GINO FANO

L'analysis situs II

Scientia, Vol. **36** (1924), p. 289–300

L'ANALYSIS SITUS

PARTE SECONDA:

L'indirizzo combinatorio.

Le questioni relative ai caratteri topologici di una superficie, accennate nell'articolo precedente,[1] corrispondono a un primo stadio dell'Analysis Situs, che si potrebbe qualificare come fase elementare e intuitiva, in quanto i postulati che stanno a base della teoria non erano sempre ben stabiliti, e tanto meno tutti esplicitamente enunciati; e anche nelle dimostrazioni si faceva ricorso più volte a considerazioni intuitive. I concetti stessi del « continuo », della deformazione continua, della connessione, non erano ancora stati sottoposti a una critica rigorosa. È stato detto anzi recentemente che si trattava di una specie di scienza sperimentale, a base di carta, caoutchouc e forbici, la quale ha reso tuttavia alla matematica servizî utili.

In seguito, si è cercato di dare all'Analysis Situs fondamenti precisi, dai quali l'intera teoria potesse farsi discendere come pura conseguenza logica. Ciò è avvenuto dapprima per via analitica, partendo dalla considerazione del piano come insieme delle coppie di numeri reali x, y, e analogamente dall'insieme delle terne o dei gruppi di n numeri reali, quale spazio a 3 o rispettivamente a n dimensioni; e definendo in essi linee, superficie, ecc., anche per via analitica, col mezzo cioè di equazioni, accompagnate eventualmente da opportune diseguaglianze, se si volevano considerare p. es. solo certe zone di superficie, limitate da determinati contorni. A questo indirizzo, prevalentemente, appartengono le ricerche di Poincaré menzionate alla fine dell'articolo precedente.

[1] « Scientia », vol. XXXVI (1924), p. 217.

Così pure la teoria generale degli « insiemi »,[1] che aveva avuto origine da ricerche classiche di G. Cantor, ha forniti i mezzi per stabilire con precisione, in modo geometrico, i concetti di continuo, di corrispondenza biunivoca e continua o « topologica », di deformazione continua, ecc., e di costruire su questa base l'Analysis Situs in modo completamente rigoroso; anche con maggior generalità, potendosi considerare altresì proprietà topologiche di insiemi che non sono continui. E si sono pure stabilite relazioni precise tra le espressioni analitiche e geometriche dei singoli concetti. È fondamentale, a questo riguardo, un teorema di Jordan (1893), che ha dato forma precisa al concetto di linea piana chiusa non intrecciata, dimostrando che una tal linea divide il piano in 2 regioni; quelle che noi chiamiamo rispettivamente « interna » ed « esterna ». A questo risultato hanno portato complementi importanti Schoenflies, e più ancora Brouwer, che ha esteso, fra altro, il teorema di Jordan a spazî a più dimensioni. È questo forse l'indirizzo che si è dimostrato, oltre che rigoroso, più potente, e capace di penetrare più a fondo nelle varie questioni.

D'altra parte già nella seconda metà del secolo XIX si erano fatte ricerche elementari di « topologia combinatoria », principalmente sopra reticolati, o « complessi », formati da un numero finito di punti, e di linee congiungenti questi punti a 2 a 2 in modo opportuno, come p. es. il sistema dei vertici e degli spigoli di un poliedro. Il problema dei « 7 ponti di Königsberg » e la formola di Descartes-Eulero sui poliedri, ricordati nell'introduzione al mio articolo già citato, costituivano i primi esempi, conosciuti già da tempo, di questioni così fatte. Diremo ora brevemente di queste ricerche; e faremo poi vedere come esse siansi venute a collegare alla topologia dei continui, e abbiano fornito a quest'ultima un altro modo di costituirsi una base logica, di postulati semplici e precisi.

***

Chiameremo *sistema* o *complesso a una dimensione,* o anche sistema o complesso di linee, la figura costituita da un numero finito arbitrario di punti, o vertici, e da un numero pure

[1] Insieme (Ensemble, Menge) è ogni collezione o sistema di enti qualunque (numeri, funzioni, punti,...) determinati e distinti, in numero finito o infinito.

finito di linee di forma affatto qualunque, ciascuna delle quali congiunga due distinti fra quei punti. È ammesso che una stessa coppia di vertici siano congiunti anche da più linee non aventi, all'infuori degli estremi, alcun punto comune; come pure due vertici possono non essere gli estremi di una stessa linea del sistema. Si suppone però che il sistema complessivo sia *connesso,* cioè che sia possibile di passare da ciascuno dei suoi vertici ad ogni altro con un *cammino continuo semplice,* cioè percorrendo una o più linee effettivamente contenute nel sistema, una di seguito all'altra, tali che si passi sempre da una alla successiva attraverso un loro estremo comune.

È facile pensare, sia in un piano che nello spazio, esempi molteplici di sistemi, o reticolati, di questo genere: nello spazio, p. es., come ho detto poc'anzi, il sistema dei vertici e spigoli di un poliedro qualsiasi. Esempi sono pure dati dalle varie figure di questo articolo.

Si incontrano già problemi interessanti nella ricerca di tutti i sistemi soddisfacenti a talune condizioni elementari assegnate; p. es. di contenere un numero assegnato di linee. Un sistema contenente due linee dà luogo soltanto a due casi, rispettivamente con 3 o 2 vertici, come nelle fig. 1*a*, 1*b*; un sistema contenente 3 linee dà luogo a 4 casi (fig. 2 *a*, *b*, *c*, *d*). Ricerche di questo tipo possono presentare interesse per varie questioni; p. es. in chimica, per la topologia delle molecole e degli atomi, in particolare per la ricerca di possibili combinazioni isomere. Anche un circuito elettrico con derivazioni può considerarsi, dal punto di vista geometrico, come un complesso di linee.

