Gino Fano

Congruenze $\Omega_\circ$ di curve razionali e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Vol. (1928), p. 623–627

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1928_4>

Geometria. — *Congruenze Ω_0 di curve razionali, e trasformazioni cremoniane inerenti a un complesso lineare.* Nota[1] del Corrisp. Gino Fano.

1. Riprendiamo la rappresentazione, esposta in una Nota precedente[2], del sistema degli elementi lineari del piano sullo spazio punteggiato. Ai sistemi Ω di curve piane $\gamma^{n,\nu}$ (di ordine n, classe ν) corrispondono congruenze del 1° ordine, che designeremo con Ω_0, di curve Γ appartenenti a un complesso lineare Λ; curve razionali di ordine $n+\nu$ (se Ω è in posizione generale rispetto agli elementi A, a della mia Nota cit.), appoggiate alle rette p_0 e r_0 rispettivamente in ν e in n punti, e assoggettate a ulteriori $n+\nu-1$ condizioni; tante appunto quante ne occorrono per staccare la congruenza di cui trattasi dal sistema di tutte le $\Gamma^{n+\nu}$ razionali appartenenti al complesso Λ, le quali dipendono da $2(n+\nu)+1$ parametri. Per le γ, le $n+\nu-1$ condizioni corrispondenti consistevano[3] nell'essere tangenti a certe linee piane (sostituibili eventualmente con punti) una o più volte, anche con contatti di ordini superiori assegnati, o in punti assegnati. A queste linee o punti corrispondono in S_3 delle linee, appartenenti al complesso lineare Λ; e perciò le curve Γ della congruenza Ω_0 si appoggeranno in $n+\nu-1$ punti a certe linee fisse, appartenenti esse pure al complesso, e che saranno perciò direttrici e linee singolari della congruenza; e anche linee focali, essendo appunto luoghi di *fuochi* delle singole Γ. Anche le rette p_0 e r_0 saranno naturalmente direttrici e linee focali. E potranno altresì le Γ avere qualche punto comune (immagine di un elemento comune a tutte le γ), il quale assorbirà allora *due* condizioni fra le $n+\nu-1$. È da osservare che tutti questi fuochi sono *doppi*, cioè ne assorbono due di quelli che spetterebbero alle $\Gamma^{n+\nu}$ di una congruenza generica in S_3[4], perchè le tangenti in un tal fuoco alle linee della congruenza che passano per il punto stesso stanno in un medesimo piano (il piano polare del punto rispetto al complesso lineare), il quale contiene pure la tangente in quel punto alla direttrice della congruenza; mentre i punti eventualmente comuni a tutte le linee della congruenza sono, sempre rispetto al caso più generale, fuochi quadrupli. (Per es.: una congruenza del 1° ordine di rette, contenuta nel complesso, e con direttrici appartenenti anche al complesso, ha una sola direttrice; e i due fuochi di ogni retta coincidono nella sua intersezione

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) Questi «Rendiconti», p. 529, fasc. 11.

(3) V. la mia Nota a p. 445, fasc. 10, di questi «Rendiconti».

(4) Darboux, *Théorie générale des surfaces*, vol. 2° (1ª o 2ª ediz.), p. 10.

con questa direttrice. Sono di questo tipo le congruenze lineari $[p]$ e $[r]$ della mia Nota precedente).

