g_3{}^1$, insieme coi 2 estremi di a_i, forma un gruppo della $g_4{}^1$ residua di P stesso rispetto alla $g_5{}^2$. In altri termini, lo spazio S_3 di questi ultimi 4 punti contiene il piano ξ corrispondente a P; vale a dire *un piano* a_iP *e uno spazio* $a_i\xi$ *mutuamente polari rispetto al cono* Γ_i (*come sopra indicato*) *non sono altro che piano e spazio proiettanti da* a_i *un punto qualunque di* γ *e la sua coppia residua rispetto alla* $g_3{}^1$ *residua di* a_i. In particolare se P cade in un punto del gruppo Jacobiano della $g_3{}^1$, lo spazio corrispondente $a_i\xi$ passa per questo stesso punto, e perciò: *I singoli coni* Γ_i *contengono i gruppi Jacobiani delle corrispondenti serie* $g_3{}^1$ (residue di a_i rispetto alla $g_5{}^2$). Anzi, la $g_5{}^1$ costituita dalla $g_3{}^1$ anzidetta e dai due estremi della corda a_i come elementi fissi ha il gruppo Jacobiano composto del gruppo Jacobiano della $g_3{}^1$, di $2(8 - k)$ elementi, e degli estremi di a_i contati due volte; e questo gruppo complessivo di $2(10 - k)$ elementi costituisce la completa intersezione della curva γ col cono quadrico Γ_i. Per conseguenza: *La gerie* $g_5{}^2$ *sopra* γ (e perciò la serie completa che contiene questa) *ha come serie Jacobiana quella segata su* γ *delle quadriche di* S_4 (e che nei casi qui considerati è sempre completa). Questo non porta alla $g_5{}^2$ nessuna restrizione, se γ è razionale, ossia se

$k = 6$; mentre per $k < 6$ la g_5 completa contenente la g_5^2 dovrà avere una Jacobiana assegnata, vale a dire una serie doppia assegnata (differenza fra la Jacobiana e la serie canonica), e non potrà perciò scegliersi che in un numero finito di modi.

Nel seguito della trattazione conviene distinguere il caso $k = 6$ dai casi $k < 6$, fra i quali ultimi, in base a quanto è detto al n.° 1, soltanto il caso $k = 5$ presenta interesse.

3. Cominciamo dal caso $k = 6$; e consideriamo perciò in S_4 una γ^4 razionale normale, e su di essa una g_5^2 arbitraria colle 6 corde a_i determinate dalle sue coppie neutre. Osserviamo che γ^4 dipende da 21 parametri, e la g_5^2 su di essa da altri 9 (come un piano in S_4), in tutto dunque 30; e d' altra parte, nello spazio Σ_{14} delle quadriche di S_4, vi sono ∞^{36} reti, fra le quali ∞^{30} sono 6-secanti (come a noi occorre) rispetto alle varietà ∞^{11} di tutti gli S_1-coni quadrici. Vediamo pertanto se γ^4 colle sue 6 corde, come sopra indicato, determini e eventualmente individui una rete di quadriche come a noi occorre.

Il cono δ_i che proietta γ^4 dalla corda a_i è in questo caso un cono quadrico. Dalla corda a_i è pure determinata la sua g_3^1 residua rispetto alla data g_5^2; e le rette congiungenti a 2 a 2 i punti di uno stesso gruppo di tale g_3^1 formano una rigata di 6° ordine, avente γ^4 come linea doppia, che dalla corda a_i è proiettata secondo un cono quadrico inviluppo Δ_i. Nella forma fondamentale di 2ª specie di asse a_i i detti coni δ_i e Δ_i possono pensarsi come 2 coniche, rispett. luogo e inviluppo, tali che esistono infiniti triangoli, determinati dai singoli gruppi della g_3^1 anzidetta, inscritti nella prima conica e circoscritti alla seconda. Questi triangoli sono allora tutti autopolari in una stessa polarità (¹), la cui conica fondamentale è coniugata (o apolare) a ciascuna delle due precedenti δ_i e Δ_i; indicheremo con Γ_i questa nuova conica della forma fondamentale a_i, cioè questo S_1-cono di asse a_i, rispetto al quale δ_i e Δ_i sono polari reciproci. Risultano così determinati *sei*

(¹) Due triangoli senza elementi comuni inscritti in una stessa conica sono sempre autopolari rispetto a un' altra conica; vi sono allora ∞^1 triangoli inscritti nella prima e autopolari rispetto alla seconda, e i loro vertici formano sulla prima conica appunto i gruppi della g_3^1 determinata dai primi due triangoli.

