Gino Fano

Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni piane collineari

Mem. Acc. Lincei, Serie 6, Vol. **2** (1926), p. 115–129

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1926_1>

Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari

Memoria del Corrisp. GINO FANO

presentata nella seduta del 3 giugno 1926

1. Nella mia nota: *Sulle superficie dello spazio S_3 a sezioni piane collineari* [1] ho mostrato, in connessione anche a una nota precedente del Prof. FUBINI, che le superficie le quali godono della proprietà accennata sono soltanto i coni, le rigate algebriche di 2° e 3° ordine, e la sviluppabile del 4° ordine formata dalle tangenti di una cubica sghemba. Il procedimento usato non appare sufficiente a determinare anche le superficie a sezioni collineari appartenenti a uno spazio superiore; ma si può opportunamente integrarlo, in modo da conseguire successivamente i risultati qui sotto indicati:

1°) Le superficie a sezioni collineari e di uno spazio qualsiasi, all'infuori dei coni, sono tutte algebriche. A ciò si perviene con considerazioni più complesse, ma che presentano qualche analogia con quelle usate al n° 2 della mia nota cit.;

2°) L'omografia fra una sezione generica fissa e una sezione variabile diventa degenere quando quest'ultimo iperpiano è tangente alla superficie. Da questa osservazione (che già interviene nelle considerazioni precedenti) si trae che la superficie di cui trattasi è incontrata da tutti gli iperpiani tangenti secondo curve riducibili, ed è quindi rigata, salvo una sola eccezione, costituita dalla «superficie di Veronese» del 4° ordine e dalle sue proiezioni;

3°) Le rigate a sezioni collineari, e che non sono coni, sono tutte razionali; perciò o normali (di ordine $n-1$ in S_n) oppure proiezioni di queste. Complessivamente:

Le sole superficie, di uno spazio qualsiasi, a sezioni iperpiane collineari sono:

1°) *I coni* (affatto qualsiansi);

2°) *Le rigate razionali normali, cioè di ordine $n-1$ se appartenenti allo spazio S_n; e la superficie del 4° ordine dello spazio S_5 contenente una doppia infinità di coniche, e comunemente detta «superficie di Veronese»* [2]. Queste sono, com'è noto, le (sole) superficie aventi per sezioni curve razionali normali, cioè, per un ordine qualsiasi, le curve più semplici possibili;

3°) *Le superficie dello stesso ordine $n-1$ e appartenenti ad S_{n-1} che sono*

(1) *Rend. R. Accad. de' Lincei*, ser. 6ª, vol 1° (1925)$_1$, p. 473.

(2) Superficie già considerata da CAYLEY, *Phis. Trans.* 158 (1868), p. 75 (Coll. Papers, vol. 6, p. 191). Cfr. poi VERONESE, *Mem. Acc. Lincei*, ser. 3, vol. 19 (1884), p. 344; SEGRE, *Atti Acc. Torino*, vol. 20 (1885), p. 487.

proiezioni delle precedenti e hanno una retta doppia; proiezioni fatte dunque da un punto del piano di una conica contenuta nella superficie normale anzidetta; e, se si tratta di una rigata, la conica direttrice può anche spezzarsi in una direttrice rettilinea e una generatrice;

4°) Nel solo spazio S_3: *La sviluppabile del 4° ordine formata dalle tangenti di una cubica sghemba.* Quest'ultima superficie ha dunque una posizione del tutto speciale; fra le superficie rigate di cui qui si tratta, è la sola sviluppabile, e anche la sola in cui non esistono sezioni piane o iperpiane punteggiate proiettivamente dalle generatrici.

All'infuori del caso ovvio dei coni, si hanno dunque soltanto superficie le cui curve sezioni sono razionali e prive di invarianti assoluti.

2. Premettiamo qualche osservazione preliminare, che in seguito ci sarà utile poter appplicare, senza interrompere il filo di ulteriori ragionamenti.

Sopra una rigata razionale normale, di ordine $n-1$ e appartenente allo spazio S_n, due sezioni iperpiane generiche sono omografiche in ∞^3 modi diversi; e vengono, fra altro, punteggiate proiettivamente dalle generatrici. Viceversa, sia R una rigata appartenente ad S_n e di cui due sezioni generiche siano riferite omograficamente dalle generatrici. Per quest'omografia saranno uniti tutti i punti comuni a dette sezioni. Proiettando R da $n-3$ suoi punti generici su di un S_3, avremo una rigata R' di S_3, della quale ancora due sezioni piane generiche α e β saranno riferite omograficamente dalle generatrici; e per questa omografia saranno uniti i punti comuni alle 2 sezioni, quindi la retta intersezione dei 2 piani α e β. Le rette congiungenti coppie di punti omologhi di questi piani formeranno una congruenza lineare, oppure una stella, contenente la rigata R'. Nel secondo caso, R' sarà un cono; e tale sarà pure R, essendosi fatta la proiezione da suoi punti generici. Nel primo caso, la stessa congruenza lineare punteggerà proiettivamente tutti i piani contenuti nel fascio $\alpha\beta$; ma non un sistema lineare di piani più ampio. Perciò, ripetendo la stessa considerazione ad es. per la sezione α e per altre non contenute nel fascio $\alpha\beta$, ci procureremo nuove congruenze lineari contenenti R'; e R' sarà perciò una quadrica (un « regolo »), quindi R di ordine $n-1$, razionale e normale.

Le rigate razionali normali e i coni sono le sole rigate di cui due sezioni iperpiane qualsiansi sono punteggiate omograficamente dalle generatrici.

La stessa conclusione si può anche trarre, collo stesso ragionamento, quando si sappia che le sezioni di R, pur non essendo tutte punteggiate proiettivamente dalle generatrici, si ripartiscono in ∞^1 sistemi ∞^{n-1} (necessariamente lineari), tali che la proprietà indicata sussista per tutte le sezioni di ognuno fra questi sistemi ∞^{n-1}. Infatti R' avrebbe ancora, in infiniti modi diversi, ∞^2 sezioni piane riferite omograficamente dalle generatrici; e si potrebbe egualmente concludere che essa, se non è un cono, sta in infinite congruenze lineari, ed è perciò una quadrica.

Esclusi pertanto i due casi ovvii sopra accennati, si potranno avere sopra una rigata di S_n dei sistemi (lineari) al più ∞^{n-2} di sezioni tutte riferite omograficamente, a 2 a 2, dalle generatrici.

