Gino Fano

Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Vol. (1928), p. 529–534

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1928_3>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 dicembre 1928 (Anno VII)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulla rappresentazione di S. Lie degli elementi lineari del piano sopra lo spazio punteggiato.* Nota[1] del Corrispondente GINO FANO.

1. S. Lie[2] ha data una rappresentazione del sistema degli elementi lineari di un piano sullo spazio punteggiato, la quale è algebrica e biunivoca, quindi birazionale, e può essere sfruttata per lo studio ulteriore delle trasformazioni birazionali di contatto del piano[3].

Fra le coordinate (ξ, η, p) di un elemento lineare del piano (coordinate cartesiane del punto, e coefficiente angolare della retta costituenti l'elemento) e le coordinate cartesiane x, y, z di un punto dello spazio poniamo le relazioni:

$$(1) \qquad x = \xi \quad ; \quad y = \frac{1}{2} p \quad ; \quad z = \eta - \frac{1}{2} p \xi$$

dalle quali si ricava, viceversa:

$$\xi = x \quad ; \quad \eta = z + xy \quad ; \quad p = 2y .$$

Si ha così una rappresentazione birazionale della varietà ∞^3 degli elementi

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) V., p. es., *Geometrie der Berührungstransformationen*, I, p. 238. La rappresentazione risale però a vecchi lavori di Lie, del 1872–74.

(3) Cfr. la mia Nota precedente, questi «Rendiconti».

del piano sopra lo spazio. E poichè l'equazione differenziale $d\eta - p\,d\xi = 0$ che caratterizza le *unioni* del piano si muta nell'equazione:

$$(2) \qquad d(z + xy) - 2\,y\,dx = 0 \qquad \text{ossia:} \qquad dz + x\,dy - y\,dx = 0$$

che è l'equazione Pfaffiana di un complesso lineare non speciale, così alle unioni del piano (linee e punti, come insiemi ∞^1 di elementi) corrisponderanno nello spazio le linee appartenenti al complesso lineare (2), cioè le cui tangenti sono rette di questo complesso; e viceversa.

In particolare a linee piane algebriche corrisponderanno linee del complesso lineare (2) anche algebriche, e in corrispondenza birazionale colle prime. Questo prova nel modo più semplice e ovvio che esistono curve appartenenti a un complesso lineare e di genere e moduli affatto qualunque [1].

Di queste curve appartenenti (cioè le cui tangenti appartengono) a un complesso lineare di rette, sono ben note alcune proprietà importanti:

Il piano osculatore a una tal curva in un suo punto qualsiasi è il piano polare del punto stesso rispetto al complesso. La curva è perciò trasformata in sè stessa dalla polarità nulla determinata dal complesso lineare, in quanto questa ne scambia i punti coi piani osculatori, e ha le sue tangenti come rette unite.

I piani osculatori alla curva nelle sue intersezioni con un piano passano tutti per uno stesso punto, che appartiene pure a quel piano (ed è il polo del piano stesso).

Ogni ramo della curva ha l'ordine eguale alla classe. Dei tre soliti caratteri (α, β, γ) del ramo [2] il primo è eguale al terzo $(\alpha = \gamma)$. In altri termini, *ogni singolarità è autoduale.*

Se la curva è algebrica, sono pure eguali l'ordine e la classe della curva stessa.

Nella rappresentazione (1), *le trasformazioni di contatto birazionali del piano hanno per immagini le trasformazioni cremoniane dello spazio che mutano in sè l'equazione Pfaffiana* (2), cioè il sistema degli elementi *punto–retta*, e quindi anche degli elementi *punto-piano* di un complesso lineare non speciale. Le chiameremo *trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare* (2).

Ai sistemi Ω [3], in particolare ai punti e alle rette del piano considerati anch'essi come unioni, *corrisponderanno nello spazio congruenze del* 1° *ordine* (poichè un elemento generico del piano appartiene a un'unica curva di un dato sistema Ω) *composte di linee razionali del complesso.*

(1) G. GHERARDELLI, « Boll. Unione Matem. Ital », 5 (1926), p. 122 (ove è pure accennata una mia comunicazione verbale al riguardo); B. SEGRE, « Mem. R. Accad. dei Lincei » (6), II, fasc. XIX, p. 587.

(2) *Ordine, rango, classe,* secondo HALPHEN; ma altri autori usano denominazioni in parte diverse.

(3) V. ancora la mia Nota cit., questi « Rendiconti ».