S_1 - coni quadrici Γ_i aventi per assi le rette a, corde di γ^4; e ciascuno di essi incontra γ^4 nei due estremi della corda stessa a_i contati due volte e nel gruppo Jacobiano della g_3^1 residua di a_i rispetto alla data g_5^2: invero per ogni punto X di questo gruppo il piano a_iX appartiene al proprio S_3 polare rispetto a Γ_i, e perciò anche a Γ_i. A questi sei gruppi di 8 punti corrispondono sulla quintica piana rappresentante la g_5^2 i gruppi segati (all'infuori delle 12 intersezioni fisse) dalle quartiche prime polari dei 6 punti doppi della quintica ([1]); si tratta dunque di gruppi contenuti in una stessa g_8^2, la quale verrà segata su γ^4 dal sistema lineare minimo contenente i 6 coni quadrici Γ_i. Ora tre arbitrari di questi coni, p. es. Γ_1, Γ_2, Γ_3, individuano una rete di quadriche **R** che li contiene ([2]) e che sega su γ^4 l'anzidetta g_8^2. Gli spazi S_3 polari di un punto qualsiasi P di γ^4 rispetto a quei tre coni (anzi, rispetto a tutti i coni Γ_i) segano su γ^4 gruppi della g_4^1 residua di P rispetto alla data g_5^2 (gruppi composti precisamente di una coppia neutra della g_5^2, e della coppia residua di P rispetto alla g_3^1 residua di questa coppia neutra); si tratta dunque di S_3 passanti per uno stesso piano (ξ), e perciò P è sempre vertice di un cono quadrico contenuto in **R**, ossia γ^4 è luogo di vertici di S_0 - coni contenuti in **R**. I due coni, fra questi, che hanno i vertici nei due estremi di una stessa fra le corde a_4, a_5, a_6 segano sempre su γ^4 uno stesso gruppo della g_8^2, e (essendovi corrispondenza biunivoca fra i gruppi di questa g_8^2 e le quadriche di **R**) coincidono perciò in un unico S_1 - cono, il quale (in base al gruppo che deve segare su γ^4) sarà appunto rispett. Γ_4, Γ_5, Γ_6. I sei coni Γ_i appartengono dunque a una stessa rete, la cui C_5^8 base conterrà sei diverse g_4^1 autoresidue.

4. Sia ora $k = 5$. Sulla curva γ_1^5 dobbiamo prendere una serie completa g_5^4 avente come Jacobiana, ossia (trattandosi di curva ellittica) come serie doppia la g_{10}^9 ivi segata dalle quadriche di S_4. A questa condizione soddisfano quattro diverse g_5^4; ma fra essa va esclusa quella segata su γ_1^5 dagli iperpiani, perchè i vertici degli S_0 - coni di un fascio entro la rete da costruirsi non stanno in uno spazio S_3. In una delle altre *tre*

([1]) Gruppi costituiti precisamente dai 2 punti sovrapposti nel punto doppio stesso, contati 2 volte, e dal gruppo Jacobiano della g_3^1 residua.

([2]) I coni Γ_1, Γ_2, Γ_3 segano su γ^4 gruppi della g_8^2 non contenuti in una g_8^1; non stanno perciò certo in un fascio.

g_5^4 complete prendiamo ad arbitrio una g_5^2; la figura complessiva della γ_1^5 colla g_5^2 su di essa dipenderà da $25+6=31$ parametri, tanti precisamente quanti sono quelli di una rete di quadriche di S_4 contenente cinque S_1 - coni. Sopra γ_1^5 risulteranno determinate le cinque coppie neutre della g_5^2, nonchè le 5 corde a_i e le relative g_3^1 residue; e il gruppo Jacobiano G_6 di ciascuna di queste g_3^1 sarà proiettato dalla corda corrispondente a_i secondo piani di uno stesso S_1 - cono quadrico: invero l' S_1 - cono quadrico determinato da 5 di questi piani incontra già γ_1^5 in 9 punti di uno stesso gruppo della g_{10}^9 segata su γ_1^5 delle quadriche, e contiene perciò anche il punto rimanente, cioè il sesto punto del detto G_6. Risultano così determinati i 5 coni quadrici Γ_i di assi a_i; e le complete intersezioni di γ con questi 5 coni sono costituite da gruppi di una stessa g_{10}^2: quella che sulla quintica immagine della g_5^2 è segata (all' infuori delle intersezioni fisse) dalle quartiche prime polari dei punti del piano.