Un'altra osservazione. Supponiamo che per una superficie F a sezioni omografiche queste sezioni siano « curve W » di KLEIN-LIE [1], cioè traiettorie di gruppi continui proiettivi ∞^1 (curve che comprendono, come casi particolari, le curve razionali normali). In tal caso, indicato con P un punto generico della superficie F, le sezioni passanti per P dovranno anche corrispondersi, a due a due, in infinite omografie formanti sistema continuo, e perciò anche in un'omografia per la quale P sia punto unito. Perciò la proiezione di F dal punto P su di uno spazio inferiore sarà ancora una superficie a sezioni omografiche (benchè tali sezioni non siano più, in generale, curve W). Possiamo dunque limitarci a considerare superficie, le cui sezioni abbiano al più un sistema discontinuo di trasformazioni proiettive in sè; salvo poi esaminare se qualcuna delle superficie che avremo trovate, e che, all'infuori dei coni, saranno tutte algebriche, sia proiezione, da un punto, di altra superficie di uno spazio superiore e di ordine superiore di un'unità, le cui sezioni siano curve W fra loro omografiche. Non si troveranno però, in tal modo, casi ulteriori.

3. Sia F una superficie qualsiasi (che non supponiamo *a priori* algebrica, però ente analitico completo) a sezioni collineari, appartenente ad S_n. Ogni omografia fra due sue sezioni è anche un'omografia ben definita Σ fra gli interi spazi S_{n-1} di queste curve. Variando con continuità questa coppia di S_{n-1}, varierà la Σ, descrivendo un sistema che possiamo supporre continuo: se le Σ si distribuissero in più schiere continue distinte, ci limiteremo a tener conto di quella schiera, ben definita, che contiene tutte quelle omografie fra iperpiani π e π' le quali, quando π' si avvicina indefinitamente a π, tendono all'identità.

Supposto π fisso e generico, ogni qualvolta π', variando, diviene tangente ad F, la sua intersezione con F acquista, nel punto di contatto, un punto doppio in più della sezione generica; e l'omografia Σ, risultando alterato un carattere proiettivo di questa sezione, sarà allora degenere (a determinante nullo). Questa considerazione dovrà applicarsi più volte in seguito. Delle ∞^n omografie Σ che intercedono fra π, fisso e generico, e π' variabile, solo ∞^{n-1} sono degeneri; e pertanto questo sistema ∞^{n-1} di omografie degeneri non è suscettibile di variare con continuità, entro il precedente sistema ∞^n. Quando risulti che, per π fisso, esso dovrebbe variare con continuità, si potrà concludere altresì che rimane invariato.

Applicando a un punto P della superficie F tutte le omografie Σ che intercedono fra un iperpiano qualunque passante per P stesso e un altro iperpiano qualsiasi, si otterranno sempre ancora punti di F. Vediamo ora se possano le Σ operare sopra F in modo intransitivo, portando cioè P, supposto generico sopra F, nei soli punti di una linea γ. Se P' è un altro punto generico di γ, ed esistono perciò 2 iperpiani π, π' passanti rispett. per P e P', tali che l'omografia Σ (o una delle Σ) fra essi muti P in P', è ovvio che per mezzo di omografie tra π' e altri iperpiani si potrà spostare anche P' con continuità sopra γ; e pertanto la γ relativa a P' sarà ancora la stessa che per P; cioè questa γ non varierà al variare di P sopra essa. La F sarà dunque luogo di un (solo)

[1] *Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc.*, vol. 70 (1870), p. 1222, 1275; *Math. Ann.*, vol. 4 (1872), p. 50.

fascio di γ, invarianti rispetto a tutte le Σ; e tali γ punteggeranno proiettivamente tutte le sezioni iperpiane di F. Ora ciò non è possibile se non quando le γ siano rette, il che ci riconduce ai casi ovvii del n° prec. Invero ogni γ, se non è una retta, sarà inviluppo del sistema ∞^{n-1} degli iperpiani ad essa tangenti; sistema che dovrà variare da una γ all'altra, esaurendo così il complesso degli iperpiani di S_n. D'altra parte fissato un iperpiano π generico, non tangente perciò ad F nè ad una γ generica, l'omografia Σ (o una delle Σ) fra questo e un secondo iperpiano variabile π' sarebbe degenere ogni qualvolta il secondo iperpiano fosse tangente a una γ a cui non fosse tangente il primo, perchè a due punti distinti di π, appartenenti a quella γ, corrisponderebbe lo stesso punto di contatto di π' con tale γ; si avrebbe quindi, per π fisso, un sistema ∞^{n-1} di iperpiani π', variabile con continuità al variare della γ, e e tutti corrispondenti a π in omografie degeneri. E ciò, come si è veduto, non è possibile.

Esclusi dunque i casi ovvii già menzionati, le omografie Σ sposteranno un punto generico P di F sopra l'intera F opereranno dunque transitivamente rispetto a F)([1]); e vi saranno perciò delle Σ infinitesime che sposteranno P in tutte le ∞^1 diverse direzioni uscenti da P sopra F. La stessa transitività deve anche mantenersi se si applicano a P le sole Σ intercedenti fra un iperpiano *fisso* generico π passante per esso, e un altro iperpiano π' comunque variabile. Invero, se tali Σ spostassero P unicamente sopra una curva δ, questa non sarebbe certo tangente in P a π, perchè se no sarebbero degeneri tutte le Σ fra π e un iperpiano non tangente a δ, le quali sono Σ affatto generiche: se ne trae allora che, variando π' con continuità, a partire da π e in modo da continuare a passare per P, le Σ fra queste coppie di iperpiani π e π' avrebbero sempre P come punto unito; e pertanto il sistema di tutte quante le Σ, a partire da un qualsiasi iperpiano per P, opererebbe anch'esso intransitivamente sopra F.

