Gino Fano

Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **9** (1928), p. 16–19

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1928_1>

Geometria. — *Un esempio di trasformazione birazionale cubica inerente a un complesso lineare.* Nota [1] del Corrisp. G. Fano.

1. - In questa Nota espongo un esempio di trasformazione birazionale dello spazio inerente a un complesso lineare [2]. La trasformazione è notissima; ma questa sua particolare proprietà non fu ancora, per quanto mi consta, esplicitamente rilevata.

Si tratta della trasformazione involutoria che nasce dal far corrispondere fra loro in doppio modo le coppie di punti « coniugati » rispetto a una cubica sghemba γ^3, ossia appartenenti a una stessa corda di questa e coniugati armonici rispetto ai due punti comuni alla cubica e a questa corda; perciò anche coniugati rispetto alla rete delle quadriche passanti per γ^3 [3]. La cubica stessa è la sola curva fondamentale; ad ogni suo punto corrisponde l'intera tangente alla cubica nel punto stesso. Ai piani corrispondono le superficie cubiche φ^3 aventi γ^3 come asintotica; alle rette, cubiche sghembe incontranti γ^3 in 4 punti (i punti di contatto delle 4 tangenti di γ^3 incontrate dalla retta considerata). Se una retta si appoggia a γ^3 in un punto K, la cubica corrispondente si spezza nella tangente a γ^3 nel punto stesso K e in una conica residua; se quella retta, per di più, è contenuta nel piano osculatore a γ^3 nel punto K, è dunque un « raggio osculatore » (« Schmiegungsstrahl ») di γ^3, dalla cubica corrispondente si stacca la tangente a γ^3 in K contata 2 volte, e rimane come parte residua un'altra retta, che è pure un « raggio osculatore », luogo dei punti coniugati a quelli del primo raggio. Questi raggi osculatori sono rette del complesso lineare definito dalla cubica γ^3 (rispetto al quale si corrispondono i punti di γ^3 e i relativi piani osculatori); e precisamente quelle rette del complesso che si appoggiano a γ^3. In particolare, ai 3 raggi osculatori uscenti da un punto qualunque P dello spazio non appartenente a γ^3 (raggi contenuti nel piano π polare di questo punto rispetto al complesso, e diretti alle 3 intersezioni di questo piano con γ^3) corrisponderanno 3 raggi osculatori passanti per il punto P′ coniugato di P, e che staranno a loro volta nel piano polare di questo punto; all'elemento P (π) appartenente al complesso corrisponde dunque un elemento consimile, e si tratta perciò di trasformazione birazionale « inerente » al complesso lineare.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1928.

(2) Cfr. le mie Note in questi « Rendiconti ».

(3) Trasformazione già considerata da Staudt (*Beiträge zur Geometrie der Lage*, III, 1860, p. 321), e ampiamente studiata da Cremona, Sturm, Reye. V. in particolare Reye, *Geometrie der Lage*, 4ª ediz., vol. 2° (1907), p. 180 e sg.

Alle rette del complesso lineare corrispondono le ∞^3 cubiche del complesso medesimo appoggiate a γ^3 in 4 punti. Poichè le rette del complesso sono caratterizzate dall'incontrare la sviluppabile delle tangenti di γ^3 secondo quaderne equianarmoniche, ne segue che *per ogni cubica sghemba esiste un sistema ben definito di ∞^3 altre cubiche sghembe, appartenenti allo stesso complesso lineare della prima, e incontranti questa in 4 punti. Le quattro intersezioni formano su ciascuna delle due cubiche una quaderna equianarmonica.*

2. – A un piano generico π, incontrante γ^3 in 3 punti distinti A, B, C, corrisponde una superficie φ^3 avente questi stessi 3 punti come doppi; contenente le 3 rette BC, CA, AB, le tangenti a γ^3 nei punti A, B, C, nonchè le 3 rette che passano rispettivamente per questi stessi punti e si appoggiano alle tangenti negli altri due (1). Inoltre, indicato con P il polo del piano π rispetto al complesso lineare, saranno contenuti in π i 3 raggi osculatori PA, PB, PC; sicchè la φ^3 corrispondente conterrà i raggi osculatori rispettivamente coniugati a questi, i quali passeranno per il punto P' coniugato di P, e staranno pure in un piano, del quale costituiranno l'intersezione con φ^3. Se il piano π è tangente alla cubica γ^3, anche sulla φ^3 risultano infinitamente vicini due dei tre punti doppi; se π è osculatore a γ^3 in un suo punto K, la φ^3 è una « rigata di Cayley », a direttrici infinitamente vicine, luogo dei raggi osculatori coniugati a quelli che passano per K.

