Gino Fano

Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni omografiche

Boll. U.M.I., Vol. **5** (1926), p. 164–167

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1926_3>

Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni omografiche.

Nota di GINO FANO (a Torino).

In un lavoro che verrà inserito nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei ho determinate tutte le superficie di uno spazio qualsiasi, aventi le curve-sezioni a 2 a 2 omografiche; problema che già l'anno scorso il prof. FUBINI e io avevamo risoluto, limitatamente alle superficie dello spazio a 3 dimensioni (2). Ecco un breve cenno del procedimento usato e del risultato ottenuto.

(1) Si osservi che tutti gli altri minori d'ordine $(n-1)^2$ estratti dalla matrice si possono calcolare in base allo stesso teorema d'algebra, e risulteranno la potenza $(n-1)$ del prodotto di due minori dello Jacobiano; e cioè la potenza $(n-1)$esima dello Jacobiano di $n-1$ fra le y rispetto ad $(n-1)$ fra le x, per lo Jacobiano di altre $(n-1)$ delle y rispetto ad $(n-1)$ delle x.

(2) Rend. R. Accad. dei Lincei, ser. 6ª, vol. 1° (1925)$_1$, p. 469, 473.

Stabilisco anzitutto che la superficie F di cui si tratta, all'infuori del caso ovvio dei coni, che qui s'intenderanno sempre esclusi, sono tutte algebriche. A tal uopo considero due sezioni iperpiane infinitamente vicine C, C' della superficie F, le quali si corrisponderanno in una certa omografia, prossima all'identità, fra i loro iperpiani π, π'; le rette congiungenti le coppie di punti omologhi di questi 2 iperpiani formeranno un sistema algebrico Γ. Tenendo fermo l'iperpiano π e variando convenientemente π', p. es. facendo coincidere π' coi singoli iperpiani infinitamente vicini a π entro una rete di iperpiani contenente π stesso, si avranno ∞^1 sistemi Γ, formanti complessivamente un sistema di rette Δ, anche algebrico, nel quale sono contenuti gli ∞^1 fasci di rette tangenti alla superficie F nei singoli punti della linea C. Tenendo ancora fermo l'iperpiano π e la curva C, e variando la rete di iperpiani anzidetta, si avranno — sotto certe condizioni — infiniti sistemi Δ, che dovranno tutti contenere il sistema delle tangenti ad F nei diversi punti di C, e dei quali questo sistema di tangenti ad F è l'intersezione completa, o una delle componenti di quest'intersezione. Se ne conclude allora che è algebrico quel sistema ∞^1 di fasci di rette tangenti ad F, perciò algebrica la linea C, e quindi anche la superficie F.

Alla stessa conclusione si perviene anche se quelle certe condizioni non sono verificate, vale a dire se i sistemi di rette Δ dianzi considerati, per un dato iperpiano π, coincidono tutti, oppure hanno intersezione più ampia. Occorre soltanto spingere più a fondo l'indagine, in modo da ricavare dai sistemi Δ relativi ai diversi iperpiani π dei sistemi ulteriori, anche algebrici, dai quali, come intersezione o parte di intersezione, possa ricavarsi il sistema delle tangenti a F nei punti di una C, o il sistema di tutte le tangenti ad F.

In secondo luogo osservo che, quando un'iperpiano variabile diventa tangente alla superficie F, la curva intersezione con questa superficie acquista un punto doppio in più della sezione generica; e perciò l'omografia fra questa sezione particolare e una sezione generica è necessariamente degenere (a determinante nullo). Di qui si trae che le sezioni determinate in F dagli iperpiani ad essa tangenti sono tutte riducibili; e perciò la superficie F — che ora possiamo supporre algebrica — potrà essere soltanto (1):

(1) CASTELNUOVO, Rend. R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, vol. 3° (1894)$_1$, p. 22. Dal risultato ivi stabilito per lo spazio S_3 segue immediatamente quali sono i casi possibili in uno spazio superiore.

Una superficie rigata; oppure:

La superficie del 4° ordine dello spazio S_5 contenente ∞^2 coniche, e detta comunemente « superficie di Veronese », o una sua proiezione. Ora, la superficie di Veronese normale ha per sezioni quartiche razionali normali, tutte omografiche; e, fra le sue proiezioni (escluse le rigate), una sola ha ancora sezioni omografiche: la superficie di S_4 che si ottiene proiettando la prima da un punto del piano di una sua conica (ma non appartenente a tale conica). Questa proiezione è, per conseguenza, una F^4 con retta doppia; e le quartiche sghembe con punto doppio sono infatti tutte omografiche.

