GINO FANO

La varietà delle forme binarie del 7° ordine a sesta spinta identicamente nulla

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **4** (1926), p. 161–166

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1926_4>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1926.

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo).

Matematica. — *La varietà delle forme binarie del 7° ordine a sesta spinta identicamente nulla.* Nota[1] del Corrisp. GINO FANO.

1. Nella mia Nota: *Sulle forme binarie per le quali una delle spinte su sè stessa sia identicamente nulla*[2] ho considerata anche l'interpretazione geometrica della questione, cioè le varietà algebriche di opportuni spazi che rappresentano i singoli sistemi di forme di dato ordine aventi una spinta determinata identicamente nulla, quando si faccia uso della consueta interpretazione dei coefficienti c_k della forma:

$$f \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k x_1^{n-k} x_2^k ,$$

(che s'intende definita a meno di un fattore numerico) come coordinate proiettive omogenee di punto in S_n. Alcune delle varietà così incontrate erano già note e geometricamente studiate, altre no. Di una di queste ultime mi propongo esporre qui qualche proprietà, in relazione principalmente ai sistemi di rette chi vi sono contenuti.

La 6ª spinta di una forma binaria di grado n sopra sè stessa, essendo di ordine $2(n-6)$, esiste per $n \geqq 6$; e, per $n = 6$, si riduce al ben noto

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1926.
(2) «Giornale di matem.», vol. 62 (1924), p. 91.

invariante quadratico della sestica. Nel caso successivo, $n = 7$, esso è un covariante di 2° ordine, il cui annullarsi identico conduce alle 3 equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} c_0 c_6 - 6 c_1 c_5 + 15 c_2 c_4 - 10 c_3^2 = 0 \\ c_0 c_7 - 5 c_1 c_6 + 9 c_2 c_5 - 5 c_3 c_4 = 0 \\ c_1 c_7 - 6 c_2 c_6 + 15 c_3 c_5 - 10 c_4^2 = 0 . \end{cases}$$

E pertanto, nella rappresentazione suaccennata, le forme di 7° ordine a 6ª spinta nulla hanno per immagini i punti della varietà M_4^8 di S_7 intersezione completa delle 3 quadriche (1). Questa M_4^8 contiene gli ∞^1 piani osculatori, ma non gli S_3 osculatori, della curva γ^7 razionale normale di equazioni parametriche:

$$c_k = \rho^k \qquad\qquad (k = 0, 1, \cdots, 7);$$

i punti di quei piani osculatori essendo immagini di forme con radice quintupla, per le quali (come per ogni forma di grado n con radice $[n-2]^{\text{pla}}$) la 6ª spinta è appunto identicamente nulla. La M_4^8 contiene inoltre tutte le trisecanti della varietà M_3^{15} luogo dei piani osculatori della γ^7; per ogni terna di piani osculatori vi è *una* trisecante, intersezione dei 3 spazi S_5 congiungenti tali piani a 2 a 2. D'altra parte, per un punto generico della M_4^8, devono passare *otto* rette di questa varietà, intersezioni dei tre S_0 - coni secondo cui lo spazio S_4 ivi tangente ad essa incontra le 3 quadriche (1). E poichè di queste 8 rette, come vedremo, una sola è trisecante della M_3^{15} anzidetta, sorge la questione del come quelle rette si distribuiscano in diversi sistemi; questione alla quale appunto mi sono proposto di rispondere.

2. Un primo sguardo d'insieme alla questione si può dare nel modo che segue. Lo spazio (S_5) $c_3 = c_4 = 0$, congiungente i piani osculatori a γ^7 nei due punti fondamentali [0] e [7] del sistema di coordinate, incontra M_4^8 in una superficie composta delle parti sottoindicate:

a) i due piani anzidetti, osculatori a γ^7 (cioè i piani fondamentali $\overline{012}$ e $\overline{567}$);

b) la quadrica (di S_3) $c_1 = c_6 = c_0 c_7 + 9 c_2 c_5 = 0$;

c) la rigata razionale normale del 4° ordine con ∞^1 coniche direttrici, intersezione della M_3^3 di piani:

$$\left\| \begin{matrix} c_0 & c_1 & 6 c_2 \\ 6 c_5 & c_6 & c_7 \end{matrix} \right\| = 0$$

colla quadrica $c_1 c_6 - 9 c_2 c_5 = 0$, all'infuori degli stessi due piani considerati in *a*).