4. Le omografie Σ fra coppie di iperpiani di S_n, nelle quali a un punto P della superficie F corrisponde sempre ancora un punto di questa superficie, si possono applicare anche a punti di S_n non appartenenti ad F. Non vi può essere però un'infinità continua di superficie Φ (e nemmeno di varietà di dimensione maggiore; ma a noi basta stabilire il risultato per il caso delle superficie) tutte invarianti rispetto alle Σ, e quindi anch'esse, al pari di F, a sezioni iperpiane omografiche e corrispondentisi in quelle medesime omografie Σ. Invero, se un tale sistema esistesse, il sistema ∞^{n-1} degli iperpiani tangenti alle singole Φ dovrebbe variare da una Φ all'altra, ed esaurire così complessivamente il sistema degli iperpiani di S_n; allora, data una Σ generica, quindi anche una coppia di iperpiani generici, vi sarebbe una Φ tangente a uno di questi iperpiani e non all'altro; con che quella Σ, e quindi tutte le Σ, sarebbero degeneri. (Se le Φ fossero sviluppabili, occorrerebbe considerare, anzichè i sistemi degli

---

([1]) Sopra un cono, la cui sezione non sia una curva W, le Σ operano invece in modo intransitivo; e le linee γ sono in tal caso le generatrici. Le Σ operano però transitivamente sui coni W e sulle rigate razionali normali, poichè 2 sezioni iperpiane sono allora omografiche in infiniti modi diversi.

iperpiani ad esse tangenti, quelli degli iperpiani passanti per le singole generatrici). Pertanto, se a un punto P di S_n non appartenente ad F, ma sia pure comunque prossimo a un punto generico di F, si applicano tutte le Σ intercedenti fra un iperpiano qualsiasi passante per P stesso e un altro iperpiano pure qualsiasi, si avrà, come luogo dei corrispondenti di P, una varietà almeno ∞^3 (se si avesse sempre una superficie, saremmo nel caso delle Φ di poc'anzi). È presumibile anzi che, applicando a P anche le sole ∞^n omografie Σ intercedenti fra un iperpiano generico *fisso* passante per questo punto e un altro comunque variabile in S_n, si ottenga già come luogo dei corrispondenti di P l'intero spazio S_n. Comunque, per tener conto di tutte le ipotesi che *a priori* appaiono possibili, distingueremo 2 casi nei termini sotto indicati:

a) Considerato un punto generico di F, un punto P di S_n comunque prossimo al precedente ma non appartenente ad F, e un'iperpiano fisso generico π di S_n passante per P, sempre le omografie Σ fra π e un altro iperpiano π' comunque variabile spostino già esse P sopra un'intera varietà almeno ∞^3; e perciò le Σ infinitesime fra π (fisso) e un'iperpiano ad esso infinitamente vicino spostino già P secondo almeno ∞^2 direzioni diverse;

b) Per ogni punto di F vi siano dei punti P di S_n, comunque prossimi ad esso ma non appartenenti a F, i quali dalle stesse Σ dianzi considerate vengano spostati solamente sopra superficie; superficie che però, per ogni P così fatto, dovranno variare quando, pur tenendo fermo P, si faccia variare convenientemente l'iperpiano π per esso.

Caso *a*). Consideriamo un iperpiano π' infinitamente vicino a π, e le curve C, C' intersezioni di π, π' colla superficie F. Le rette congiungenti coppie di punti omologhi P, P' nell'omografia (prossima all'identità) tra queste due curve saranno altrettante tangenti di F nei singoli punti P della C, e contenute nel sistema di rette Γ, algebrico e ∞^{n-1}, formato da tutte le congiungenti di coppie di punti omologhi degli interi iperpiani π e π'. Tenendo fissa la C, e variando opportunamente l'iperpiano π' e la curva C', varieranno certo quelle tangenti di F; prendendo quindi, entro π, un fascio generico di S_{n-2}, e, per ciascuno di questi S_{n-2}, l'iperpiano infinitamente vicino a π, la curva C' sua intersezione con F, e il corrispondente sistema di rette Γ, si avrà una ∞^1 razionale di sistemi Γ, e complessivamente un sistema di rette Δ, algebrico e ∞^n, nel quale sarà contenuto il sistema ∞^2 di tutte le tangenti ad F nei punti di C. (Quanto si è detto finora vale anche pel caso *b*); non vale però egualmente tutto quello che segue). Facciamo variare ancora, in tutti i modi possibili, il fascio di S_{n-2} considerato entro π; il corrispondente sistema Δ varierà anch'esso, perchè, per un punto generico P di π, i vari Δ devono fornire complessivamente almeno ∞^2 rette uscenti da esso, mentre nel primo Δ ve n'erano sole ∞^1; tuttavia quel Δ, variando, continuerà a contenere gli ∞^1 fasci delle tangenti a F nei punti di C. Questi ∞^1 fasci saranno perciò comuni a tutti i sistemi Δ considerati. Poichè questi sono algebrici, sarà pure algebrica la loro intersezione, e ogni singola componente di questa; e tale è appunto il sistema degli ∞^1 fasci delle tangenti ad F nei punti di C, poichè, nelle ipotesi fatte, esso è una varietà analiticamente completa, e non contenuta in altra di maggior dimensione e parimente comune a tutti i sistemi Δ. Sarà perciò algebrica la linea C, e con essa la superficie F.

Caso b). In questa nuova ipotesi i sistemi Δ considerati possono avere a comune un più ampio sistema di fasci di rette uscenti da punti di π; e coinciderebbero anzi tutti, se ogni punto P di π, dalle omografie Σ fra π (fisso) e un ulteriore iperpiano qualsiasi, fosse portato nei soli punti di una superficie (la quale dovrà però variare quando, pur rimanendo fisso P, varia l'iperpiano π per esso). Si indichi allora con Δ' l'intersezione, certo algebrica, dei vari Δ suddetti, e eventualmente lo stesso Δ unico; e si consideri l'insieme di quei punti di π (fra i quali certo l'intera curva C) da cui esce un fascio di raggi contenuto in Δ' e non in π, e la varietà, che sarà pure algebrica, di elementi «punto-piano» determinata da questi fasci di rette. Prendendo ora un fascio di iperpiani π, e la varietà di elementi punto-piano costituita dalle ∞^1 varietà del tipo precedente che si ottengono per quei singoli iperpiani π, è ovvio che questa nuova varietà complessiva di elementi punto piano sarà del pari algebrica, e conterrà tutti gli elementi costituiti dai singoli punti della superficie F insieme coi relativi piani tangenti. Consideriamo infine le varietà analoghe a quest'ultima, in corrispondenza a tutti i fasci di iperpiani di S_n. È ovvio, in base alle ipotesi fatte, che queste avranno ancora a comune la varietà degli elementi punto-piano costituita dai punti e piani tangenti di F, e non altri elementi. Questa intersezione sarà quindi algebrica, e algebrica di conseguenza la superficie F.

Concludiamo pertanto che le superficie a sezioni omografiche, all'infuori dei coni, sono tutte algebriche.