Se le curve piane $\gamma^{n,\nu}$ passano tutte per A, ovvero sono tutte tangenti alla retta a, o anche contengono l'elemento fisso Aa, il numero $n+\nu-1$ dei fuochi non appartenenti a p_0 nè a r_0 si riduce a $n+\nu-2$ o rispettivamente $n+\nu-3$. Una riduzione ulteriore si ha se gli stessi elementi fossero multipli per le γ. In ogni caso indicato con m l'ordine delle linee Γ costituenti la congruenza Ω_0, sopra ogni Γ vi saranno in tutto $2m-1$ fuochi, generalmente distinti. Viceversa, ogni congruenza del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso Λ e vincolate *soltanto* ad appoggiarsi un conveniente numero di volte a linee anche del complesso (incluso il caso di contatti) o a passare per punti assegnati, avrà per immagine nel piano un sistema Ω. Invero, le linee della congruenza, se di ordine m, saranno vincolate a $2m-1$ condizioni semplici del tipo accennato; e (supposto di prendere come rette p_0 e r_0 due rette del complesso che non siano direttrici di quella congruenza) le immagini piane γ delle dette linee saranno (n. 4 della Nota precedente) di ordine e classe $2m$ con due punti m^{pli} infinitamente vicini; con ulteriori nodi e cuspidi in numeri rispettivamente eguali agli ordini delle rigate delle corde principali e delle tangenti di una Γ^m, cioè $(m-1)(m-3)$ e $2(m-1)$; vincolate infine a loro volta a $2m-1$ contatti con linee assegnate (o casi particolari). Da queste condizioni risultano appunto assorbite (come si può verificare) tutte le intersezioni di una γ colle sue infinitamente vicine, tranne una soltanto; mentre è pure ovvio che un elemento generico del piano appartiene a una sola γ: si tratta perciò di un sistema Ω.

La determinazione delle trasformazioni di contatto birazionali del piano, ossia dei sistemi Ω di curve piane, equivale pertanto alla determinazione di tutte le congruenze di tipo Ω_0 appartenenti a un complesso lineare, ossia delle congruenze del 1° ordine di curve razionali di un ordine qualsiasi m appartenenti al complesso, vincolate ad appoggiarsi in $2m-1$ punti a curve assegnate appartenenti esse pure al complesso, o a condizioni che possano considerarsi come casi particolari di queste.

2. Le trasformazioni di contatto birazionali del piano, risultanti da trasformazioni cremoniane del piano punteggiato o del piano rigato « estese » agli elementi lineari nel senso già precisato al n. 2 della mia nota, avranno per immagini trasformazioni cremoniane di S_3 inerenti al complesso lineare, e che mutano in sè stessa la congruenza lineare (p), o rispettivamente la (r). Queste particolari trasformazioni cremoniane di S_3 risultano già completamente definite dalla trasformazione birazionale subordinata nella congruenza (p) od (r). Fissata ad es., una retta p della congruenza (p), tutte le rigate della congruenza (p) che contengono quella p e un'altra determinata retta p' infinitamente vicina alla prima (rigate raccordate perciò lungo la p) conducono a una stessa proiettività di Chasles fra la punteg-

giata p e il fascio dei relativi piani tangenti di asse p; proiettività che con quella determinata, tra le stesse forme, dal complesso lineare, ha due coppie comuni, una delle quali fissa, costituita dal punto e dal piano pp_0. Tenendo conto solo dell'altro punto su p, il ragionamento è invertibile; in questo modo il sistema delle ∞^1 rette p' infinitamente vicine a p entro la (p) viene riferito proiettivamente alla stessa p come punteggiata; ed appare chiaro come, in una trasformazione cremoniana vincolata a mutare in sè il sistema degli elementi punto-piano del complesso lineare nonchè la congruenza (p), quando si conosca la trasformazione subordinata entro la (p), e quindi la corrispondenza proiettiva fra gli intorni di 2 rette omologhe, risulti determinata del pari la corrispondenza fra queste stesse rette come punteggiate. Sempre nelle stesse ipotesi, la costruzione, per ogni curva $\mathbf{C}$ dello spazio appartenente al complesso Λ, della curva $\mathbf{C}'$ corrispondente, può effettuarsi molto semplicemente nel modo che segue. Data la $\mathbf{C}$, è determinata la rigata delle p appoggiate a $\mathbf{C}$ stessa, e della quale $\mathbf{C}$ è, all'infuori della direttrice rettilinea p_0, l'unica direttrice (e asintotica) appartenente al complesso Λ. Essendo nota la trasformazione subordinata nella congruenza (p), risulterà determinata la rigata omologa alla precedente; questa nuova rigata avrà del pari, all'infuori di p_0, una sola direttrice e asintotica appartenente al complesso; e sarà questa la curva $\mathbf{C}'$ cercata.