D'altra parte lo spazio stesso $c_3 = c_4 = 0$ incontra la M_3^{15} dei piani osculatori di γ^7, all'infuori dei due piani *a*), secondo una sua direttrice, contenuta nella rigata c). Se ne conclude che le generatrici di quest'ultima rigata sono trisecanti del sistema dei piani osculatori di γ^7 (poichè ne incontrano 2 piani osculatori fissi, e un terzo variabile); mentre dei due regoli della quadrica b), uno si compone di rette incontranti *due* piani osculatori, l'altro di rette che non ne incontrano in generale alcuno. La rigata c) e i due regoli di b) descriveranno perciò, al variare dei due punti [0] e [7] sopra γ^7, sistemi di rette tutti distinti, che (in relazione al numero dei piani osculatori di γ^7 incontrati) designeremo rispettivamente con Σ_3, Σ_2, Σ_0. Le rette di tali sistemi sono immagini di *fasci di forme binarie del* 7° *ordine* a sesta spinta identicamente nulla, contenenti rispettivamente 3, 2 oppure nessuna forma con radice quintupla.

3. Per lo studio ulteriore della M_4^8 e di questi sistemi di rette, conviene approfittare della circostanza che le (1) sono lineari rispetto a c_5, c_6, c_7, e consentono di esprimere razionalmente queste 3 coordinate mediante le altre, quali parametri omogenei: il che, geometricamente, significa che la M_4^8 si proietta univocamente dal piano $\overline{567} = \pi$, osculatore a γ^7 nel suo punto (generico) [7], sopra un S_4, che possiamo supporre sia lo spazio $c_5 = c_6 = c_7 = 0$. Le sezioni iperpiane di M_4^8, sue intersezioni cogli spazi $\sum_{k=0}^{7} \lambda_k c^k = 0$, si proiettano nelle ipersuperficie del sistema lineare ottenuto eliminando c_5, c_6, c_7 fra la $\Sigma\lambda_k c_k = 0$ e le (1), cioè:

$$(2) \qquad (\lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 + \lambda_4 c_4)(c_0^2 c_3 + 2 c_1^3 - 3 c_0 c_1 c_2) + \\ + \lambda_5 \varphi(c) + \lambda_6 \psi(c) + \lambda_7 \chi(c) = 0$$

dove φ, ψ, χ sono forme di 4° grado nelle $c_0, \cdots, c_4$. Le intersezioni variabili di queste ipersuperficie (essendo proiezioni di superficie di ordine 8° da un loro punto semplice) sono superficie del 7° ordine; e il sistema (2) avrà perciò una superficie base complessiva di 9° ordine, luogo delle immagini delle rette di M_4 appoggiate al piano π. Poichè tali rette si ripartiscono fra i 2 sistemi Σ_3 e Σ_2, dovrà la F^9 spezzarsi del pari in due parti distinte.

E invero: la M_3^{15} dei piani osculatori a γ^7 si proietta dal piano π nella M_3^6 dei piani osculatori alla γ^4 (di equazioni $c_i = \rho^i$, $0 \leq i \leq 4$) proiezione di γ^7; perciò le rette di Σ_3 appoggiate a π, e appoggiate quindi anche ad altri due piani della M_3^{15}, avranno per immagini i punti della superficie doppia di M_3^6, che è una Φ^4, proiezione generica della ben nota «superficie di Veronese»; detta Φ^4 contiene ∞^2 coniche, delle quali ∞^1 nei piani osculatori di γ^4. Invece le rette del sistema Σ_2, appoggiate a π e a un altro piano osculatore assegnato di γ^7, formano un regolo del tipo b) (n. 2), avente per traccia su questo secondo piano una retta, che pel regolo b) è lo spigolo [0] [2] della piramide fondamentale delle coordinate. Poichè [0] è un punto generico della curva γ^7 e [2] l'intersezione del piano osculatore a γ^7 in quel punto collo spazio S_5 osculatore nel punto fisso [7], così, nella proiezione da π, le rette del tipo [0] [2] avranno per immagini le rette congiungenti i singoli punti di γ^4 colle tracce dei rispettivi piani osculatori sopra un piano osculatore fisso. Queste tracce hanno per luogo una conica δ; quelle congiungenti saranno le generatrici di una rigata R^5 i cui punti saranno immagini delle rette di Σ_2 appoggiate a π; e Φ^4 e R^5, formeranno insieme la superficie base del sistema lineare (2). Entrambe queste superficie sono proiettate dal punto [4] secondo il cono cubico (∞^1 di piani):

$$c_0^2 c_3 + 2 c_1^3 - 3 c_0 c_1 c_2 = 0 \tag{3}$$

il cui vertice sarà perciò punto doppio di R^5.