Queste *curve razionali appartenenti a un complesso lineare*, se di ordine $n > 3$, sono curve particolari di questo stesso ordine. E. Picard [1], e anche altri in seguito hanno dimostrato ch'esse hanno $2(n-3)$ flessi, o singolarità equivalenti [2] [3]; dipendono da $4n - 2(n-3) = 2n + 6$ parametri, e da $2n + 1$ parametri quelle appartenenti a un complesso lineare assegnato.

2. Riprendiamo le formole (1), e riscriviamole facendo uso di coordinate omogenee di punto, sia nel piano (ξ, η, ζ) che nello spazio (x, y, z, t); e nel piano anche di coordinate omogenee di retta (u, v, w), onde $p = -\frac{u}{v}$. Avremo:

$$(1') \qquad x = \xi v \quad ; \quad y = -\frac{1}{2}\zeta u \quad ; \quad z = \eta v + \frac{1}{2}\xi u \quad ; \quad t = \zeta v .$$

Ai punti del piano $\xi : \eta : \zeta$, come unioni, corrispondono le rette del complesso lineare rappresentate dalle stesse (1′) nelle quali si considerino, per ogni singola retia, u, v come parametri omogenei; vale a dire, eliminando tali parametri:

$$\frac{x}{t} = \frac{\xi}{\zeta} = \text{cost} \qquad ; \qquad \frac{z}{t} = \frac{\eta}{\zeta} - \frac{y}{t} \cdot \frac{\xi}{\zeta}$$

ossia:

$$(3) \qquad \zeta x - \xi t = 0 \qquad ; \qquad \xi y + \zeta z - \eta t = 0 .$$

Queste ∞^2 rette sono tutte contenute in piani del fascio $\zeta x - \xi t = 0$ (con ζ, ξ parametri), e perciò incidenti alla retta $x = t = 0$, asse di questo fascio (che designeremo come retta p_0). *Ai punti, come unioni del piano, corrispondono le rette del complesso* (2) *costituenti la congruenza lineare speciale di direttrice* (*unica*) p_0 [4]. Le rette di uno stesso fascio della con-

(1) « Annales Ec. Norm. Sup. », 1877; *Traité d'Analyse*, t. I, (2ª ediz., 1901, p. 385).

(2) Se la curva ha una cuspide, il cui tipo più generale in questo caso è $(2, 1, 2)$, essa assorbe almeno 2 flessi. Ogni tangente k–punta $(k \geqq 3)$ assorbe $k - 2$ flessi; p. es., la totalità dei flessi può essere assorbita da due tangenti $(n-1)$–punte, e si hanno allora curve di un tipo notissimo, traiettorie di gruppi proiettivi ∞^1, e contenute in quadriche, sulle quali uno dei due regoli si compone di rette $(n-1)$–secanti quella curva; fra queste rette sono comprese anche le due tangenti suddette.

(3) Però, per una curva sghemba razionale di ordine $n > 6$ il possedere $2(n-3)$ flessi non è condizione sufficiente perchè la curva appartenga a un complesso lineare. (GHERARDELLI, *Sulle curve sghembe con soli rami autoduali* « Rend. R. Accad. dei Lincei » (5), vol. 33, 1924 I, p. 335).

(4) Che le rette (3), corrispondenti ai punti del piano (ξ, η, ζ), formino una congruenza lineare speciale, si vede anche direttamente. Quelle che stanno in uno stesso piano del fascio $\zeta x - \xi t = 0$ ne tagliano l'asse $x = t = 0$ (cioè p_0) nel medesimo punto $x = t = \xi y + \zeta z = 0$; e il rapporto $\xi : \zeta$ è coordinata proiettiva tanto nel fascio p_0, quanto sulla p_0 come punteggiata.

gruenza sono immagini delle unioni costituite da punti $\xi : \zeta = \text{cost.}$, posti cioè sopra una parallela all'asse η; il centro del fascio, che è un punto generico P di p_0, è punto fondamentale della rappresentazione, e immagine di tutti gli elementi che appartengono ai punti suddetti ($\xi : \zeta = \text{cost.}$) e hanno $v = 0$, cioè la loro retta parallela all'asse η. A ogni punto di p_0 corrispondono dunque tutti gli elementi di una certa retta parallela all'asse η. Fanno però eccezione, fra i punti del piano (ξ, η, ζ), i punti impropri, pensati anche come unioni; per ognuno di essi è $\zeta = 0$, e per gli elementi che gli appartengono $\frac{u}{v} = -\frac{\eta}{\xi} = \text{cost.}$; quindi $y = t = 0$, $\frac{z}{x} = \text{cost.}$ Agli ∞^1 elementi di uno stesso punto improprio (distinto dal punto all'infinito dall'asse η, pel quale $\xi = 0$, $v = 0$) corrisponde un unico punto della retta $y = t = 0$.

