Gino Fano

Sulle superficie dello spazio S_3 a sezioni piane collineari

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 6, Vol. **1** (1925), p. 473–477

Geometria. — *Sulle superficie dello spazio* S_3 *a sezioni piane collineari.* Nota del Corrisp. GINO FANO [1].

1. - Il Prof. Fubini mi ha comunicata la sua Nota precedente [2]. La determinazione delle superficie di cui trattasi può farsi anche per via sintetica.

Consideriamo due sezioni piane della superficie proposta F, infinitamente vicine, e supponiamo anzitutto che la collineazione fra esse, per ogni coppia di sezioni infinitamente vicine, sia una prospettività. Allora i piani tangenti a F nei punti di una sua sezione piana passeranno tutti per un medesimo punto, centro comune della prospettività fra questa sezione e una qualsiasi delle sue infinitamente vicine.

Se, al variare di quella sezione piana, *non* varia questo centro di prospettività, la F sarà un cono.

Se invece questo centro varia, nascerà una corrispondenza (biunivoca, almeno entro regioni opportune) fra il sistema dei piani π di quelle sezioni (spazio Σ) e il sistema dei centri di prospettività P′ (spazio Σ'), che

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(2) *Sulla varietà a sezioni piane collineari*, questi « Rendiconti », qui innanzi, p. 469.

possiamo chiamare *poli* di quei piani. I piani tangenti a F nelle sue intersezioni con una retta r conterranno i poli di tutti i piani passanti per r stessa; quindi a piani π passanti per una retta r di Σ (incontrante la F) corrisponderanno in Σ' poli P' appartenenti a una retta r'; e, per conseguenza, a piani π di una stella, punti di un piano. La corrispondenza fra il sistema dei piani π e il sistema dei poli P', definita almeno per determinate regioni degli spazi sovrapposti Σ e Σ', è dunque proiettiva. E poichè piani π passanti per un punto A di F hanno i rispettivi poli nel piano α ivi tangente ad F, questa superficie sarà il luogo dei punti dello spazio Σ che appartengono ai piani loro omologhi in Σ'; sarà dunque una quadrica (e la corrispondenza considerata sarà la polarità rispetto a questa quadrica).

2. – Supponiamo ora che la collineazione fra 2 sezioni piane infinitamente vicine generiche *non* sia una prospettività.

Consideriamo le intersezioni $P_1, P_2, \cdots$ di F con una retta r generica, e i piani $\pi_1, \pi_2 \cdots$ tangenti a F in questi punti; nonchè le curve intersezioni di F con due piani infinitamente vicini μ, μ' passanti per r. La collineazione fra queste curve, estesa agli interi piani μ, μ', genererà una sviluppabile di 3ª classe (generalmente irriducibile, ma che non escludiamo possa spezzarsi), inviluppo dei piani che segano μ, μ' secondo coppie di rette omologhe, e tangente in particolare al piano μ lungo la r; e fra i piani tangenti di questa sviluppabile sono compresi i piani $\pi_1, \pi_2, \cdots$ tangenti a F. Invero: sia ν un altro piano qualsiasi passante per r, e nella collineazione fra le sezioni piane, quindi fra i piani stessi μ, ν si considerino di uno qualunque dei punti P_i, come elemento di μ o rispett. di ν, gli omologhi P''_i, P'_i rispett. in ν e μ; saranno allora omologhe le rette $P'_i P_i$ e $P_i P''_i$, e il loro piano apparterrà alla sviluppabile di 3ª classe generata da questa collineazione. Quando il piano ν, descrivendo il fascio r, tende alla posizione μ, nel triangolo $P'_i P_i P''_i$ tenderanno a zero i due lati $P'_i P_i$ e $P_i P''_i$ e l'angolo compreso $\widehat{P_i}$, che saranno in generale infinitesimi dello stesso ordine; e il rapporto di quei due lati, segmenti corrispondenti in una collineazione che tende all'identità, tenderà ad uno. Di qui si trae facilmente che i rimanenti due angoli si conserveranno in generale di grandezza finita; per conseguenza, mentre il lato $P_i P'_i$ tende alla tangente in P_i alla curva intersezione di F col piano μ, il lato $P'_i P''_i$ tenderà a un'altra fra le tangenti in P_i alla superficie F, e il piano $P'_i P_i P''_i$ tenderà al piano π_i (1).