La rigata razionale R^5 è normale per S_6, e caso particolare di quella considerata da Severi [1] come una delle superficie di S_4 dotate di un solo punto triplo apparente; la quartica piana direttrice riscontrata da Severi è qui costituita dalla conica δ, insieme con una generatrice - la tangente a δ nel punto fondamentale [4] - contata 2 volte [2].

Le superficie Φ^4 e R^5 hanno a comune la conica δ, e si toccano lungo la quartica γ^4, nei punti della quale hanno i piani osculatori di questa come piani tangenti comuni. Per la R^5 ciò è ovvio, poichè le sue generatrici stanno, per costruzione, nei piani osculatori di γ^4. Quanto a Φ^4, essa ammette lo stesso gruppo proiettivo ∞^3 che muta in sè γ^4; il piano tangente ad essa in un punto di γ^4 deve quindi essere unito per il sottogruppo ∞^2 che lascia fisso questo punto, e deve quindi coincidere col piano ivi osculatore a γ^4.

4. Le rette della varietà M_4^8 non appoggiate al piano π sono proiettate da questo piano su S_4 secondo rette incontrate dalle V_3^4 del sistema lineare (2) in un solo punto variabile, e perciò trisecanti della superficie base complessiva $\Phi^4 + R^5$. È perciò ovvio che la loro distribuzione nei diversi sistemi Σ dovrà corrispondere ai vari modi di ripartire queste 3 intersezioni fra Φ^4 e R^5. Indichiamo con h ($\geqq 0$) il numero delle intersezioni delle suaccennate rette proiezioni con Φ^4; il numero delle loro intersezioni con R^5 sarà perciò $3 - h$; e poichè la M_3^6 dei piani osculatori di γ^4 passa doppiamente per Φ^4 e semplicemente per R^5, il numero dei piani osculatori di γ^4 incontrati dalle stesse rette fuori della superficie base complessiva, quindi

(1) *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie...*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », vol. 15° (1901); cfr. in part. n. 13.

(2) Rappresentata parametricamente γ^4 colle solite equazioni $c_i = \rho^i$, le equazioni di R^5 possono ricevere la forma:

$$c_0 = \frac{c_1}{\rho} = \frac{c_2}{\rho^2(1+u)} = \frac{c_3}{\rho^3(1+3u)} = \frac{c_4}{\rho^4(1+6u)}$$

essendo ρ, u i due parametri.

anche il numero dei piani osculatori di γ^7 incontrati dalle corrispondenti rette oggettive di M_4^8, sarà $= 6 - 2h - (3 - h) = 3 - h$.

Per le rette del sistema Σ_3, incontranti 3 piani osculatori di γ^7, sarà $3 - h = 3$, onde $h = 0$; esse si proiettano perciò nel sistema Σ'_3 delle trisecanti di R^5, che è del 1° ordine [1]. In particolare, le rette di Σ_3 appoggiate al piano π hanno per immagini i singoli punti di Φ^4, unitamente alle trisecanti di R^5 passanti rispettivamente per essi. Queste trisecanti, immagini dei punti di π, e rette fondamentali del sistema lineare (2), non sono altro che le generatrici del cono (3).

Per le rette del sistema Σ_0, non incontranti, in generale, piani osculatori di γ^7, è $3 - h = 0$, $h = 3$; esse si proiettano perciò nel sistema Σ'_0 delle trisecanti di Φ^4, che è pure di 1° ordine [2]. In questo sistema sono comprese anche le generatrici di R^5, tangenti a Φ^4 nei punti della quartica γ^4 e appoggiate ancora ad essa nei punti della conica δ. Le rette di Σ'_0 devono distribuirsi in ∞^2 regoli, proiezioni di altrettanti esistenti sulle quadriche del tipo *b)* (n. 2); e vedremo subito in qual modo.

Per le rette del sistema Σ_2, incontranti 2 piani osculatori di γ^7, è $3 - h = 2$, $h = 1$, esse si proiettano perciò nel sistema Σ'_2 delle corde di R^5 appoggiate semplicemente a Φ^4. Anche queste devono distribuirsi in ∞^2 regoli, aventi rispettivamente i precedenti come regoli di direttrici. Per i regoli contenuti in Σ'_2 valgono le proprietà seguenti:

