GINO FANO

Trasformazioni di contatto birazionali del piano

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **8** (1928), p. 445–451

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1928_2>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 novembre 1928 (anno VII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. — *Trasformazioni di contatto birazionali del piano.* Nota[1] del Corrisp. GINO FANO.

1. Le trasformazioni di contatto, nel piano, nello spazio, e anche a più variabili indipendenti, costituiscono una creazione geniale di S. Lie, il quale le ha studiate quasi esclusivamente dal punto di vista differenziale, cioè nell'ipotesi che le funzioni che ivi compaiono siano soggette soltanto ad avere comportamento regolare nell'intorno di un punto generico della regione considerata. Esse possono studiarsi anche nel campo algebrico o birazionale; ma non sono state finora, in questo campo, molto approfondite. Il gruppo principale di lavori in argomento è quello di L. Autonne, il quale in due Memorie del 1887–88[2] ha impostato analiticamente il problema delle trasformazioni di contatto birazionali del piano, e ne ha studiati i casi più elementari; e in lavori successivi, culminanti in una Memoria del 1905[3], ha avviata la stessa ricerca per lo spazio ordinario e per spazi a più dimensioni.

In questa Nota, e in alcune altre che seguiranno, mi propongo di porre su base geometrica il problema delle trasformazioni di contatto birazionali

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) « Journ. de mathém. », (4), vol. 3 (1887), p. 63; vol. 4 (1888), pp. 177, 407.

(3) *Sur les formes mixtes* (parte III), « Annales de l'Univ. de Lyon », Science et Médec., fasc. 16 (1905). Le varietà « primordiales », che corrispondono ai punti e agli iperpiani, possono avere, come luoghi di punti, qualunque dimensione inferiore allo spazio ambiente (possono essere cioè linee, superficie, M_3, ··· fino a M_{k-1}, se siamo in S_k); e AUTONNE distingue appunto questi vari casi.

del piano, e di mostrare come questo problema, per mezzo di una notevole rappresentazione dovuta pure a S. Lie, si muti in un problema interessante di trasformazioni cremoniane dello spazio a 3 dimensioni [1].

2. Ricordo che si chiama *elemento lineare* o brevemente *elemento* del piano la figura costituita dall'insieme di un punto del piano e di una retta passante per esso. Quando il punto sia proprio, l'elemento lineare si può rappresentare analiticamente con 3 coordinate; le coordinate cartesiane x , y del punto e il coefficiente angolare p della retta [2]. Due elementi infinitamente vicini (x , y , p) e $(x + dx , \cdots)$ si dicono *in posizione unita* quando soddisfano alla condizione $dy - p\,dx = 0$. Chiamasi *unione* («Verein») ogni sistema ∞^1 di elementi, ciascuno dei quali sia in posizione unita col consecutivo. Sono unioni tutte le linee del piano, come sistemi di elementi costituiti dai singoli punti della linea colle rispettive tangenti; incluse le rette, unioni a retta fissa e punto variabile; e in più i punti, unioni a punto fisso e retta variabile passante per questo punto.

Trasformazione di contatto è ogni trasformazione di elementi, ossia delle tre variabili x , y , p:

$$(1) \qquad x_1 = X(x , y , p) \quad ; \quad y_1 = Y(x , y , p) \quad ; \quad p_1 = P(x , y , p)$$

la quale conservi la relazione di posizione unita, cioè muti in sè stessa l'equazione differenziale $dy - p\,dx = 0$, e quindi ogni unione anche in un ~~insieme~~.

Le trasformazioni puntuali del piano $x_1 = X(x , y)$, $y_1 = Y(x , y)$, quando si «estendano» agli elementi lineari uscenti dalle coppie di punti omologhi mediante la terza equazione $p_1 = \dfrac{Y_x + Y_y\,p}{X_x + X_y\,p}$ (dove gli indici denotano derivate), sono particolari trasformazioni di contatto. In generale però, in una trasformazione di contatto ai punti dell'un piano come particolari unioni corrispondono nell'altro ∞^2 linee, e viceversa; e eliminando dalle (1) le variabili p , p_1 si ricava un'equazione unica fra le x , y , x_1 , y_1:

$$(2) \qquad \psi(x , y , x_1 , y_1) = 0$$

la quale, quando si interpretino x , y come coordinate e x_1 , y_1 come parametri (o viceversa), rappresenta, al variare dei parametri, le ∞^2 curve del primo piano corrispondenti ai punti x_1 , y_1 del secondo (o rispettivamente le curve del secondo piano corrispondenti ai punti del primo).