Rimangono ancora a determinare le rigate algebriche di uno spazio qualsiasi a sezioni omografiche.

Fra queste, le rigate razionali normali, cioè di ordine $n-1$ se appartenenti ad S_n, godono della proprietà che due loro sezioni iperpiane qualunque sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici; e si riconosce facilmente che (quando si escludano pur sempre i coni) tale proprietà è per esse caratteristica. Anzi, sopra qualsiasi altra rigata di uno spazio S_r, un sistema di sezioni iperpiane punteggiate proiettivamente a 2 a 2 dalle generatrici ha sempre dimensione $\leq r-2$. Supposto pertanto che una rigata algebrica abbia le sezioni tutte omografiche, si considerino due fra queste sezioni, e, nel sistema ∞^1 delle generatrici, la trasformazione Ω che nasce dal considerare come corrispondenti 2 generatrici passanti rispettivamente per punti omologhi di quelle 2 sezioni. Si avranno così, complessivamente, almeno ∞^2 trasformazioni Ω distinte; e la rigata sarà perciò razionale. D'altra parte le Ω distinte sono al più ∞^3; perciò le sezioni iperpiane della nostra rigata dovranno distribuirsi o in ∞^2 sistemi ∞^{r-2}, oppure in ∞^3 sistemi ∞^{r-3}, gli uni e gli altri lineari, tali che le generatrici punteggino proiettivamente tutte le sezioni di ogni singolo sistema, e non sistemi più ampi.

Il secondo caso può presentarsi soltanto per $r=3$, e conduce alla sola sviluppabile delle tangenti di una cubica sghemba, di cui, infatti, due sezioni piane generiche non sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici.

Nella prima ipotesi, la rigata proposta R, da $r-3$ suoi punti generici, si proietta in una rigata R' dello spazio S_3, le cui sezioni piane si distribuiscono esse pure in ∞^1 fasci, tali che quelle di uno stesso fascio sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici. Di qui si trae ancora:

Che R' è contenuta in una congruenza lineare di rette, e ha perciò due direttrici rettilinee (distinte o infinitamente vicine);

Che una di queste direttrici è proiezione di una direttrice anche rettilinea d della R, eventualmente multipla;

Che questa direttrice rettilinea di R può essere solamente doppia o semplice;

Che infine da questa direttrice la R è proiettata secondo un cono di piani, sul quale le trasformazioni corrispondenti alle Ω dianzi considerate risultano proiettive; sicchè questo cono, che è razionale, sarà anche normale; e, poichè appartiene allo spazio S_r, sarà di ordine $r-2$.

Risulta da ciò che, per una rigata non normale, la retta d può esserè solamente doppia; o direttrice doppia, oppure direttrice semplice e generatrice in pari tempo. In ambo i casi si tratta di una rigata di ordine $n-1$ in S_{n-1}, proiezione di una R^{n-1} normale di S_n con conica o retta direttrice, da un punto del piano di quella conica, o del piano della direttrice rettilinea e di una generatrice.

Concludendo: *Le superficie di uno spazio qualsiasi a sezioni omografiche sono soltanto:*

I coni;

Le rigate razionali normali (di ordine $n-1$, in S_n), e le proiezioni su S_{n-1} di quelle fra esse che hanno una conica o una retta direttrice, da un punto del piano di quella conica, o rispett. del piano della direttrice rettilinea e di una generatrice. Per $n=4$ hanno, in S_3, i due tipi ben noti di rigate cubiche; per $n>4$ si hanno rigate che possono considerarsi come generalizzazioni di questi due tipi;

La sviluppabile delle tangenti di una cubica sghemba;

La superficie del 4° ordine dello spazio S_5 contenente ∞^2 coniche, detta comunemente « di Veronese »; e la sua proiezione su S_4 fatta da un punto del piano di una sua conica, perciò con retta doppia.

Esclusi i coni, si hanno dunque soltanto superficie le cui sezioni sono curve razionali e prive di invarianti assoluti; inoltre superficie normali, o proiezioni molto particolari di queste.