I coni δ_i che dalle rette a_i proiettano γ sono di 3° ordine; le rette congiungenti le coppie di punti di uno stesso gruppo di una g_3^1 su γ formano una rigata di ordine 7 avente γ come linea doppia, e sono proiettate da a_i secondo spazi S_3 di un cono inviluppo di 3ª classe Δ_i. Se per ogni punto P di γ associamo al piano a_iP lo spazio S_3 che da a_i proietta la coppia residua di P stesso rispetto alla $g_3^1 \equiv g_5^2 - a_i$, gli S_1 - coni δ_i e Δ_i risultano riferiti birazionalmente; tenendo fisso P e variando a_i, si avranno 5 spazi S_3 che contengono quaderne di una stessa g_4^1 su γ (la serie residua di P rispetto alla g_5^2 data), e passano perciò per uno stesso piano ξ.

Dico ora che *I coni δ_i e Δ_i, riferiti birazionalmente come sopra, sono polari reciproci rispetto al cono quadrico Γ_i*; ossia gli spazi $a_i\xi$ testè considerati in relazione a un punto qualsiasi P di γ sono gli S_3 polari di questo punto rispetto ai coni Γ_i. In altri termini, immaginando proiettata γ dalla sua corda a_i secondo una cubica piana, *i singoli gruppi della $g_3^1 \equiv (g_5^2 - a_i)$ su questa cubica sono vertici di triangoli autopolari rispetto alla conica* (traccia di) Γ_i. Tenuto presente che sopra una cubica ellittica i gruppi di una g_3^1, contati due volte, sono equivalenti al G_6 Jacobiano di questa; sicchè, se quest' ultimo sta su una conica, i primi sono punti di contatto della cubica con altre coniche e viceversa, possiamo anche dire, con enunciato indipendente dalle cose che precedono: *Se una cubica piana γ^3 è toccata da una sua conica tritangente nei* *punti* A, B, C, *i gruppi di una qualsiasi* g_3^1 *su di essa contenente la terna* ABC *determinano triangoli tutti autopolari rispetto alla conica che sega il gruppo Jacobiano di quella* g_3^1 (ossia il triangolo ABC è autopolare rispetto a tutte le coniche che segano i gruppi Jacobiani delle g_3^1 contenenti la terna ABC).

Sia ε la conica tangente alla cubica γ^3 nei punti A, B, C. Nel fascio determinato da γ^3 e dal trilatero ABC vi è una cubica spezzata nella conica ε e in una retta r, le cui intersezioni A′, B′, C′ con BC, CA, AB, apparterranno a γ^3. Introduciamo coordinate proiettive aventi ABC come triangolo fondamentale, e tali inoltre che l'equazione della conica ε sia $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ (il che equivale ad assumere come retta $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ l'asse di omologia del triangolo ABC e del trilatero delle tangenti comuni di γ^3 ed ε nei punti A, B, C); sia infine $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ l'equazione della retta r. L'equazione della cubica γ^3 potra scriversi sotto la forma:

$$(1)\quad (x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) + \lambda x_1x_2x_3 = 0$$

La trasformazione quadratica $y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$ (che indicheremo con **T**) muta γ^3 nella nuova cubica η^3:

$$(y_1 + y_2 + y_3)(u_1y_2y_3 + u_2y_3y_1 + u_3y_1y_2) + \lambda y_1y_2y_3 = 0$$

e la g_3^2 segata su γ^3 dalle coniche passanti per A, B, C nella g_3^2 segata su η^3 dalle rette del suo piano; in particolare i punti A, B, C della prima nei punti intersezioni di η^3 colla retta $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, e le g_3^1 su γ^3 contenenti la terna ABC nelle g_3^1 segate su η^3 dai fasci di rette aventi i centri nei singoli punti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di quest'ultima retta, tali cioè che $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. I gruppi Jacobiani di queste ultime g_3^1 sono segati su η^3 dalle coniche polari dei punti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, vale a dire:

$$\alpha_1 [(y_1 + y_2 + y_3)(u_2y_3 + u_3y_2) \\ + (u_1y_2y_3 + u_2y_3y_1 + u_3y_1y_2) + \lambda y_2y_3] + \ldots = 0$$

osssia, tenendo presente che $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$:

$$(y_1 + y_2 + y_3)[(\alpha_2u_3 + \alpha_3u_2)y_1 + (\alpha_3u_1 + \alpha_1u_3)y_2 \\ + (\alpha_1u_2 + \alpha_2u_1)y_3] + \lambda(\alpha_1y_2y_3 + \alpha_2y_3y_1 + \alpha_3y_1y_2) = 0$$