3. La trasformazione di contatto (1) fra due piani si dirà *birazionale* quando la (1) è altresì una trasformazione birazionale delle 3 variabili

(1) Tale argomento fu già oggetto di una mia comunicazione sommaria al Congresso Internazionale dei Matematici in Bologna nel settembre u. s.

(2) Per elementi impropri, occorre far uso di coordinate omogenee di punto e di retta. V. p. es., CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, I (Leipzig, 1875), pp. 1023–27.

x, y, p; ossia quando le funzioni X, Y, P che vi compaiono sono funzioni razionali delle x, y, p, e tali che dalle (1) possano ricavarsi x, y, p in funzione razionale delle x_1, y_1, p_1.

Entrano in questa categoria: le trasformazioni cremoniane del piano punteggiato, « estese » nel senso di cui al numero precedente; le trasformazioni cremoniane del piano rigato, estese in modo duale; le reciprocità piane, rappresentabili con un'equazione del tipo (2), bilineare nelle x, y e nelle x_1, y_1, a determinante non nullo; quindi anche tutte le trasformazioni prodotti di due o più dei tipi precedenti. Però le reciprocità piane possono ottenersi come prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato (1). E d'altra parte il prodotto di più trasformazioni cremoniane, tutte puntuali o tutte di rette, è ancora rispettivamente una trasformazione di questi due tipi. Perciò i prodotti sopra indicati devono tutti risultare da prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente; e dànno già luogo a casi abbastanza complessi.

Nelle trasformazioni cremoniane del piano punteggiato, l'interesse principale si concentra sulle così dette *reti omaloidiche*, cioè sui *sistemi lineari* ∞^2, di grado 1, di curve (necessariamente razionali) dell'un piano che corrispondono alle rette dell'altro piano. La più generale trasformazione cremoniana si ottiene scegliendo ad arbitrio nei due piani due reti omoloidiche, una delle quali si può supporre che sia la rete delle rette, e ponendo fra queste due reti una proiettività arbitraria.

Nelle trasformazioni di contatto birazionali, i sistemi ∞^2 di curve, che chiameremo *sistemi* Ω, corrispondenti, nei singoli piani, ai punti dell'altro piano (o anche alle rette; poichè punti e rette sono ora sistemi ∞^2 di unioni, fra loro equivalenti) sono caratterizzati da due proprietà analoghe alle precedenti, e che si potrebbe dire sono ancora le stesse, limitate al campo infinitesimale:

a) Poichè ogni elemento appartiene a un unico punto e a un'unica retta, così: *In ogni sistema* Ω *vi sarà una e una sola curva* (γ) *contenente un elemento generico assegnato* (linearità nel campo infinitesimale).

b) Due punti (e così due rette) infinitamente vicini hanno a comune un solo elemento, il quale è altresì l'unico elemento dell'un punto (o retta) che sia in posizione unita con un elemento dell'altro. Ne segue che, entro un sistema Ω, una γ generica avrà con ciascuna delle sue infinitamente vicine una sola coppia di elementi *variabili* in posizione unita; quindi anche *una sola intersezione variabile, una sola tangente comune variabile.* Le intersezioni (e le tangenti comuni) di una determinata γ colle singole sue infinitamente vicine sono cioè tutte fisse, tranne una soltanto. In altri termini, adottando un noto concetto del Severi, *il sistema* Ω *ha come serie caratteristica una* g^1_1.

(1) E precisamente di tre trasformazioni complessivamente; valendosi di un sistema ∞^2 di curve, lineare e omaloidico, sia come luogo, sia come inviluppo; p. es., di un sistema di coniche fra loro osculatrici in un punto fisso.

Chiameremo d'ora in poi *sistema* Ω anche qualsiasi sistema ∞^2 di curve piane irriducibili soddisfacente alle due proprietá ora enunciate, includendo fra essi anche il sistema ∞^2 dei punti (come particolari unioni). In una trasformazione di contatto birazionale, ogni sistema Ω si muta pure in un sistema Ω. Le singole curve (γ) di un sistema Ω sono curve razionali, perchè riferite biunivocamente al sistema ∞^1 delle loro infinitamente vicine; ed è pure razionale ogni sistema Ω, come ente ∞^2, perchè, ad es., le γ passanti per un punto fisso, o tangenti a una data retta, costituiscono altrettanti enti razionali ∞^1 contenuti in Ω.

Una trasformazione di contatto birazionale fra due piani si può individuare dando nei piani stessi due sistemi Ω arbitrari, uno dei quali si può supporre che sia il sistema ∞^2 dei punti o delle rette, e ponendo fra i due sistemi, come enti razionali ∞^2, una trasformazione birazionale arbitraria. (Anche qui è manifesta l'analogia colle trasformazioni cremoniane). A una curva qualsiasi dell'un piano, che si può pensare come inviluppo di ∞^1 curve γ del primo sistema Ω, corrisponde l'inviluppo delle curve rispettivamente omologhe a questa; e le due curve, se algebriche, saranno altresì in corrispondenza birazionale.