5. Sia ora F una superficie algebrica dello spazio S_n, a sezioni omografiche. Ricordiamo che l'omografia tra due curve-sezioni è degenere ogni qualvolta, dei loro iperpiani S_{n-1}, uno e non l'altro è tangente ad F. Ora, in una omografia degenere fra due spazi (qui S_{n-1}), di due punti corrispondenti sempre uno almeno è singolare; e in ciascuno dei due spazi i punti singolari hanno per luogo uno spazio di dimensione minore, eventualmente anche, in uno di essi, di dimensione *zero*, limitato cioè a un unico punto singolare. D'altra parte l'intersezione di F con un S_{n-1} generico è curva irriducibile, e appartenente a questo S_{n-1} (non contenuta cioè in uno spazio minore); perciò un punto generico di questa curva f è certo non singolare per l'omografia tra f medesima e la sezione f' determinata da un S_{n-1} tangente ad F. Al detto punto generico di f dovrà perciò corrispondere su f' un punto certamente singolare per l'omografia degenere di cui si tratta. E pertanto:

o, al variare del primo punto sopra f, varierà anche, sopra f', questo punto singolare dell'omografia. Esso dovrà però variare entro uno spazio di punti singolari, inferiore a S_{n-1}; e allora la curva luogo di questi punti singolari non potrà esaurire l'intersezione completa di F col suo S_{n-1} tangente considerato, e quest'intersezione complessiva sarà perciò riducibile;

oppure a un punto generico di f corrisponderà su f' un punto singolare unico (come p. es. quando F sia un cono, e f' la sezione determinata da un qualsiasi iperpiano passante pel vertice del cono; vertice che è generalmente, per l'omografia tra f' e una sezione generica, l'unico punto singolare di f'). Allora nello spazio S_{n-1} di f vi sarà un S_{n-2} di punti singolari, il quale incontrerà f in un certo numero di punti, e f' si comporrà di curve corrispondenti rispett. a questi diversi punti singolari. In ogni caso pertanto la f' sarà una curva riducibile; ossia F sarà incontrata da tutti gli iperpiani ad essa tangenti secondo curve riducibili.

Le superficie algebriche che dai propri spazi tangenti sono incontrate secondo curve riducibili sono soltanto:

Nello spazio S_3: Le rigate, e la superficie del 4° ordine detta « superficie di STEINER », che contiene ∞^2 coniche (1);

Negli spazi superiori: Solamente quelle superficie (al più) di cui le precedenti sono proiezioni; e possiamo limitarci a tener conto di quelle che hanno gli stessi ordini delle precedenti, e devono perciò proiettarsi da punti non appartenenti ad esse. Si hanno così soltanto superficie del pari rigate, e la superficie di 4° ordine di S_5 detta « di Veronese » e già dianzi nominata, colle sue proiezioni.

La superficie di Veronese (normale) ha per sezioni quartiche razionali normali, tutte omografiche. Le F^4 di S_4, sue proiezioni, sono di due tipi (e quelle di un medesimo tipo sono tutte proiettivamente identiche). Se la proiezione della F^4 normale è fatta da un punto del piano di una sua conica (cioè della M^3_4 luogo dei piani di tutte le ∞^2 coniche), si ha una F^4 di S_4 con retta doppia, e colle sezioni appunto a 2 a 2 omografiche: sono infatti proiettivamente identiche tutte le quartiche razionali di S_3 con punto doppio; e d'altra parte l'anzidetta F^4 di S_4 ammette un gruppo ∞^4 di trasformazioni proiettive, transitivo rispetto al sistema degli iperpiani. Se invece la F^4 normale si proietta da un punto non appartenente alla detta M^3_4, bensì generico in S_5, si ha la F^4 doppia per la varietà dei piani osculatori di una C^4 razionale normale; e due sezioni generiche di questa superficie *non* sono omografiche.

Così pure non sono omografiche due sezioni piane generiche della superficie di STEINER (in S_3) (2).

Possiamo dunque già concludere che le superficie a sezioni omografiche sono soltanto:

1) I coni;

2) Superficie rigate algebriche;

3) La superficie F^4 di S_5 detta « di Veronese », e la sua proiezione su S_4 da un punto del piano di una sua conica.

Rimane soltanto a determinare quali fra le rigate algebriche abbiano effettivamente le sezioni omografiche.

6. Sia R una rigata algebrica a sezioni omografiche, esclusi sempre, qui e in seguito, i coni. Ogni omografia che interceda fra due sue sezioni iperpiane si rispecchia in una trasformazione birazionale Ω del sistema ∞^1 delle generatrici, nella quale si considerano omologhe 2 generatrici passanti rispett. per 2

(1) CASTELNUOVO, *Rend. R. Accad. de' Lincei*, ser. 5ª, vol. 3° (1894)$_1$, p. 22.
(2) Cfr. anche la mia Nota cit. dei Rend. 1925.

punti corrispondenti di quelle sezioni; e come trasformazione Ω si avrà in particolare l'identità, ogni qualvolta le 2 sezioni considerate siano punteggiate proiettivamente dalle generatrici. Se R è una rigata appartenente allo spazio S_r e non razionale normale, sappiamo (n. 2) che un sistema di due sezioni iperpiane, le quali siano riferite tutte proiettivamente, a 2 a 2, dalle generatrici, può avere al massimo la dimensione $r-2$; vi saranno perciò sopra R almeno ∞^2 trasformazioni Ω distinte, e la rigata sarà per conseguenza razionale. D'altra parte le Ω distinte non possono essere più che ∞^3. Concludiamo perciò:

Le rigate a sezioni omografiche, esclusi i coni, sono tutte razionali. Escluse quelle normali, cioè di ordine $n-1$ e appartenenti S_n, per le altre, che sono tutte proiezioni delle precedenti, e che supporremo di ordine $n-1$ e apparenti a S_r (ove $r<n$), le ∞^r sezioni iperpiane si distribuiranno o in ∞^2 sistemi ∞^{r-2}, oppure (se $r>3$) in ∞^3 sistemi ∞^{r-3}, tali che due sezioni appartenenti a uno stesso di questi sistemi (sistemi che indicheremo con Σ), e queste soltanto, sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici; e la trasformazione Ω determinata nel sistema delle generatrici dall'omografia tra 2 sezioni iperpiane non varierà facendo variare comunque queste sezioni entro i rispettivi sistemi Σ. Avvertiamo però che, se i sistemi Σ sono in numero di ∞^2 e perciò di dimensione $r-2$, di modo che le omografie intercedenti fra le sezioni di un sistema Σ fisso e quelle di un altro Σ variabile conducono a sole ∞^2 trasformazioni Ω, potrà, al variare di quel primo Σ, variare anche questa schiera ∞^2 di Ω; con che le Ω saranno complessivamente, anche in questo caso, in numero complessivo di ∞^3. L'esempio più semplice è dato dalla rigata cubica di S_3 a direttrici distinte, che è contenuta in una congruenza lineare, e le cui generatrici riferiscono proiettivamente, a 2 a 2, le sezioni di ogni singolo fascio avente per asse una retta di questa congruenza.