Ogni retta r di Σ'_2 appartiene a *uno* (solo) di questi ∞^2 regoli. Essa si appoggia infatti a 2 generatrici g_1, g_2 di R^5, il cui spazio S_3 incontra Φ^4 in una quartica di 2ª specie (razionale); poichè g_1 e g_2 sono trisecanti di Φ^4 e di questa quartica, la rigata che ha per direttrici g_1, g_2 e tale quartica è un regolo, contenente la r e contenuto in Σ'_2. Ed è anche il solo; perchè lo spazio S_3 di un regolo contenuto in Σ'_2 deve incontrare R^5 secondo una linea bisecante le generatrici del regolo stesso, e non incontrante una sua direttrice rettilinea generica, che è retta di Σ'_0; perciò secondo una coppia di rette, generatrici di R^5: le sole 2 appoggiate ad r. *Gli ∞^2 regoli del sistema Σ'_2 stanno dunque negli spazi S_3 determinati dalle coppie di generatrici della rigata R^5.*

L'ordine del sistema Σ'_2 sarà pertanto eguale al numero dei suoi regoli passanti per un punto generico di S_4; e perciò anche - poichè le direttrici di questi regoli costituiscono il sistema Σ'_0, che è del 1° ordine - al numero dei regoli di Σ'_2 passanti per una retta generica s di quest'ultimo sistema. Ora, da questa retta la rigata R^5 è proiettata su di un piano secondo un inviluppo di 5ª classe, razionale, e avente perciò 6 rette doppie; vi sono quindi in R^5 *sei* coppie di generatrici contenute in spazi S_3 passanti

(1) SEVERI, loc. cit.

(2) ASCIONE, «Rend. R. Acc. dei Lincei», ser. 5ª, vol. 6° (1897)I. Cfr. pure SEVERI, loc. cit.

per s, e da queste coppie, colla costruzione applicata poc'anzi a g_1, g_2, si ottengono altrettanti regoli contenuti in Σ'_2 e di direttrice s (ovvero, il che fa lo stesso, regoli di Σ'_0 contenenti la s).

Risultano così esaurite, sopra la M_4^8, le *otto* rette passanti per un punto generico, poichè i sistemi Σ_0 e Σ_3 sono del 1° ordine, e Σ_2 del 6° ordine. Per un punto generico di M_4^8 passano *sei* quadriche del tipo *b*); e precisamente: una sola retta del sistema Σ_0, comune a tutte queste quadriche, e sei rette del sistema Σ_2, una su ciascuna di quelle quadriche.

La proiezione eseguita ci mostra anche l'esistenza in S_4 di un quarto sistema di rette, pure trisecanti della superficie complessiva $\Phi^4 + R^5$; il sistema Σ'_1 delle corde di Φ^4 appoggiate semplicemente a R^5. Ma questo sistema si spezza in due altri, entrambi di ordine *zero*, e composti delle rette contenute rispettivamente nei piani osculatori di γ^4, e nei piani del cono cubico (3). Invero, ciascuno di questi piani, sia degli uni che degli altri, contiene una conica di Φ^4 e una generatrice di R^5; tutte le rette ivi contenute sono dunque corde di Φ^4 appoggiate a R^5. E non ve ne sono nemmeno altre. Infatti le corde di Φ^4 passanti per un punto assegnato di S_4 si distribuiscono nei piani di 3 coniche di Φ^4 stessa, aventi a comune una retta, trisecante di Φ^4 (proprietà ovvie, quando si pensi che da quel punto Φ^4 deve proiettarsi in una superficie di Steiner); se il punto assegnato sta su R^5, questa trisecante è generatrice di R^5, e tangente a Φ^4; perciò di quelle 3 coniche solo 2 sono distinte (ed è precisamente quella contenuta in un piano osculatore di γ^4 che ne assorbe 2 fra le 3.

5. La varietà M_4^8 considerata, e tutti i sistemi di rette in essa contenuti, sono invarianti rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 di S_7 trasformante in sè la curva γ^7.

Una retta generica del sistema Σ_3 è invariante rispetto al gruppo diedrico G_6 che permuta nei vari modi i 3 piani osculatori γ^7 ad essa incidenti.

Per una retta generica del sistema Σ_0 passano 6 regoli contenuti in Σ_0, giacenti su quadriche del tipo *b*), ciascuno dei quali ha 2 generatrici contenute in piani osculatori di γ^7. Si hanno così, in corrispondenza ad ogni ogni retta di Σ_0, *sei* coppie di piani osculatori, le quali, a 2 a 2, formano quaderne costituenti un unico continuo, e proiettivamente equivalenti. Da ciò si trae che ogni retta di Σ_0 è invariante per un gruppo icosaedrico di proiettività su γ^7; e il gruppo di 12 punti invariante su γ^7 è dato dai punti di osculazione dei 12 piani anzidetti.

Una retta del sistema Σ_2 è invariante per la sola involuzione avente per elementi doppi, nel sistema dei piani osculatori di γ^7, i 2 piani a cui quella retta si appoggia.