L'*aequatio directrix* (2) del numero precedente, quando ψ sia un polinomio nelle quattro variabili indicate, definisce fra i due piani una trasformazione di contatto algebrica, ma in generale non birazionale. Perchè sia tale, occorre e basta che i due sistemi ∞^2 di curve rappresentati da $\psi = 0$ quando vi si considerino x, y come coordinate e x_1, y_1 come parametri, oppure viceversa, soddisfacciano entrambi alla proprietà *a*) di cui sopra, oppure entrambi alla proprietà *b*). Invero la proprietà *a*) dell'uno equivale alla proprietà *b*) dell'altro; dire che due punti (x, y) infinitamente vicini individuano una γ passante per essi è dire che la γ' corrispondente a uno di quei punti, pensata come fissa, ha colle sue infinitamente vicine una sola intersezione $(x' \; y')$ variabile.

Come esempi semplici di sistemi Ω, all'infuori delle reti omaloidiche e sistemi duali, indichiamo:

1° Il sistema delle coniche tangenti a una conica fissa η in un punto fisso M e in un secondo punto variabile.

2° Il sistema delle quartiche piane aventi tre punti doppi fissi, e tangenti (in punti variabili) a tre coniche fisse passanti per quei punti.

4. Esaminiamo più da vicino di quale tipo siano le condizioni cui soddisfanno le curve γ di un sistema Ω.

Già si è detto che le γ sono curve razionali. Le C^n piane razionali, generalmente irriducibili, dipendono da $\frac{n(n+3)}{2} - \binom{n-1}{2} = 3n - 1$ parametri, e formano un unico sistema continuo, non lineare se $n > 2$, della dimensione accennata. Entro questo sistema, la curva generica ha $\binom{n-1}{2}$

punti doppi, che già assorbono $(n-1)(n-2)$ sue intersezioni con ognuna delle sue infinitamente vicine; ne rimangono perciò $3n-2$ variabili. Il detto sistema ∞^{3n-1} ha dunque come serie caratteristica una g^{3n-2}_{3n-2} (completa). Per staccare da esso un sistema ∞^2 con g^1_1 caratteristica, dobbiamo imporre alle sue curve $3(n-1)$ condizioni ulteriori, implicanti complessivamente, per ciascuna curva, un egual numero di intersezioni fisse colle sue infinitamente vicine.

Chiameremo *gruppo caratteristico principale* di una curva del sistema Ω, e più generalmente della curva generica γ di un qualsiasi sistema continuo di dimensione $\geqq 2$, l'insieme dei punti comuni a questa curva e a *tutte* quelle ad essa infinitamente vicine. Sono certamente punti caratteristici principali i punti basi del sistema proposto; gli eventuali punti multipli variabili di una γ generica; infine, se le γ sono tutte tangenti a una curva fissa, è ancora punto caratteristico principale di ogni γ il suo punto di contatto con questa curva fissa. Ed è facile convincersi che non sono possibili altri casi (1). Invero, al variare di γ entro il sistema continuo proposto, un punto caratteristico principale, il quale non sia punto base del sistema, varierà anch'esso; e sono possibili due casi:

1° Che questo punto descriva l'intero piano;

2° Che esso varii solamente sopra una linea.

Basterà dimostrare che per un punto caratteristico principale, il quale sia *semplice* per la γ (e non punto base), dovrà verificarsi sempre il secondo di questi casi (2); poichè allora, evidentemente, la linea luogo di questo punto caratteristico farà parte dell'inviluppo di un sistema ∞^1 generico di γ, e perciò tutte le γ saranno ad essa tangenti. Supponiamo pel momento che si tratti soltanto di un sistema continuo ∞^2 di linee γ; e che un punto caratteristico principale della γ generica, semplice per essa, descriva, se possibile, l'intero piano. Allora un punto generico P_0 del piano, che pensiamo fissato, sarà punto caratteristico principale (e punto semplice) solo per un insieme discreto di curve γ, insieme che designeremo con $|\gamma_0|$; e le tangenti a queste γ in P_0 formeranno pure un insieme discreto $|t_0|$. Consideriamo un sistema ∞^1 generico Γ di curve γ, contenente una delle $|\gamma_0|$; quel punto caratteristico principale che, per γ coincidente con questa γ_0, cade in P_0, al variare di γ a partire da quest'ultima posizione, entro Γ, descriverà una linea inviluppo di tali γ, e perciò tangente in P_0 alla γ_0 considerata, quindi a una delle t_0. Ne segue che, nel sistema continuo dei punti caratteristici principali cui appartiene P_0, non vi sono punti infinitamente vicini a P_0

(1) È questa una proprietà notevole e interessante dei sistemi continui almeno ∞^2 di curve piane, anche indipendentemente dalla particolare applicazione che ne è fatta nella questione presente. Il prof. Beniamino Segre ne ha data un'altra dimostrazione, semplice e luminosa, che verrà pubblicata prossimamente.