(1) È questione analoga a quella (e forse caso particolare di quella) considerata dal compianto nostro Socio C. SEGRE nell'ultima sua Nota: *Sugli elementi curvilinei, che hanno comuni la tangente e il piano osculatore* (questi «Rendiconti», ser. 5ª, vol. 33°, 1924 (1° sem.), p. 325). Perchè la retta ivi indicata con PQ *non* tenda alla tangente comune in A ai due rami ivi considerati e descritti rispett. da P e Q, occorre appunto che tra P e Q passi una certa relazione, definita a meno di infinitesimi di ordine superiore (come è qui l'eguaglianza dei segmenti $P'_i P_i$, $P_i P''_i$).

Si conclude pertanto che le ∞^1 sviluppabili di 3^a classe generate dalle collineazioni fra le coppie di piani infinitamente vicini di un medesimo fascio r hanno a comune i vari piani $\pi_1, \pi_2, \cdots$ tangenti ad F nelle sue intersezioni colla r; tali piani non possono dunque essere in numero superiore a *quattro* (poichè ciascuna di quelle sviluppabili è individuata da 6 piani, e due di esse infinitamente vicine hanno già a comune in più un piano del fascio r).

Inoltre, data la r, i piani tangenti ad F nelle sue intersezioni con questa retta si ottengono con una costruzione algebrica; la F è quindi algebrica, e di ordine ≤ 4.

3. – Rimane quindi soltanto a esaminare quali superficie algebriche di 3° e di 4° ordine abbiano due sezioni piane generiche fra loro collineari.

Fra quelle di 3° ordine, vanno escluse le superficie a sezioni ellittiche (salvo i coni). Invero, tali sezioni dovrebbero avere modulo costante; e allora, per le sezioni con piani tangenti, il modulo dovrebbe risultare indeterminato; esse avrebbero cioè una cuspide, e la F, avendo i suoi punti tutti parabolici, sarebbe una sviluppabile; quindi, trattandosi di superficie di 3° ordine, un cono. Viceversa, le F^3 a sezioni razionali, che sono tutte rigate e (se non sono coni) con due direttrici rettilinee, distinte o infinitamente vicine, hanno come sezioni generiche curve con punto doppio ordinario, che sono appunto tutte collineari (però, nel caso delle due direttrici distinte, la collineazione fra due sezioni generiche reali non è sempre reale).

4. – L'esame particolareggiato delle diverse F^4 che non sono coni mostra che per la sola sviluppabile delle tangenti a una cubica sghemba due sezioni piane generiche sono collineari.

Si escludono anzitutto le F^4 a sezioni di genere maggiore di zero, con un'osservazione analoga a quella fatta per le F^3 a sezioni ellittiche (e concernente ancora, sostanzialmente, i moduli di queste curve). Consideriamo, sopra una sezione piana generica, una serie lineare ben definita, segata da un fascio di rette; p. es., se la sezione è di genere 1 o 2, la g^1_2 segata dalle rette che passano per un determinato punto doppio; se è di genere 3, la g^1_3 segata dalle rette passanti per il punto tangenziale di un determinato flesso. Facendo variare con continuità questa sezione, p. es. in modo che continui a passare per il punto doppio o per la tangente tripunta considerata, dovranno, in quella serie lineare, mantenersi costanti i birapporti di tutte le quaderne formate con quelle rette del fascio (tangenti alla C^4, rette che passano per altri punti doppi o per flessi, $\cdots$) che colla C^4 hanno una qualsiasi relazione proiettiva. Quando il piano diviene tangente a F^4, alcune di queste rette vengono a coincidere; e, per non turbare la conservazione di quei birapporti, occorrerà che tutti i birapporti in cui entravano due fra le rette ora coincidenti divengano indeterminati; cioè che in nessuna quaderna vengano a coincidere due elementi, senza che con essi ne coincida anche un terzo. Ciò richiede che vengano a coincidere tutte quante quelle rette, meno una al più; e nei casi indicati, se la superficie non è un cono, questo non può avvenire.