Per conseguenza i gruppi Jacobiani delle g_3^1 della cubica γ^3 contenenti la terna ABC verranno segati dalle curve corrispondenti a queste coniche nella **T**, ossia dalle quartiche:

$$(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)\left[(\alpha_2u_3 + \alpha_3u_2)\,x_2x_3 + (\alpha_3u_1 + \alpha_1u_3)\,x_3x_1 + (\alpha_1u_2 + \alpha_2u_1)\,x_1x_2\right] + d\,x_1x_2x_3\,(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3) = 0$$

prescindendo naturalmente dalle 6 intersezioni fisse che cadono a 2 a 2 nei punti A, B, C. Ora quest'ultima equazione, indicando per brevità con γ^3 anche il 1° membro dell'equazione (1), può scriversi:

$$(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3)\,\gamma^3 - (x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)\,(\alpha_1u_1x_1^2 + \alpha_2u_2x_2^2 + \alpha_3u_3x_3^2) = 0$$

Ne segue che i gruppi Jacobiani delle g_3^1 contenenti la terna ABC sono segati su γ^3 dalle coniche

$$\alpha_1u_1x_1^2 + \alpha_2u_2x_2^2 + \alpha_3u_3x_3^2) = 0$$

(sempre con $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$), rispetto alle quali il triangolo fondamentale ABC è appunto autopolare, c. s. v. d.

Dopo di ciò, con ragionamento analogo a quello del n.° prec., si può concludere che la rete determinata da tre qualunque dei coni Γ_i ha la quintica γ come luogo dei vertici degli S_0 - coni contenuti nella rete stessa (perchè gli S_3 polari di uno stesso punto di γ rispetto a quei coni Γ_i formano fascio), e che in questa rete sono pure contenuti i rimanenti due coni Γ_i.

Esistono dunque effettivamente curve C_5^8 di S_4 contenenti *cinque* o risp. *sei* serie g_4^1 autoresidue, e basi di reti di quadriche contenenti un sistema irriducibile di S_0 - coni: in questo n.° e al n.° prec. è indicato come si costruiscono.

5. Mentre una curva canonica C_p^{2p-2} di S_{p-1} a moduli generali ammette, in corrispondenza alle $2^{p-1}(2^p - 1)$ funzioni ϑ dispari dell'ente algebrico, un egual numero, perciò un numero finito, di iperpiani $(p - 1)$ - tangenti, l'esistenza sulla curva di una o più g^1_{p-1} autoresidue equivale a quella di altrettanti sistemi ∞^1 di iperpiani $(p - 1)$ - tangenti (e precisamente di iperpiani costituenti altrettanti S_{p-4} - coni quadrici inviluppo), *senza che ne venga comunque diminuito il numero finito testè indicato degli iperpiani* (p — 1) - *tangenti isolati.*

Questo fatto, di un problema algebrico che ammette generalmente un numero determinato e finito di soluzioni, e che in taluni casi particolari ne acquista in più uno o più sistemi infiniti continui *pur conservando lo stesso numero di soluzioni isolate*, può, a prima vista, destare sorpresa; ed è stato ancora rilevato pochi anni fa, da questo punto di vista, da H. MOHRMANN e da H. G. ZEUTHEN (1), particolarmente per il caso della sestica di genere 4 in S_3. In realtà, quando la quadrica contenente questa sestica diventa un cono, il sistema ∞^1 dei piani tangenti a questo cono e tritangenti alla sestica proviene soltanto da una parte (di classe 6) della sviluppabile bitangente alla sestica a moduli generali, la quale si è staccata dalla sviluppabile totale di questi piani bitangenti e si è ridotta a un inviluppo quadrico contato tre volte, senza comunque influire sui 120 piani tritangenti isolati. La cosa appare più intuitiva ancora se la traduciamo per dualità nello spazio: in una sviluppabile (di ordine 18) che, all'infuori dello spigolo di regresso, ha una curva doppia (di ordine 96) con 120 punti che sono tripli in pari tempo per la superficie e per la sua curva doppia, da questa curva doppia si stacca una parte di 6^0 ordine, in modo che i 120 punti tripli rimangono tutti sulla parte residua (di ordine 90); e la prima parte si riduce inoltre a una conica tripla. In modo analogo si può concepire la cosa per i valori superiori di p.

Esaminando la questione dal punto di vista che ha lucidamente messo in evidenza SEVERI nella sua Nota: *Sul principio della conservazione del numero* (2), si riconosce che, associando a ogni piano di S_3 le infinite C_4^6 ad esso tritangenti, si viene a stabilire fra la varietà dei piani e la varietà delle dette sestiche una corrispondenza algebrica *riducibile*. Invero, quando una C_4^6, inizialmente a moduli generali, viene a stare sopra un cono quadrico, i 120 piani tritangenti della prima danno luogo, per continuità, ai piani tritangenti *isolati* di quest'ultima; e perciò, nella corrispondenza dianzi accennata, le coppie « C_4^6 insieme con un suo piano tritangente isolato » formano un continuo distinto delle coppie « C_4^6 contenuta in

(1) MOHRMANN, Archiv. d. Mathem. u. Phis. 27 (1918) p. 43; ZEUTHEN. ibid. 28 (1919) p. 52.