Alle rette del piano $u : v : w$, pensate anche come unioni, corrispondono le rette del complesso lineare rappresentate dalle (1′), nelle quali si considerino come parametri le ξ, η, ζ, omogenee e legate dalla

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0 .$$

Le equazioni di queste rette possono ricevere la forma:

$$\frac{y}{t} = -\frac{u}{2v} = \text{cost.} \qquad ; \qquad ux + v\left(z - \frac{1}{2}x \cdot \frac{u}{v}\right) + wt = 0$$

ossia:

$$2vy + ut = 0 \qquad ; \qquad \frac{1}{2}ux + vz + wt = 0 .$$

Sono dunque le ∞^2 rette del complesso contenute nei piani del fascio $2vy + ut = 0$, perciò incidenti alla $y = t = 0$; *esse formano una seconda congruenza lineare speciale,* la cui direttrice ($y = t = 0$) indicheremo con r_0, ed è incidente a p_0. Le rette di uno stesso fascio della congruenza sono immagini di unioni–rette per le quali $\frac{u}{v} = -p = \text{cost.}$, cioè di rette parallele; al centro del fascio ($y = t = 0$, onde $\zeta = 0$) corrisponde su ciascuna di queste rette parallele l'elemento a punto improprio. Ritroviamo così che agli elementi di uno stesso punto improprio generico corrisponde un punto unico della retta $y = t = 0$; ecc. Indicheremo per brevità con a, A rispettivamente la retta impropria del piano (ξ, η, ζ) e il punto improprio dell'asse η.

Designeremo ancora come « rette p » e « rette r » le rette del complesso lineare (2), immagini rispettivamente delle unioni–punto e delle unioni–rette, cioè costituenti le due congruenze lineari considerate di direttrici rispettivamente p_0 e r_0. Alle unioni costituite dai punti di una retta generica corrispondono rette p appoggiate a una stessa r, e formanti perciò un regolo **P**; i vari regoli **P** stanno su quadriche contenenti la r_0, e tutte raccordate lungo p_0. Quando la retta considerata nel piano è parallela all'asse η, il regolo **P** si spezza nel fascio $p_0 r_0$ come parte fissa e in un secondo fascio variabile della congruenza delle p. Regoli analoghi **R** si hanno scambiando le p colle r.

3. A una curva piana algebrica $\gamma^{n,\nu}$, di ordine n e classe ν, non passante per A nè tangente ad a (e diremo brevemente « in posizione generale rispetto ad A ed a ») corrisponderà una curva sghemba Γ, appartenente al complesso lineare (2). Agli n elementi di γ i cui punti appartengono ad a e ai ν elementi le cui rette (tangenti) passano per A corrisponderanno rispettivamente n punti di Γ appartenenti alla retta r_0 e ν punti appartenenti a p_0. Poichè Γ non ha altre intersezioni col piano $p_0 r_0$ (i cui punti non appartenenenti a p_0 nè ad r_0 sono immagini dell'unico elemento Aa), essa sarà di ordine $n + \nu$.

A una curva piana algebrica di ordine n e classe ν, in posizione generale, corrisponde una curva sghemba di ordine $n + \nu$, appartenente al complesso lineare (2), *avente le rette r_0 e p_0 come corde, l'una n^{pla}, l'altra ν^{pla}*. Es.: alle rette ($n = 1$, $\nu = 0$) corrispondono anche rette, appoggiate a r_0; alle ∞^5 coniche, le ∞^5 quartiche di 2ª specie (razionali) appartenenti al complesso e aventi p_0 e r_0 come corde; ecc. Queste curve hanno n intersezioni variabili colle quadriche P, e ν colle R.