7. Sia di nuovo R una rigata di S_r, e α, β due iperpiani che seghino su di essa curve irriducibili, riferite omograficamente dalle generatrici. Per questa omografia saranno uniti tutti i punti comuni alle due curve, e lo spazio $S_{r-2} \equiv \alpha\beta$ che li contiene. Le rette congiungenti coppie di punti omologhi dei due (interi) iperpiani α e β formeranno un sistema ∞^{r-1} (Γ) del 1° ordine, contenente la rigata R; e punteggeranno proiettivamente anche tutti gli iperpiani del fascio $\alpha\beta$. Infatti due rette corrispondenti contenute rispett. in α e β, generiche e perciò sghembe, saranno direttrici di un regolo contenuto in Γ, la cui quadrica sostegno sarà incontrata dagli altri iperpiani del fascio $\alpha\beta$ secondo le ulteriori direttrici; tutti questi iperpiani saranno quindi riferiti in modo che a rette corrispondano rette, perciò omograficamente. Ma non è possibile (semprechè, come si è detto, R non sia un cono, e perciò Γ non sia una stella ∞^{r-1} di rette) che le rette di Γ punteggino proiettivamente un più ampio sistema di iperpiani, e perciò almeno quelli di una rete; poichè su ogni singola quadrica del tipo di quella dianzi considerata questi iperpiani dovrebbero segnare, come intersezione variabile, quel solo medesimo fascio di direttrici; mentre è ovvio che, data la rete, e quindi il suo S_{r-3} base entro lo spazio $\alpha\beta$, ciò non avviene certo se si costruisce la quadrica partendo da rette di α, β omologhe e non incidenti a questo S_{r-3}.

Se ne deduce che, sopra R, i sistemi Σ, di dimensione $r-2$ oppure $r-3$, di sezioni iperpiane riferite proiettivamente a 2 a 2 dalle generatrici saranno *lineari* (dovendo contenere l'intero fascio determinato da 2 di queste sezioni). E al variare di un fascio di iperpiani entro uno stesso sistema Σ, varierà generalmente il sistema di rette Γ che punteggia proiettivamente questi iperpiani, pur contenendo sempre la rigata R.

Nello spazio S_3, l'unico sistema di rette del tipo Γ è la congruenza lineare, a direttrici distinte o no. Le sue proprietà si estendono facilmente ai sistemi Γ di uno spazio qualunque S_r. Ogni retta di Γ ha $r-1$ *fuochi*, non necessariamente distinti, i quali sono in pari tempo *punti singolari*. Nel caso più generale, Γ si compone delle rette di S_r incidenti a $r-1$ spazi S_{r-2}, che sono i luoghi di punti singolari; ma due o più punti singolari semplici possono essere sostituiti, sopra ogni retta, da un unico punto singolare multiplo, e si ha allora il sistema delle rette incidenti a spazi $S_{k_1}, S_{k_2}, \ldots S_{k_i}$, luoghi ancora di punti singolari, e le cui dimensioni sono legate dalla relazione $\Sigma\,(k+1)=(i-1)\,r+1$. Per $i=2$, si hanno due soli spazi, duali, del tipo S_k e S_{r-k-1}. Se l'omografia fra gli iperpiani α e β già considerati non è degenere, non potrà nessun punto singolare di Γ appartenere ad α e non a β, o viceversa; perciò lo spazio $S_{r-2}\equiv\alpha\,\beta$ dovrà incontrare ogni S_k di punti singolari secondo un S_{k-1}; e un iperpiano generico del fascio $\alpha\,\beta$ non conterrà nessun punto singolare ulteriore.

8. Supponiamo adesso (fino a tutto il n. 9) che sulla rigata razionale R^{n-1} di S_r a sezioni omografiche queste sezioni si distribuiscano precisamente in ∞^2 sistemi lineari ∞^{r-2}, tali che 2 sezioni del medesimo sistema (Σ) siano riferite proiettivamente dalle generatrici.

Ricordiamo che la rigata R^{n-1} ha una direttrice minima di un certo ordine $m\leq\frac{n-1}{2}$; e che le ulteriori direttrici di ordine meno elevato hanno ordine $n-m-1$, e costituiscono un sistema lineare di dimensione $n-2m$. Nel caso estremo $m=\frac{n-1}{2}$ si ha un fascio di direttrici minime di questo stesso ordine.

Da $r-3$ suoi punti *generici*, la R^{n-1} si proietta in una rigata di ordine $n-r+2$ di S_3, che non sarà un cono, tale non essendo R^{n-1}. In ciascuno dei sistemi lineari Σ, di dimensione $r-2$, composto di sezioni riferite proiettivamente dalle generatrici, vi sarà un fascio di curve passanti per gli $r-3$ centri di proiezione; e poichè questi centri sono punti uniti per le omografie determinate dalle generatrici fra le curve di ognuno di quei fasci, la rigata proiezione R^{n-r+2} avrà anch'essa le sue ∞^3 sezioni piane distribuite tra ∞^2 fasci Σ', tali che 2 curve di uno stesso fascio sono riferite omograficamente dalle generatrici. La R^{n-r+2} sarà dunque contenuta in una congruenza lineare di rette, e avrà come direttrici rettilinee le direttrici di questa; inoltre le omografie determinate dalle sue generatrici fra le sezioni piane di ogni singolo fascio Σ' saranno tutte contenute nel gruppo proiettivo ∞^1 di S_3 che ha per traiettorie le rette della congruenza lineare nominata. A questo gruppo ∞^1 corrisponde sulla rigata primitiva R^{n-1} di S_r un gruppo anche ∞^1 di trasformazioni, aventi per traiettorie le generatrici; trasformazioni che sono del pari omografiche, poichè mutano in sè, sopra R^{n-1}, il sistema delle sezioni iperpiane passanti per gli $r-3$ centri di proiezione (delle quali le sezioni piane di R^{n-r+2} sono immagini) e ciascuno di questi centri: quindi anche il sistema lineare somma del primo e di questi punti, cioè il sistema delle sezioni iperpiane di R^{n-1} medesima. Questo gruppo proiettivo ∞^1 di S_r avrà come spazi di punti uniti, necessariamente, quelli di due direttrici di R^{n-1} del tipo γ^m e γ^{n-m-1}; e queste 2 curve avranno per proiezioni su S_3 le 2 direttrici rettilinee di R^{n-r+2}.