Questa considerazione (nella forma proiettiva in cui l'ho presentata) è applicabile anche alle F^4 a sezioni razionali; ma non basta ad escludere qualche caso di rette doppie consecutive (p. es. la F^4 di Steiner colle 3 rette doppie tutte infinitamente vicine). Preferisco perciò ragionare come segue, rispett. per i due casi (che, come è noto, sono i soli possibili) di una F^4 di Steiner e di una rigata.

Una F^4 di Steiner è proiezione di una Φ^4 di Veronese, dello spazio S_5, da una retta r. Le eventuali omografie tra le sezioni piane della F^4 di Steiner si rispecchierebbero in omografie fra le sezioni della Φ^4 normale di cui esse sono rispett. proiezioni dalla r, e queste ultime omografie avrebbero sempre la retta r come unita; di più, ciascuna di queste ultime omografie sarà subordinata (come avviene per una proiettività fra 2 coniche di un piano) da una omografia sulla Φ^4, completamente individuata. Si avrebbe perciò sulla Φ^4 un gruppo almeno ∞^3 di omografie, ancora colla retta r come unita; e per conseguenza anche la F^4 di Steiner dovrebbe ammettere ∞^3 trasformazioni proiettive in sè, mentre è noto che non le ammette.

Infine, una F^4 rigata (non cono) può considerarsi, nello spazio rigato, cioè nella quadrica Q_4^2 formata dalle rette dello spazio S_3, come una curva C^4, appartenente a uno spazio S_4, e in tal caso normale, oppure a un S_3. Alle curve sezioni piane di F^4 corrispondono sulla Q_4^2 delle ∞^1 di piani di uno determinato dei due sistemi su di essa, passanti pei singoli punti di C^4 e incidenti secondo rette a un piano fisso di sistema opposto; quindi gli S_2-coni che da questi ultimi piani proiettano C^4, e che si domanda siano fra loro omografici. Se C^4 appartiene a un S_4, sostituiamo ai detti S_2-coni gli S_1-coni loro sezioni con questo S_4, i quali saranno pure omografici. Queste proiettività fra gli S_1-coni si rispecchieranno sulla C^4 nelle ∞^3 sue trasformazioni omografiche; e per queste sarà unito il sistema degli S_1-assi di quei coni, e quindi la quadrica sezione di Q_4^2 che ne è luogo. Tale quadrica sarà perciò quella fondamentale per la polarità rispetto alla C^4, e le cui rette, cioè gli assi anzidetti, sono le trisecanti della sviluppabile formata dalle tangenti di C^4. Gli S_1-coni avranno quindi 3 piani cuspidali, cioè la F^4 iniziale avrà una cubica di regresso; essa è dunque la sviluppabile delle tangenti di questa cubica.

Se invece la C^4 immagine della F^4 rigata sta in uno spazio S_3, essa sarà proiettata secondo coni omografici da tutti gli ∞^2 punti della quadrica sezione di tale S_3 colla Q_4^2. Le ∞^4 omografie fra queste coppie di coni, a 2 a 2, determineranno su C^4 un sistema continuo di trasformazioni birazionali, che saranno o sole ∞^2 diverse, ciascuna ottenibile in ∞^2 modi, oppure la totalità ∞^3, di cui una generica ottenibile in ∞^1 modi: ciascuna trasformante quindi ∞^2 o rispett. ∞^1 serie lineari g_4^2 segate da stelle di piani in altre consimili. E questo in ambo i casi implicherebbe che si trattasse di ∞^2 o rispett. ∞^3 trasformazioni proiettive sulla C^4 di S_3; il che non è possibile.

Concludiamo pertanto: Nello spazio S_3, le sole superficie a sezioni piane collineari sono: 1° i coni; 2° le quadriche; 3° le rigate cubiche (a direttrici distinte, o anche coincidenti); 4° la sviluppabile delle tangenti di una cubica sghemba. Salvo talune superficie algebriche di ordine ≤ 4, non vi sono dunque che coni.

All'infuori delle rigate cubiche a direttrici distinte, queste sono tutte superficie con ∞^3 o più trasformazioni proiettive in sè, fra le quali ve n'è qualcuna che muta l'una nell'altra due sezioni piane generiche qualsiansi; in altri termini, la collineazione fra queste sezioni è sempre determinata (subordinata) da un'omografia sulla superficie, all'infuori dell'unica eccezione delle rigate cubiche anzidette.