Una curva $\gamma^{n,\nu}$ passante (semplicemente) per A con tangente generica (cioè distinta da a) si può pensare come posizione limite della precedente, facendo avvicinare indefinitamente due dei ν elementi la cui tangente passava per A; la curva Γ immagine in S_3 sarà perciò tangente a p_0 (in un punto distinto da $p_0 r_0$) e avrà a comune con essa $\nu - 2$ punti ulteriori. Con r_0 essa avrà a comune solo più $n - 1$ punti; sarà dunque di ordine $n + \nu - 1$. Il passaggio per continuità dalla precedente $\Gamma^{n+\nu}$ alla curva attuale di ordine $n + \nu - 1$ va concepito nel modo seguente. Uno degli n punti di $\Gamma^{n+\nu}$ appartenenti alla retta r_0 tende a portarsi nel punto $p_0 r_0$. In pari tempo la p_0, *corda principale* di Γ (cioè corda appartenente al complesso lineare (2)) tende a diventare tangente a Γ stessa. Ora, sopra una curva di ordine m appartenente a un complesso lineare, fra i due estremi di una stessa corda principale intercede una corrispondenza simmetrica d'indice $m - 3$, i cui punti uniti sono caratterizzati dal fatto che il relativo piano osculatore vi ha colla curva incontro almeno 4–punto; e questi punti nel caso presente, non sono altro che i flessi (cioè i punti [1, 2, 1]) e loro casi particolari (1). Una corda principale che diventa, come caso limite,

(1) Se la curva del complesso è razionale, la corrispondenza considerata ha $2(m - 3)$ punti uniti; ed è questo appunto il numero dei flessi. Se la curva è di genere $p > 0$, la corrispondenza ha valenza 3, e perciò $2(m - 3) + 6p$ elementi uniti; ed è questo pure il numero dei flessi.

tangente, acquista dunque di conseguenza un'intersezione ulteriore *in più* colla curva, coincidente col suo punto di contatto. Pertanto al limite, Γ dovrebbe avere a comune con p_0, in tutto, $\nu + 2$ punti, conservandone altri $n - 1$ variabili nei singoli piani passanti per p_0 stessa; essa viene così a spezzarsi nella retta p_0 e in una $\Gamma^{n+\nu-1}$ residua, ancora tangente (semplicemente) a p_0 e appoggiata ad essa in altri $\nu - 2$ punti.

Considerazioni analoghe valgono, scambiati i caratteri n e ν, se la curva γ è tangente ad a in un punto distinto da A.

Se poi la curva piana $\gamma^{n,\nu}$ contiene (semplicemente) l'elemento Aa, la sua immagine Γ si appoggerà a p_0 solo più in $\nu - 2$ punti e a r_0 in $n - 2$ punti, e avrà ancora un altro punto, immagine dell'elemento Aa, nel piano $p_0 r_0$, fuori delle due rette p_0 e r_0; sarà quindi di ordine $n + \nu - 3$. Per esempio: alle ∞^3 coniche tangenti ad a nel punto A corrispondono le ∞^3 del complesso lineare (1).

Questi risultati si estendono facilmente alle curve piane aventi A ed a come elementi multipli.

4. Viceversa, a una sghemba Γ^m appartenente al complesso lineare (2), non appoggiata a p_0 nè ad r_0, corrisponde nel piano una curva γ di ordine e classe $2m$, avente l'elemento Aa come m^{plo} (cioè due punti m^{pli} consecutivi in A, nella direzione di a), come immagine degli m punti di Γ contenuti nel piano $p_0 r_0$. (Per questa curva γ è dunque $n = \nu = 2m$, $n + \nu = 4m$; ma gli m elementi sovrapposti in Aa riducono l'ordine della curva immagine Γ di $3m$ unità). Ogni punto eventuale di appoggio di Γ^m a p_0 assorbe *due* fra le intersezioni di Γ^m colle quadriche **P** (alle quali essa è tangente in questo punto), e una sola intersezione colle **R**. Perciò, per la curva piana corrispondente γ, diminuisce di 2 unità l'ordine e di un'unità la classe. L'opposto avviene per ogni punto di appoggio con r_0. Pertanto, a una $\Gamma^{n+\nu}$ appoggiata a p_0 in ν punti e a r_0 in n punti corrisponde (come già detto) una curva piana di ordine $2(n + \nu) - 2\nu - n = n$ e di classe ν. Ogni punto di contatto di Γ con p_0 (o r_0) diminuisce di 3 unità l'ordine di γ e di 2 unità la sua classe (o viceversa); se però p_0 da corda diventa, come limite, tangente a Γ, diviene altresì (come già detto) tangente di flesso, e l'ordine di γ rimane pur sempre diminuito complessivamente di 4 unità.

In altra prossima Nota vedremo come si possano caratterizzare le congruenze di curve razionali del complesso (2) corrispondenti ai sistemi Ω del piano.

(1) LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 240. Ricordando che A ed a sono certi elementi impropri, si vede che le ∞^3 coniche suddette sono le parabole $\eta = a + b\xi + c\xi^2$, considerate appunto da LIE.