(2) Rendiconti Circolo Matem. di Palermo 33 (1912), p. 313. Cfr. in particolare i n. 2, 5, 6.

un cono quadrico insieme con un piano tangente di questo cono ». La corrispondenza considerata è perciò somma di due altre, ciascuna di per sè irriducibile, nelle quali alla varietà ∞^3 dei piani corrispondono sistemi C_4^6 di dimensioni diverse: 24, e risp. 23, il secondo contenuto nel primo. E in questo caso il principio della conservazione del numero non è applicabile; questo spiega perchè alle soluzioni ordinarie possano aggiungersene altre *in più*.

Dal punto di vista analitico è poi ovvio che gli iperpiani $(p-1)$ - tangenti isolati della curva canonica dipendono dall'annullarsi di funzioni ϑ dispari, mentre l'esistenza di una g^1_{p-1} autoresidua *completa* e dei conseguenti ∞^1 ulteriori iperpiani $(p-1)$ - tangenti dipende dall'eventuale annullarsi di una ϑ pari; fatto completamente distinto dal precedente. L'esistenza però sulla curva di una g_{p-1} autoresidua completa di dimensione r *pari* e >0 implica che si annullino, sempre per i valori nulli degli argomenti, anche tutte le derivate parziali di una ϑ dispari fino all'ordine r incluso; e a questa ϑ corrisponde allora un sistema ∞^r di iperpiani $(p-1)$ - tangenti alla curva canonica, il quale assorbe uno degli iperpiani $(p-1)$ - tangenti isolati.

6. Serie lineari g^r_{p-1} autoresidue possono esistere solamente sopra curve di genere p tale che sia almeno $p-1>2r$, ossia $p \geqq 2(r+1)$; per $r=2$ dunque, $p \geqq 6$. Per $p=6$, nel qual caso la serie g_5^2 è necessariamente semplice, si ha una curva riferibile a una quintica piana generale; la curva canonica corrispondente C_6^{10} di S_5 è contenuta in una superficie F^4 di Veronese, e i gruppi della g_5^2 autoresidua sono segati su di essa dalle (ossia dai piani delle) coniche di questa superficie. Più generalmente, una curva di genere $p \geqq 6$ contenente una g^2_{p-1} semplice autoresidua è riferibile a una curva piana di ordine $p-1$ avente $\dfrac{(p-1)(p-6)}{2}$ punti doppi appartenenti a una curva (aggiunta) di ordine $p-6$ [1]. Sulla corrispondente C_p^{2p-2} canonica di S_{p-1} i singoli gruppi della g^2_{p-1}, supposta completa, apparterranno a spazi S_{p-4} i quali,

(1) L. KRAUS, l. c. p. 247-48.

in corrispondenza alle ∞^2 serie g^1_{p-1} contenute entro la g^2_{p-2}, si distribuiranno in sistemi ∞^1 razionali normali, e precisamente in coni cubici, di dimensione $p-3$, con spazi S_{p-6} assi; questi ∞^2 spazi S_{p-6} avranno per luogo una varieta M_{p-4} proiettata da ciascuno di quegli S_{p-6}, perciò anche da ogni suo punto, secondo un cono cubico ([1]). La M_{p-4} è dunque del 4° ordine, e, appartenendo a S_{p-1}, ha le curve sezioni (che appartengono a spazi S_4) razionali normali. D' altra parte gli ∞^2 spazi S_{p-4} contenenti i gruppi della g^2_{p-2} formano una varietà di dimensione $p-2$ contenente tutti i coni cubici anzidetti e quindi tutte le corde della M_{p-4}; da ciò si trae che la sezione di M_{p-4} con un S_5 generico è una superficie di 4° ordine le cui corde stanno in una M_4, vale a dire priva di punti doppi apparenti; dunque una F^4 di Veronese ([2]). E la M_{p-4} stessa, se $p>6$, è allora un S_{p-7} - cono proiettante appunto una F^4 di Veronese ([3]) (mentre la M_{p-2} dianzi considerata sarà il cono che dal medesimo S_{p-7} proietta la M_4^3 delle corde della F^4). La C_p^{2p-2} canonica, essendo comune a tutti gli S_{p-6} - coni cubici accennati sopra, apparterrà alla nostra M_{p-4}; vale a dire: *Ogni* C_p^{2p-2} *canonica contenente una* g^2_{p-1} *semplice autoresidua completa è contenuta in un* S_{p-7} - *cono proiettante una superficie di Veronese* (per $p=6$, in una superficie di Veronese). Il risultato vale altresì per serie g^2_{p-1} contenute in serie autoresidue di maggior dimensione.