Queste considerazioni si estendono alle trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare, nelle quali si impongono come omologhe due qualunque congruenze lineari speciali contenute nel complesso. Più generalmente ancora:

Nel piano, una trasformazione di contatto birazionale che muti un sistema Ω assegnato in un altro Ω' pure assegnato, distinto o coincidente, è completamente definita dalla trasformazione birazionale subordinata fra questi due sistemi ∞^2 di curve piane.

Nello spazio, una trasformazione cremoniana inerente a un dato complesso lineare risulterà definita assegnando ad arbitrio due congruenze del 1° ordine di tipo Ω_0 di linee del complesso fra loro corrispondenti – cioè due congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso, aventi ordini arbitrari m, m', assoggettate rispettivamente a $2m - 1$ e $2m' - 1$ condizioni semplici, consistenti nell'appoggiarsi un egual numero complessivo di volte a linee assegnate, anche appartenenti al complesso, incluso il passaggio per uno o più punti asseganati – e dando inoltre la corrispondenza subordinata fra le due congruenze. Se Γ e Γ' sono linee omologhe delle due congruenze, la corrispondenza proiettiva fra i loro intorni nelle due congruenze determina di conseguenza la corrispondenza fra le stesse Γ e Γ' come curve punteggiate. Una curva qualsiasi $\mathbf{C}$ appartenente al complesso Λ determina la superficie luogo delle Γ che ad essa si appoggiano, e della quale essa è, all'infuori delle linee singolari della congruenza, l'unica asintotica appartenente al complesso. La superficie corrispondente, luogo di linee Γ', avrà del pari una sola asintotica appartenente al complesso e non linea singolare; e sarà la linea $\mathbf{C}'$ omologa a $\mathbf{C}$.

3. La questione (che finora non ho potuto risolvere) se le trasformazioni birazionali del piano si possano ottenere tutte come prodotti di trasformazioni elementari già note, cioè di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato « estese » agli elementi lineari, equivale all'altra, se le trasformazioni cremoniane dello spazio inerenti a un complesso lineare si possano tutte ottenere come prodotti di quelle particolari fra esse che mutano in sè stessa una delle due congruenze lineari (p) o (r), ovvero anche, più generalmente, di quelle che mutano in sè una qualsiasi delle congruenze lineari speciali contenute nel complesso. Queste ultime trasformazioni si riconducono infatti con omografie a quelle che mutano in sè una delle congruenze (p) ed (r); e le omografie inerenti al complesso lineare hanno per immagini nel piano trasformazioni di contatto che mutano punti e rette in coniche, e che si ottengono facilmente come prodotti di trasformazioni cremoniane di punti e di rette.

Combinando fra loro trasformazioni di contatto birazionali del piano dei tipi elementari indicati, nascono solamente curve fondamentali *razionali*. Affinchè pertanto la questione posta potesse ricevere risposta affermativa, sarebbe necessario che ogni trasformazione cremoniana di S_3 inerente a un complesso lineare avesse soltanto curve fondamentali razionali. Questo non avviene per trasformazioni cremoniane qualsiansi di S_3; e non si vede *a priori* una ragione di diversa conclusione per le trasformazioni cremoniane inerenti a un dato complesso lineare.

4. La questione ora prospettata si può presentare anche sotto altra forma.

Due congruenze di tipo Ω_0 di curve di uno stesso complesso lineare si dicano fra loro *coniugate* quando le curve di ciascuna delle due incidenti a una curva fissa dell'altra formano, entro la prima, le ∞^2 famiglie ∞^1 di una rete omaloidica. Esempio semplicissimo, le due congruenze rettilinee (p) ed (r), ossia due qualunque congruenze lineari speciali contenute nel complesso, a direttrici incidenti. La detta relazione ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare; e basta ch'essa si verifichi per una delle due congruenze rispetto all'altra, perchè si verifichi pure in senso inverso. Si tratta infatti, in ambo i casi, di condizioni riducibili alle seguenti: che in ciascuna delle due congruenze vi sia un'unica curva che si appoggia a due curve generiche dell'altra.