Supponiamo $m < \frac{n-1}{2}$; che vi sia quindi su R^{n-1} una direttrice minima *unica* di ordine m. Allora gli $r-3$ centri di proiezione, essendo generici sopra R^{n-1}, si possono supporre presi fuori della direttrice minima γ^m; perciò la proiezione di γ^m sopra R^{n-r+2}, dovendo essere dello stesso ordine m e rettilinea, sarà una retta (direttrice) m^{pla}. E anzi la stessa γ^m della R^{n-1} di S_r dovrà essere anch'essa una retta m^{pla} (1); perchè si può scegliere il primo degli $r-3$ centri di proiezione fuori dello spazio cui appartiene γ^m (e che è certo inferiore a S_r, dato che γ^m si proietta in una retta), il secondo centro fuori dello spazio cui appartiene la proiezione di γ^m dal primo centro, e così di seguito; con che γ^m e le sue successive proiezioni dovranno tutte appartenere a spazi di egual dimensione, e saranno perciò rette, tale essendo l'ultima proiezione.

Se invece la rigata R^{n-1} di S_r avesse un fascio di direttrici minime **C** di ordine $\frac{n-1}{2}$, gli $r-3$ centri di proiezione si potranno supporre presi su altrettante distinte e generiche fra esse; e, se nessuna di queste è retta $m^{pla} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{pla}$ e ha quindi come proiezione su R^{n-r+2} una retta di eguale multiplicità, se ne dovrà concludere che le **C** sono linee piane, delle quali precisamente *due* si proiettano in rette: onde $r-3=2$, $r=5$. Gli ∞^1 piani delle direttrici **C** formeranno una M_3, avente come direttrici le generatrici di R^{n-1}, e che si riconosce subito essere normale per S_5 medesimo (se fosse proiezione di altra M_3 dello stesso ordine, e avente perciò del pari ∞^1 rette direttrici, anche quest'altra M_3 dovrebbe stare nello S_5 di 3 direttrici generiche), quindi una M_3^3. Ma, escluso il caso $n=5$, nel quale le **C** sarebbero coniche e la R^{n-1} essa stessa normale, si vede facilmente che, nelle attuali ipotesi, la R^{n-1} non potrebbe avere sezioni omografiche. Invero, queste curve starebbero sulle rigate cubiche intersezioni dei loro iperpiani con M_3^3, e ne taglierebbero le generatrici (contenute nei piani delle **C**, cioè di M_3^3) in $\frac{n-1}{2}$ punti, cioè in 3 o più punti. Nelle omografie fra le singole sezioni dovrebbero corrispondersi queste generatrici; e perciò le Ω operanti sulle generatrici di R^{n-1}, le quali sono almeno

---

(1) Nel senso che da ogni punto di questa retta escano m generatrici *variabili* di R^{n-1}: senza pregiudizio, per ora, se questa stessa retta possa essere anche, in più, generatrice della rigata. In questo senso, si direbbe che la ben nota rigata cubica di Cayley di S_3 ha una retta doppia, risultante dall'essere in pari tempo direttrice semplice e generatrice semplice.

∞^2, determinerebbero sulle C un egual numero di trasformazioni tutte omografiche (¹), il che non è possibile se esse sono curve piane di ordine > 2.

La rigata R^{n-1} di S_r (se non è normale) avrà pertanto, in ogni caso, come direttrice minima una direttrice rettilinea multipla di un certo ordine m. Le sue sezioni iperpiane avranno perciò un punto m^{plo}; se $m \geq 2$, le omografie tra queste sezioni muteranno l'uno nell'altro i loro punti m^{pli}; e le trasformazioni Ω operanti sul sistema ∞^1 delle generatrici muteranno la serie $g_m{}^1$ dei gruppi di generatrici uscenti dai singoli punti della direttrice m^{pla} in serie generalmente distinte dalla prima — perchè il gruppo delle Ω, essendo almeno ∞^2, non ammette serie lineari ∞^1 invarianti di ordine > 1 e prive di elementi fissi — ma aventi ciascuna un gruppo a comune colla prima (essendovi sempre, in corrispondenza ai punti m^{pli} delle sezioni omografiche che considerano, un gruppo almeno della prima $g_m{}^1$ che si muta in un gruppo della stessa). Ma, rispetto al gruppo delle Ω, l'insieme delle $g_m{}^1$ trasformate della prima è invariante, e queste $g_m{}^1$ sono inoltre equivalenti; se perciò esse hanno tutte un gruppo a comune colla prima, avranno anche un gruppo (variabile) a comune fra loro, a 2 a 2, in tutti i modi; e staranno perciò in una stessa $g_m{}^2$. E questa $g_m{}^2$ non può essere invariante rispetto a tutte le Ω, se $m > 2$.

La rigata R^{n-1} di S_r avrà dunque una direttrice rettilinea d, semplice o doppia.

9. Consideriamo ora il cono Γ che proietta la rigata R^{n-1} di S_r dalla sua direttrice d; luogo cioè degli ∞^1 piani che congiungono d alle singole generatrici di R. Le trasformazioni Ω operanti sulle generatrici di R determinano anche sul cono Γ, come varietà ∞^1 di piani, delle trasformazioni birazionali. Ora, ogni Ω è a sua volta determinata da un'omografia tra 2 sezioni iperpiane α e β di R^{n-1}. Se d è direttrice doppia, oppure anche direttrice semplice ma in pari tempo generatrice di R^{n-1}, di modo che le curve α e β abbiano nelle loro intersezioni con essa punti doppi, nell'omografia tra le stesse α e β si corrisponderanno questi due punti e perciò le serie lineari segate su α e β dagli iperpiani passanti rispett. per tali punti. E allora le trasformazioni che queste omografie, ovvero (il che fa lo stesso) le Ω, determinano sul cono Γ saranno proiettive (perchè i gruppi di piani contenuti in un S_{r-1} passante per d saranno mutati in gruppi consimili); il cono Γ avrà dunque almeno ∞^2 trasformazioni proiettive in sè, e sarà perciò normale. — Alla stessa conclusione si perviene altresì qualora d sia solamente direttrice semplice, e non generatrice. È vero bensì che in tal caso le curve α e β hanno nelle loro intersezioni con d solamente punti semplici, e non si può quindi affermare *a priori* che nell'omografia tra esse debbano tali punti corrispondersi: ma ogni singola Ω risulta da infinite coppie di sezioni omografiche α e β, e tra queste infinite coppie ve ne sarà certo qualcuna (e a noi basta) in cui si corrispondono precisamente quei 2 punti. Ricordiamo infatti che vi sono ∞^2 sistemi lineari ∞^{r-2} (Σ) composti ciascuno di sezioni iperpiane riferite omograficamente, a 2 a 2, dalle generatrici; e si riconosce facil-