7. Più generalmente ancora, se una C_p^{2p-2} canonica contiene una g^r_{p-1} autoresidua completa, i gruppi G_{p-1} di questa appartengono a spazi $[p-2-r]$ ([4]), luogo dei quali è una varietà M_{p-2}; per un punto generico di questa passa uno solo

---

([1]) Come, entro la g^2_{p-1}, due qualunque g^1_{p-1} hanno un gruppo G_{p-1} comune, così due qualunque degli S_{p-6} considerati di sopra stanno in uno stesso S_{p-4} (determinato da quel C_{p-1}).

([2]) Severi, Rend. Circolo Matem. di Palermo 15 (1901) p. 33; cfr. n°. 8.

([3]) Enriques, Math. Ann. 46 (1896) p. 191.

([4]) Scriviamo per comodità $[p-2-r]$ anzichè S_{p-2-r}; e così in casi analoghi.

di quegli spazi. L'insieme di due gruppi G_{p-1} della serie, e perciò dei loro spazi, appartiene a un iperpiano $[p-2]$; quei $[p-2-r]$ si incontrano perciò a due a due secondo spazi $[p-2-2r]$, per ognuno dei quali passano ∞^1 $[p-2-r]$, determinati dai gruppi della serie g^1_{p-1} congiungente i primi due G_{p-1}. I $[p-2-2r]$ sono complessivamente in numero di ∞^{2r-2} (tanti, quante le g^1_{p-1} entro g^r_{p-1}), e hanno per luogo una M_{p-4}.

L'iperpiano $[p-2]$ determinato da un G_{p-1} fisso e da un secondo G_{p-1} variabile, quando quest'ultimo tende comunque a coincidere col primo, tende sempre a un $[p-2]$ fisso: quello contenente il G_{p-1} fisso e le tangenti alla curva canonica C^{2p-2}_p nei suoi $p-1$ punti. Ne segue che la M_{p-2} luogo degli ∞^r spazi $[p-2-r]$ considerati ammette lungo ciascuno di di questi spazi un iperpiano tangente fisso, a sua volta $(p-1)$-tangente alla curva canonica.

Gli spazi $[p-2-2r]$ contenuti in uno dei $[p-2-r]$ anzidetti sono, per la M_{p-2}, gli *spazi singolari* di questo $[p-2-r]$ (¹). La M_{p-4} luogo di questi $[p-2-2r]$ singolari ammette anch'essa lungo ogni suo $[p-2-2r]$ un $[p-4]$ tangente fisso: invero, per questo $[p-2-2r]$ passano ∞^1 spazi $[p-2-r]$ incontranti la C^{2p-2}_p canonica nei gruppi G_{p-1} di una g^1_{p-1}, e gli iperpiani tangenti a M_{p-2} lungo questi $[p-2-r]$ formano un S_{p-4}-cono quadrico inviluppo, il cui asse è appunto lo spazio tangente richiesto di M_{p-4}.

La massima dimensione di una g_{p-1} autoresidua sopra una curva di genere p è data dal massimo intero non superiore a $\frac{p}{3}$, fatta solo eccezione pel caso in cui la g_{p-1} sia composta mediante un'involuzione di coppie di punti. Invero, se la detta g_{p-1} è semplice, potremo rappresentarla con una curva C^{p-1}_p di un certo spazio; e allora:

se $p=3r$ (r intero), esistono in S_r curve di ordine $3r-1$ e genere $p=3r$, ed è questo appunto il genere *massimo*

(¹) C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. Circolo Matem. di Palermo 30 (1910) p. 87.

delle C^{3r-1} di S_r (¹); queste curve C^{3r-1}_{3r} (se $r \geqq 3$) sono contenute in rigate razionali normali di ordine $r-1$ e ne formano l'intersezione con una ipersuperficie di 4° ordine passante per $r-3$ sue generatrici, tranne per $r=5$, nel qual caso la corrispondente C^{14}_{15} può anche stare sopra una F^4 di Veronese, ed è allora riferibile a una C^7 piana generale. Non esistono invece curve C^{3r-1}_{3r} appartenenti a S_{r+1};

se $p = 3r+1$, esistono in S_r curve C^{3r}_{3r+1}, e il loro genere è inferiore di *due* unità (se $r \geqq 3$) al massimo raggiungibile dalle curve di ordine $3r$ in S_r; mentre non esistono curve C^{3r}_{3r+1} appartenenti a S_{r+1}. Le curve di un dato ordine e spazio e di genere inferiore di *due* unità al massimo si trovano enumerate in una mia Memoria (²), e fra esse è compresa ad es., per ogni valore di $r \geqq 3$, la C^{3r}_{3r+1} intersezione generale di un cono normale ellittico di ordine r con una superficie cubica;

infine, se $p = 3r+2$, esistono in S_r curve C^{3r+1}_{3r+2}, e il loro genere è inferiore di 4 unità, se $r \geqq 4$, al massimo compatibile coll' ordine $3r+1$ in S_r (se $r=3$, di 5 unità), mentre non esistono curve così fatte appartenenti a S_{r+1}.