Chiamiamo per brevità *trasformazioni elementari* quelle particolari trasformazioni inerenti a un complesso lineare, che mutano in sè stessa una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso. In ogni trasformazione cremoniana $\mathbf{S}$ inerente a un complesso lineare, a una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso corrisponde una certa congruenza Δ di tipo Ω_0. *La proprietà eventuale della data trasformazione di potersi otte-*

nere come prodotto di un numero finito di trasformazioni elementari equivale alla proprietà che dalla congruenza Δ *si può passare a una congruenza lineare speciale pel tramite di un numero finito di congruenze di tipo* Ω_0 *ciascuna coniugata alla precedente.*

Sia infatti Δ coniugata a un'altra congruenza Δ_1, questa a Δ_2, e così di seguito (congruenze tutte di tipo Ω_0, appartenenti al complesso) fino a Δ_i, la quale ultima sia una congruenza di rette. Sia ancora Δ_{i+1} un'altra congruenza rettilinea dello stesso tipo, coniugata alla precedente, ossia con direttrice incidente alla direttrice di Δ_i. Esiste allora una trasformazione elementare che muta Δ_i in sè stessa, e Δ_{i-1} in Δ_{i+1}. In questa trasformazione alle congruenze $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots$ corrisponderanno nuove congruenze $\Delta', \Delta'_1, \Delta'_2, \cdots$, anche di tipo Ω_0, delle quali due consecutive sempre coniugate, e tali che la Δ'_{i-1}, che è la stessa Δ_{i+1}, si compone di rette. Avendo così, con una trasformazione elementare, ridotto di un'unità il precedente indice i, si ha un processo ricorrente che permette di ridurre, con successive trasformazioni elementari, i al valore 1; e, con una trasformazione ulteriore, la congruenza ultima trasformata di Δ a una congruenza di rette. Dopo di ciò la S differirà dal prodotto delle trasformazioni elementari precedenti, in ordine inverso, solo più per una trasformazione che muta una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso in altra consimile; e questa pure si riduce facilmente a un prodotto di trasformazioni elementari.

Viceversa, supponiamo che con i trasformazioni elementari successive la congruenza Δ si muti successivamente nelle congruenze $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \cdots, \Delta^{(i)}$, l'ultima delle quali si componga di rette. L'ultima di queste trasformazioni elementari, quella che muta $\Delta^{(i-1)}$ in $\Delta^{(i)}$, lascerà invariata una certa congruenza lineare di rette Φ, la quale, o sarà coniugata a $\Delta^{(i)}$, se le loro direttrici sono incidenti, oppure sarà tale che esisterà una congruenza rettilinea coniugata ad entrambe. Per conseguenza, $\Delta^{(i-1)}$ o sarà coniugata a Φ, che si compone di rette, oppure a un'altra congruenza di tipo Ω_0, a sua volta coniugata a Φ. Ora $\Delta^{(i-2)}$ può mutarsi con una trasformazione elementare in $\Delta^{(i-1)}$, la quale è coniugata a una congruenza di rette, oppure ha una congruenza di rette fra le sue successive coniugate; perciò $\Delta^{(i-2)}$ avrà, fra le sue successive coniugate, una congruenza che può mutarsi con trasformazione elementare in una congruenza di rette, e avrà fra le sue coniugate ulteriori la congruenza di rette unita per quest'ultima trasformazione elementare. E così di seguito.

Notiamo in particolare: Se una congruenza Ω_0 ha fra le sue successive coniugate una congruenza di rette, altrettanto avviene di ogni sua trasformata mediante trasformazioni elementari.