(¹) Si ricordi che la M_3^5 di S_5 ha ∞^2 direttrici rettilinee, che si distribuiscono in ∞^2 regoli; e quelle di uno stesso regolo incontrano ogni piano della M_3^5 in punti allineati.

mente, dalla proiezione eseguita al n. prec., che le rette assi di questi sistemi sono tutte incidenti a d, e si distribuiscono in ∞^1 fasci coi centri nei singoli punti di d. Variando α entro un sistema Σ e β entro un altro, l'omografia tra esse conduce sempre alla stessa Ω; e anzi, poichè le coppie di sistemi Σ sono ∞^4 e le Ω distinte sono al più ∞^3, ogni Ω dovrà attenersi da infinite coppie di sistemi Σ; e si può quindi una tale coppia di Σ assoggettare a una condizione (semplice) ulteriore. Si può chiedere ad es. che le rette assi di questi Σ, le quali abbiamo detto che sono incidenti a d, la incontrino in punti tali che le generatrici di R^{n-1} che ne escono risultino omologhe nella corrispondenza Ω di cui si tratta; è una questione di coppie comuni a 2 corrispondenze algebriche sopra d, che ammetterà certo qualche soluzione [1]. E si avranno così curve α, β come si erano testè richieste.

In ogni caso quindi la nostra rigata R^{n-1} di S_r sarà proiettata dalla sua direttrice rettilinea d secondo un cono razionale di piani di S_r, che dovrà risultare normale, perciò di ordine $r-2$. Esaminiano ora i vari casi possibili:

a) Se d è direttrice doppia, non potrà questa stessa retta essere in pari tempo anche generatrice di R^{n-1} (perciò complessivamente retta almeno tripla); perchè, in caso diverso, l'omografia fra 2 sezioni iperpiane condotte per un medesimo punto di d determinerebbe nel sistema delle generatrici di R^{n-1} una trasformazione Ω per la quale sarebbero unite questa generatrice e le due, ulteriori uscenti da quel punto di d (variabili con questo punto), quindi l'identità; il che non può avvenire per tutte queste ∞^{r-1} sezioni, se R^{n-1} non è normale. Sarà perciò d retta, complessivamente, soltanto doppia della rigata R^{n-1}. E l'ordine $r-2$ del cono Γ sarà perciò $=n-3$; ossia $r=n-1$.

La R^{n-1} considerata apparterrà a S_{n-1}; e, avendo d come direttrice doppia, sarà proiezione di una R^{n-1} normale *con conica direttrice* da un punto del piano di questa conica. Viceversa, questa R^{n-1} di S_{n-1} ha per sezioni iperpiane curve C^{n-1} di S_{n-2} con punto doppio affatto generali; e queste curve (dipendenti, in S_{n-2}, da $(n-2)n$ parametri) sono tutte a 2 a 2 omografiche [2]. Si riconosce facilmente che la R^{n-1} normale con conica direttrice ammette, se $n>5$, un gruppo proiettivo ∞^n, e la sua proiezione considerata in S_{n-1} ne ammette un gruppo ∞^{n-2} (questo, anche se $n=5$ o $n=4$); rispetto a questo gruppo, due sezioni iperpiane generiche *non* sono equivalenti. In altri termini, 2 sezioni iperpiane generiche della R^{n-1} di S_{n-1} sono bensì omografiche, ma quest'omografia non è contenuta nel gruppo proiettivo ammesso dalla R^{n-1}.

b) Invece, se d è direttrice semplice di R^{n-1}, potrà anche esserne in pari tempo generatrice, e si può supporre altresì, *a priori*, più generalmente, che con essa siano venute a coincidere $k \geq 1$ generatrici consecutive. Essa sarà

---

(1) Non è possibile, come si potrebbe anche pensare, che le infinite coppie di sistemi Σ, le quali conducono a una medesima Ω, abbiano assi sempre appoggiati a d in due punti fissi (variabili soltanto colla Ω); perchè se no vi sarebbero anche delle Ω (non identiche nè degeneri) per le quali questi 2 punti coincidono, e che sarebbero perciò determinate da qualche coppia di sistemi Σ ad assi coincidenti: il che è assurdo.

(2) Infatti, rispetto al gruppo proiettivo ∞^3 di una curva razionale normale, sono equivalenti due punti qualunque appartenenti a corde della curva stessa (ma non alla curva): e sono perciò omografiche le curve proiezioni della prima rispett. da quei punti.

allora unita per tutte le Ω, le quali in questo caso formeranno un gruppo solamente ∞^2 (e se ne trae pure che non potrebbero coincidere con d due generatrici distinte, se no le Ω si ridurrebbero a sole ∞^1). Se $k = 1$, e perciò d è complessivamente retta doppia di R^{n-1}, si tratterà ancora di una R^{n-1} di S_{n-1}, proiezione della R^{n-1} normale con direttrice rettilinea da un punto del piano di questa direttrice e di una generatrice; e questa R^{n-1} di S_{n-1} può considerarsi come caso particolare della precedente, nell'ipotesi che la primitiva conica (o risp. retta doppia) direttrice si sia spezzata in una retta direttrice semplice e una generatrice. Questa nuova R^{n-1} di S_{n-1} ammette un gruppo proiettivo più ampio, ∞^{n-1}, rispetto al quale sono equivalenti due qualunque sezioni iperpiane. Questa R^{n-1} e la precedente sono ovvie generalizzazioni delle rigate cubiche di S_3.

c) Per $k > 1$, si avrebbero rigate R^{n-1} di S_{n-k}, proiezioni ulteriori delle precedenti; e proiezioni della R^{n-1} normale con direttrice rettilinea da un S_{k-1} generico contenuto nell'S_{k+1} di questa direttrice e di k generatrici consecutive. Ma le sezioni iperpiane di una tale rigata, curve C^{n-1} di S_{n-k-1} con punto $(k+1)^{\text{plo}}$ pel quale passano un ramo di ordine k e un ramo lineare, non sono più omografiche, avendo invarianti assoluti che non divengono tutti indeterminati quando lo spazio S_{n-k-1} diventa tangente alla rigata (¹).

d) Infine, se fosse d soltanto direttrice semplice della rigata R^{n-1} e non generatrice, l'ordine $r - 2$ del cono Γ sarebbe $= n - 2$, onde $r = n$ ossia la rigata R^{n-1} sarebbe normale.