In ogni caso, su tutte queste curve di ordine $3r-1$, $3r$, o $3r+1$ di S_r la serie canonica è segata dalle quadriche dello stesso spazio.

D' altra parte, se la g^r_{p-1} fosse composta con un' involuzione γ^λ_n, ove $n \geqq 3$, la sua dimensione massima non potrebbe superare $\dfrac{p-1}{n}$, e quindi nemmeno $\dfrac{p-1}{3}$.

Invece, a prescindere anche dalle curve iperellittiche, la C^{2p-2}_p canonica può contenere un' involuzione γ_2^1 di genere

---

(¹) Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*; Atti R. Accad. di Torino 24 (1889); cfr. n. 27 e seg.

(²) *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque*, Mem. R. Accad. di Torino (2) 44 (1893), n.° 30.

$\pi > 0$ [1], e una g_{p-1} autoresidua composta con quest' involuzione e di dimensione $> \frac{p}{3}$. P. es. l'intersezione generale di un cono ellittico normale di ordine $p - 1$, appartenente perciò allo spazio S_{p-1}, con una quadrica di questo spazio è una C_p^{2p-2} canonica contenente una γ_2^1 ellittica, e, se p è numero dispari, delle g_{p-1} autoresidue di dimensione $\frac{p-3}{2}$ composte con quella γ_2^1.

Abbiamo così modo di costruire curve di genere assegnato p e contenenti una g_{p-1} autoresidua della massima dimensione possibile.

Ad es., una g_{p-1}^3 autoresidua semplice può aversi solo per $p \geqq 9$. Per $p = 9$ esiste infatti una C_9^{16} canonica di S_8 riferibile a una C_9^8 di S_3 intersezione generale di una quadrica e di una superficie di 4° ordine; la detta C_9^{16} è contenuta in una superficie F^8 a sezioni ellittiche (di 2ª specie, secondo Del Pezzo [2]), e i gruppi G_8 della g_8^3 autoresidua appartengono agli spazi S_4 contenenti le ∞^3 quartiche razionali della superficie F^8. Gli spazi $[p - 2 - 2r]$ considerati al principio di questo n.°, ossia le rette intersezioni dei detti S_4 a due a due, sono le corde di F^8; esse costituiscono una varietà M_5^{10} (la M_{p-4} del caso generale), la quale lungo ognuna di quelle rette ha un S_5 tangente fisso, determinato dai piani tangenti a F^4 negli estremi di tale corda. Gli ∞^3 spazi S_4 costituiscono a loro volta una M_7, toccata lungo ogni singolo S_4 dall'iperpiano che incontra F^8 secondo la quartica contenuta in tale S_4 contata 2 volte.

---

(1) Le rette congiungenti le coppie di punti coniugati in quest' involuzione formano una rigata di ordine $\nu = p + 2\pi - 3$. Poichè tale rigata appartiene a uno spazio di dimensione $p - 1 = \nu - 2\pi + 2$, essa, se non è un cono, è certamente *speciale* (C. Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Ann. di Matem. (2) 22 (1894), § 22).

(2) Rend. Circolo Matem. di Palermo 1 (1887), p. 241. Per queste F^n di S_n il sistema delle corde costituisce, se $n \geqq 5$, una varietà M_5 di ordine $\binom{n-3}{2}$; ossia la proiezione generica di F^n su S_4 ha $\binom{n-3}{2}$ punti doppi impropri.