Le superficie φ^3 del tipo più generale qui incontrato si possono rappresentare sul piano in modo che i soliti 6 punti fondamentali, comuni alle cubiche immagini delle loro sezioni piane, siano a coppie (AA', BB', CC') infinitamente vicini, e sopra rette (immagini a lor volta delle 3 rette di cui sopra passanti per P') concorrenti in un punto. Fra le reti di cubiche sghembe esistenti sopra queste φ^3, ve ne sono due (che indicheremo con M_1, M_2), mutuamente residue rispetto a quadriche, che non passano per alcuno dei 3 punti doppi; esse hanno per immagini nel piano la rete delle rette, e quella delle quintiche passanti doppiamente per i 6 punti fondamentali AA', ... Altre 2 reti di cubiche, pure residue rispetto a quadriche (e che indicheremo con N_1, N_2), passano invece per tutti tre i punti doppi della φ^3; esse hanno per immagini la rete delle coniche passanti per A, B, C, e la rete delle quartiche passanti doppiamente per A, B, C, e con un ramo tangente rispettivamente alle rette AA', ... Le cubiche delle reti M_1 e N_2, e così quelle di M_2 e N_1 hanno 4 intersezioni. La φ^3 ha come asintotica *una* cubica γ^3 della rete N_2 e *una* cubica δ^3 della rete N_1; e ai complessi lineari (distinti) definiti da queste cubiche appartiene rispettivamente un fascio di cubiche M_1 e *un* fascio di cubiche M_2, le quali dovranno perciò segare rispettivamente γ^3 e δ^3 in quaderne equianarmoniche. Anzi γ^3 avrà per immagine l'unica quartica della rete corrispon-

(1) Queste ultime sei rette stanno perciò sopra una medesima quadrica.

dente a N_2, che ha in A, B, C altrettante cuspidi; quartica che dalle rette appartenenti al fascio delle 3 tangenti cuspidali è appunto incontrata in quaderne equianarmoniche. La superficie φ^3 è dunque coniugata di un piano rispetto a una cubica sghemba in due modi diversi; e in questi due modi (rispetto a γ^3, e rispetto a δ^3) le corrisponde sempre un medesimo piano (1). Le sue 6 rette passanti, a due a due, per uno soltanto dei punti doppi costituiscono complessivamente le tangenti delle 2 cubiche in quei punti.

Il complesso lineare determinato dalla cubica γ^3 (o δ^3) ha a comune col complesso di 6° grado delle tangenti di φ^3 una congruenza (6,6) composta di due congruenze (3,3), una delle quali si compone dei raggi osculatori di γ^3 (o δ^3) mentre l'altra si compone delle tangenti a un fascio di cubiche della rete M_1 (o M_2).

Le cubiche γ^3 e δ^3 hanno a comune, oltre ai tre punti doppi della superficie φ^3, altri due punti. Si può rappresentare la prima colle equazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

e in modo che le equazioni della seconda risultino:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu^3 : \mu : \mu^2 : 1 .$$

Si hanno i 5 punti comuni dando ai parametri il valore comune O, oppure ∞, oppure $+1$, oppure anche rispettivamente le 2 radici cubiche immaginarie dell'unità positiva.

Le equazioni della trasformazione cubica in parola determinata ad esempio dalla prima di queste cubiche sono (1):

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= 2 x_2^3 + x_1^2 x_4 - 3 x_1 x_2 x_3 \\
\rho x_2' &= x_2^2 x_3 - 2 x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_4 \\
\rho x_3' &= - x_2 x_3^2 + 2 x_2^2 x_4 - x_1 x_3 x_4 \\
\rho x_4' &= - 2 x_3^3 - x_1 x_4^2 + 3 x_2 x_3 x_4
\end{aligned}$$

Le φ^3 del tipo considerato dipendono da 15 parametri, essendo soggette soltanto ad avere 3 punti doppi e alla condizione che le 3 rette complanari non passanti per questi punti formino fascio. Due qualunque di esse sono omografiche in 12 modi; queste omografie risultano dal riferire proiettivamente una delle due reti M_1 e M_2 dell'una superficie a una arbitraria delle reti analoghe dell'altra, in modo che si corrispondano i punti doppi delle 2 superficie, in ordine qualsiasi, e inoltre i due punti da cui escono 3 rette complanari.

3. – Non mi è riuscito finora di stabilire se questa trasformazione cubica possa ottenersi come prodotto di altre, inerenti allo stesso complesso lineare, ciascuna delle quali muti una congruenza lineare speciale contenuta nel complesso in altra consimile.

(1) A. Cantone, «Rend. Acc. di Napoli», 15, (1886), p. 181.

Indicherò infine la trasformazione di contatto del piano che è immagine di questa trasformazione cubica nella rappresentazione veduta dello spazio punteggiato sul sistema degli elementi di un piano. Delle 2 rette incidenti p_0 e r_0, una si può assumere tangente a γ^3, l'altra semplicemente incidente; allora γ^3 avrà per immagine una conica k (passante per A, o tangente alla retta a, di cui alla mia Nota di p.). Le ∞^3 cubiche corrispondenti alle rette del complesso avranno per immagini curve piane di 6° ordine e 6ª classe, con 2 punti tripli infinitamente vicini (nell'elemento Aa), e 4 cuspidi variabili in corrispondenza alle 4 rette p tangenti a ognuna di quelle cubiche (analogamente, con 4 flessi variabili); di più esse saranno tangenti alla conica k in *quattro* punti variabili. Da queste condizioni il loro sistema ∞^3 è completamente definito. I sistemi Ω corrispondenti ai punti o alle rette si comporranno di quelle fra queste ∞^3 curve, che sono per di più tangenti a una fissa tra esse in un punto variabile. Congruenze di cubiche appartenenti a un complesso lineare possono dunque avere come immagini sistemi Ω già alquanto complessi.