10. Rimane adesso a esaminare l'altra ipotesi, che sulla rigata R^{n-1} di S_r le sezioni riferite omograficamente a 2 a 2 dalle generatrici costituiscano ∞^3 diversi sistemi lineari ∞^{r-3}.

In questa ipotesi, supponiamo anzitutto che sia $r = 3$; che si tratti cioè di una rigata dello spazio S_3, a sezioni omografiche, tali che mai 2 di esse vengano punteggiate proiettivamente dalle generatrici. Allora, dall'omografia fra una sezione generica fissa e un'altra comunque variabile, dovranno già ottenersi biunivocamente le ∞^3 trasformazioni Ω operanti sul sistema ∞^1 delle generatrici; e a sua volta ogni Ω determinerà una corrispondenza biunivoca fra i piani di S_3, nella quale saranno omologhe tutte le coppie di piani π, π' le cui sezioni, coll'omografia che intercede fra esse, danno luogo a questa Ω. Dico che questa corrispondenza biunivoca di piani è tale che a piani π di un fascio corrispondono piani π' anche di un fascio; ed è perciò un'omografia di S_3. Invero, le sezioni determinate dalle coppie di piani π, π' anzidette sono omografiche; perciò, se π varia in un fascio di asse a, a questa retta corrisponderà, in ciascuno dei piani omologhi π', anche una retta a'; e se i piani π' non formassero fascio, e questa a', per conseguenza, dovesse variare da un

---

(¹) Nel caso più semplice, $k = 2$, $n = 5$, si avrebbero come sezioni quartiche piane con punto triplo a 2 tangenti coincidenti, e 4 flessi; quindi, nel fascio di rette che ha per centro il punto triplo, un gruppo di 6 rette che deve mantenersi proiettivo a sè stesso. E, se la quartica si spezza in una retta, generatrice della rigata, e una cubica con cuspide, rimangono ancora 3 rette distinte; la generatrice, la tangente cuspidale, e la retta passante pel flesso della cubica.

π' all'altro, ne seguirebbe che, in quella Ω, a generatrici incidenti alla retta a dovrebbero corrispondere generatrici incidenti a tutte queste a', cioè rette di un regolo. Ciò sarebbe possibile soltanto se le generatrici di R incidenti a una retta generica si appoggiassero di conseguenza ad ∞^1 altre rette (direttrici, appunto, di un regolo); dal che si trae facilmente che R sarebbe contenuta in un fascio di complessi lineari, ossia nella congruenza lineare base di questo fascio; e vi sarebbero, contro l'ipotesi, dei fasci di sezioni piane punteggiate proiettivamente dalle generatrici.

Si conclude pertanto che R è una rigata trasformata in sè da un gruppo proiettivo ∞^3 di S_3, il quale ne scambia le generatrici anche in ∞^3 modi diversi, ed è perciò simile al gruppo delle proiettività binarie: condizioni che sono soddisfatte, all'infuori delle quadriche e coni quadrici, solo per la sviluppabile delle tangenti di una cubica sghemba.

11. Nelle stesse ipotesi enunciate al principio del n° prec., la rigata R^{n-1} appartenga invece, se possibile, a uno spazio S_r per cui $r \geq 4$.

Proiettando tale R^{n-1}, se $r > 4$, da $r-4$ suoi punti generici, avremo una R^{n-r+3} di S_4 a sezioni, in generale, non più tutte omografiche; ma sempre ripartite in ∞^3 fasci Σ (con piani-assi), tali che quelle di ogni singolo fascio vengono punteggiate proiettivamente dalle generatrici, e gli interi S_3 di questo fascio sono punteggiati proiettivamente dalle rette di un sistema Γ, del tipo considerato al n° 7. Questo sistema, in S_4, e se R non è un cono, può essere costituito soltanto: a) dalle rette incidenti a 3 piani fissi, oppure: b) dalle rette incidenti a una retta e un piano fissi (sghembi).

Caso a). Il sistema Γ punteggia proiettivamente un unico fascio Σ di iperpiani, quello il cui piano-asse contiene le intersezioni dei 3 piani singolari di Γ stesso a 2 a 2. Variando perciò il fascio Σ, varierà il sistema Γ; e R^{n-1} avrà infinite direttrici piane, nei piani singolari dei vari Γ. Se questi piani sono complessivamente ∞^2, si ha in S_4 una rigata con ∞^2 direttrici piane cioè la R^3 normale; e R^{n-1} sarebbe pure normale. Se sono solo ∞^1, potrebbero soltanto costituire (come al n° 8) una M^3_3, oppure un cono quadrico; e in nessun caso, considerandoli a 3 a 3 in tutti i modi possibili, nascono ∞^3 fasci Σ come a noi occorrono.

Caso b). La rigata R^{n-1} avrà, al pari della sua proiezione su S_4, una direttrice rettilinea d, necessariamente semplice e non generatrice, perchè le ∞^{r-1} sezioni iperpiane condotte per uno stesso punto di d, colle omografie tra esse a 2 a 2, devono dar luogo ad almeno ∞^2 diverse Ω; mentre, se quel punto di d fosse doppio, le dette Ω avrebbero 2 generatrici unite fisse.

In questo caso, come al n° 9, caso d), si può concludere nuovamente che il cono proiettante la R^{n-1} dalla sua direttrice d è normale e di ordine $n-2$; onde $r = n$, ossia la R^{n-1} è essa pure normale.

12. Infine, ricordando l'osservazione contenuta nell'ultima parte del n° 2, a proposito delle superficie le cui sezioni sono curve W, dovremo domandarci se qualcuna delle superficie a sezioni omografiche già costruite in S_r, tutte algebriche all'infuori dei coni dai quali possiamo prescindere, sia proiezione di una superficie di S_{r+1}, di ordine anche superiore di un'unità, la quale abbia come sezioni curve W, del pari omografiche. Ora, la superficie di Veronese e le sue proiezioni di 4° ordine non sono proiezioni di nessuna superficie di 5° ordine. Le rigate di ordine $n - 1$ di S_n (perciò normali) e di S_{n-1} che abbiamo incontrate sono proiezioni solamente di rigate dello stesso tipo, corrispondenti al valore successivo $(n+1)$ di n. E anche dalla sviluppabile delle tangenti di una cubica sghemba non si ottiene alcun caso ulteriore; poichè una superficie del 5° ordine di S_4, della quale essa fosse proiezione, sarebbe ancora una rigata razionale, e le sue curve sezioni non potrebbero avere le singolarità necessarie (fra altro, o una cuspide, o un flesso) per essere curve W.

Torino, maggio 1926