(2) Invece un punto doppio variabile della γ generica descrive generalmente l'intero piano.

stesso in direzioni diverse dalle t_0; e rimane così escluso che P_0, variando, possa descrivere l'intero piano. Il risultato si estende facilmente ai sistemi continui di curve di dimensione > 2; invero un sistema così fatto può considerarsi descritto da un sistema ∞^2 variabile, obbligato a contenere sempre un sistema ∞^1 fisso generico Δ; e allora la linea stessa descritta da P_0 al variare di γ entro Δ sarà pure luogo del punto P_0 per ogni posizione di quel sistema ∞^2, e per conseguenza per l'intero sistema proposto.

Ritorniamo ora al nostro sistema Ω, la cui curva generica γ deve avere $3(n-1)$ punti caratteristici principali in più dei $(n-1)(n-2)$ già assorbiti dai punti doppi. Ciascuno di quei $3(n-1)$:

o cade in un punto semplice della γ, e allora o è punto base, oppure punto di contatto di tale γ con una linea fissa;

oppure cade in un punto almeno doppio per la γ. Ora, con un breve calcolo, si verifica che un punto doppio di una γ generica può assorbire più di due punti caratteristici principali solamente quando esso sia punto base, oppure una cuspide, o infine quando sia vincolato a stare su di una linea fissa alla quale inoltre uno dei rami di γ che ne escono debba essere tangente. Ma quest'ultimo caso si esclude facilmente, perchè i punti caratteristici principali che cadono in punti semplici di γ assorbono un numero di condizioni, fra le $3(n-1)$, eguale a quello dei punti stessi (non potendosi mai avere una serie caratteristica di dimensione superiore all'ordine), e altrettanto deve perciò avvenire per i punti caratteristici principali in più che cadono in punti doppi di γ; mentre nell'ipotesi indicata due condizioni distinte portavano, per un punto doppio, l'aggiunta di un solo punto caratteristico principale in più.

Si osservi poi che un punto base k^{plo} può considerarsi, anche nel caso $k = 1$, come una unione, qui sostituita a una linea, colla quale le γ debbano avere k contatti; per le γ, già razionali, ciò implica solo k condizioni semplici ulteriori, e d'altra parte il punto k^{plo} assorbe $\binom{k}{2}$ fra i punti doppi, quindi $k^2 - k$ dei punti caratteristici principali precedenti, ai quali se ne aggiungono appunto altri k, per formare un totale di k^2.

Supposto pertanto che la γ generica del sistema Ω abbia $\rho\ (\geqq 0)$ cuspidi, queste implicheranno un egual numero di condizioni fra le $3(n-1)$ suddette, e assorbiranno altrettanti punti caratteristici principali in più; e le altre $3(n-1)-\rho$ condizioni consisteranno tutte in contatti con linee algebriche assegnate, coll'intesa che si potranno avere anche più contatti con una stessa linea, contatti di ordine superiore, contatti in punti assegnati (che assorbiranno sempre un numero corrispondente di condizioni distinte); e che queste linee, come unioni, potranno altresì essere sostituite da punti [1].

(1) La curva generica di un sistema Ω non può invece avere punti multipli variabili di ordine > 2. Ciò si spiega col fatto che, per una curva razionale, variabile in un

Poichè la γ generica, razionale con ρ cuspidi, è di classe $\nu = 2(n-1) - \rho$, onde $3(n-1) - \rho = n + \nu - 1$, si potrà dire che *Ogni sistema* Ω *si compone delle curve razionali di un certo ordine* n *e della classe* ν, *assoggettate inoltre a* $n + \nu - 1$ *condizioni ulteriori, consistenti in altrettanti contatti con unioni algebriche assegnate (o casi particolari).* Imponendo però a una curva razionale di dato ordine n e classe ν di avere $n + \nu - 1$ contatti con unioni algebriche comunque assegnate, si ha un sistema ∞^2 soddisfacente alla condizione *b*) enunciata al numero precedente, ma in generale non alla condizione *a*). Perchè sia soddisfatta anche quest'altra condizione, dovranno le unioni cui le curve sono tangenti essere scelte con particolari criteri, che non sono per ora in grado di precisare.