8. Una C_p^{2p-2} canonica di S_{p-1} è incontrata da un iperpiano generico in $2p-2$ punti; e le $\binom{p-2}{2}$ quadriche linearmente indipendenti passanti per essa incontrano questo iperpiano secondo un egual numero di quadriche pure linearmente indipendenti passanti per quei $2p-2$ punti. Supponiamo che la C_p^{2p-2} canonica sia altresì la varietà base totale del sistema delle quadriche passanti per essa; vale a dire che essa non stia su una superficie F^{p-2} a sezioni razionali normali, rigata o F^4 di Veronese, ossia non contenga nè una g_3^1 nè, se $p=6$, una g_5^2 autoresidua. Le sezioni di queste quadriche coll'iperpiano considerato avranno allora a comune quei *soli* $2p-2$ punti; e a queste quadriche di S_{p-2} i detti $2p-2$ punti imporranno sole $2p-3$ condizioni distinte. Anzi il passaggio di tali quadriche per uno *qualunque* dei $2p-2$ punti è sempre conseguenza del passaggio pei rimanenti: se ciò non fosse, ve ne sarebbero fra essi $2p-3$ imponenti alle quadriche complessivamente solo $2p-4$ condizioni, e queste quadriche segnerebbero allora sulla C_p^{2p-2} una serie g_{2p-1}^p di ordine $> 2p-2$ e speciale, il che non è possibile.

Sono questi i così detti gruppi di punti *autoassociati* (in S_n, gruppi di $2n+2$ punti), già da tempo noti (1), e che godono di proprietà interessanti, fra cui quella che, distribuiti in un modo qualunque in due gruppi di $n+1$ punti, danno sempre due $(n+1)$-goni autopolari rispetto a una stessa quadrica.

Nel caso di un iperpiano $(p-1)$-tangente alla curva C_p^{2p-2}, i $2p-2$ punti del gruppo autoassociato coincidono a due a due, determinando in S_{p-1} un sistema di quadriche aventi a comune $p-1$ punti generalmente distinti e altrettante tangenti in questi punti (condizioni equivalenti ancora complessivamente a sole $2p-3$ distinte). Per iperpiani $(p-1)$-tangenti isolati, i detti $p-1$ punti formano un gruppo appartenente a S_{p-2}; invece per iperpiani $(p-1)$-tangenti che

(1) KILLING, *Die nicht-euklidischen Raumformen...* (Leipzig, 1885) p. 101; CASTELNUOVO, Rend. Circolo Matem. di Palermo 3 (1889) p. 179. Per $n=2$ $(p=3)$ si hanno 6 punti di un piano appartenenti a una conica; per $n=3$ $(p=4)$ il gruppo delle 8 intersezioni di tre quadriche generiche di S_3, ecc.

appartengono a un sistema continuo (precisamente) ∞^r di spazi così fatti, ossia i cui punti di contatto costituiscono un gruppo di una g^r_{p-1} completa autoresidua, il gruppo dei $p-1$ punti appartiene a un $[p-2-r]$, mentre il gruppo delle $p-1$ tangenti continua ad appartenere a S_{p-2}.

D'altra parte la g^r_{p-1} completa autoresidua ora menzionata corrisponde a una certa ϑ dell'ente algebrico, pari o dispari secondo che r è dispari o pari, la quale deve annullarsi per i valori nulli degli argomenti insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine r incluso, e non oltre. Se, al variare con continuità dei moduli della curva, la dimensione r, per particolari valori dei moduli stessi, risulta aumentata, essa dovrà tuttavia conservare sempre (come la ϑ corrispondente) la stessa parità; potrà dunque solamente crescere di 2 unità, o di un multiplo di 2. E per conseguenza, se in uno dei gruppi accennati di $p-1$ punti e tangenti lo spazio minimo contenente i (soli) punti può, per variazione continua dei punti stessi, diminuire di dimensione, anche questa diminuzione dovrà verificarsi, volta per volta, per un numero di unità eguale a 2 o multiplo di 2. Ciò è confermato dall'esempio seguente. Se in un gruppo autoassociato di 8 punti in S_3 teniamo fissi 6 di questi punti, la coppia residua, variabile, descrive in S_3 un'involuzione, determinata dalle intersezioni ulteriori, a tre a tre, delle ∞^3 quadriche passanti per i primi 6 punti; e i punti uniti di questa involuzione hanno per luogo una superficie F^4. Se i primi 6 punti, comuni alle dette ∞^3 quadriche, si riducono a tre punti distinti A, B, C (non allineati) colle relative tangenti, il sistema ∞^3 di quadriche contiene il piano doppio ABC, e da ciò si trae subito che la F^4 dei punti uniti dell'involuzione si spezza in questo stesso piano (semplice) e in una F^3 residua, coi punti doppi A, B, C, e contenente perciò i tre lati del triangolo ABC. Un punto unito di quest'involuzione determina, insieme con A, B, C e le rette date per essi, un G_8 autoassociato di punti a due a due infinitamente vicini; se quel punto unito non appartiene al piano ABC, e sta quindi sulla detta F^3, esso non può portarsi con continuità nel piano ABC se non sopra una delle 3 rette AB, BC, CA (nel qual caso, in questo esempio particolare, il G_8 autoassociato degenera).