Un punto dal quale escano k linee del sistema si dice un *nodo* di *grado* o multiplicità k; o anche, se $k \geqq 3$, un « punto d'incrocio » di ordine $k-2$. Se $k=1$, lo si chiama più particolarmente un « estremo ».

In ogni complesso di linee, il numero dei nodi di multiplicità dispari è certamente pari: invero, se le linee sono in numero di l, e hanno perciò complessivamente $2l$ estremi, sarà questa stessa la somma delle multiplicità di tutti i nodi; e in questa somma, che è numero pari, il quantitativo degli addendi *dispari* sarà pur esso pari. Questa considerazione ha importanza per stabilire *il numero minimo di cammini continui semplici,* eventualmente anche passanti più volte per uno stesso nodo, *per mezzo dei quali si può percorrere l'intero sistema,* *venendo ciascuna linea percorsa una volta sola.* Se vi sono $2p$ nodi di multiplicità dispari, occorreranno p cammini semplici, aventi i loro $2p$ estremi rispettivamente in quegli stessi nodi. P. es. la figura formata dai lati e diagonali di un quadrato o altro quadrilatero (fig. 3) ha nei 4 vertici altrettanti nodi di multiplicità 3; e si può percorrere con 2 cammini semplici (indicati nella figura, uno a tratto continuo, l'altro a punti). Invece la fig. 4, corrispondente ad un pentagono colle sue diagonali, una sola esclusa, avendo i due soli vertici A e D di moltiplicità dispari, si può percorrere coll'unico cammino $ABCDEACEBD$. Nel problema dei « 7 ponti di Königsberg » si chiedeva di percorrere con un solo cammino una figura assimilable a un complesso avente 4 nodi di grado dispari, 3 tripli e uno quintuplo (fig. 5, da confrontarsi colla fig. 1 dell'art. precedente); e ciò non è possibile.

Nel giuoco del *domino,* i varî pezzi — prescindendo per il momento dai « doppi » — si possono considerare come le linee di un complesso, i cui vertici o nodi, se il giuoco va fino al « doppio k », sono in numero di $k+1$, corrispondenti ai numeri $0, 1, 2, \ldots k$; e tutti di grado k, congiunti a 2 a 2 in un modo solo per ciascuna coppia. Se k è pari, quindi anche se $k=6$, che è nel giuoco il caso più comune, è possibile disporre tutti quanti i domino (compresi ora, volendo, anche i « doppi ») in un'unica successione, in modo che si seguano a 2 a 2 secondo le regole del giuoco, l'ultimo riattaccandosi ancora al primo: ma ciò non sarebbe possibile se k fosse dispari.

Il sistema dei domino da 0 a k, i « doppi » ancora esclusi, è altresì esempio di un complesso nel quale tutti i nodi sono di uno stesso grado k; il sistema si chiama allora *rete regolare* di grado k. Ne sono pure esempi, per $k=2$, i cosi detti « cicli », corrispondenti al ben noto schema dei vertici e lati di un poligono elementare; di un numero qualunque cioè di punti, congiunti a coppie soltanto in un determinato ordine, il primo col secondo, il secondo col terzo, ecc., e l'ultimo col primo. Altri esempi di reti regolari sono dati, per $k=4$, dalla fig. 6, tenendo conto di tutte le linee, sia continue che punteggiate; e per k qualunque dalla figura dei vertici, lati e di tutte le diagonali di un poligono a $k+1$ vertici (cfr. la fig. 7 pel pentagono), figura che ripete lo schema del domino.

Una rete regolare di grado k pari può scomporsi in $\frac{k}{2}$ reti di

Fig 1

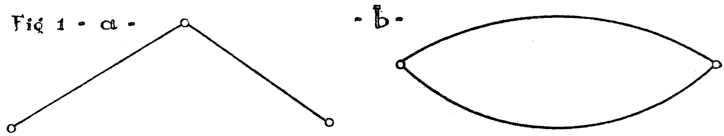


Fig 2

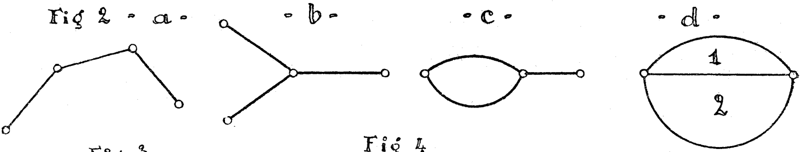


Fig 3

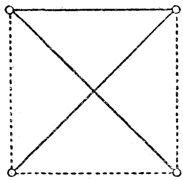


Fig 4

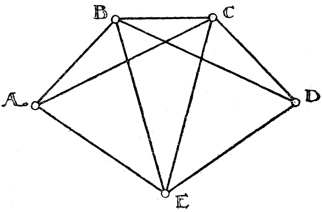


Fig 5

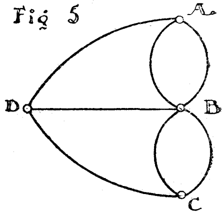


Fig 6

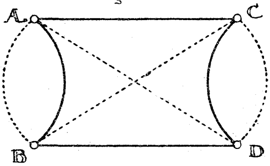


Fig 7

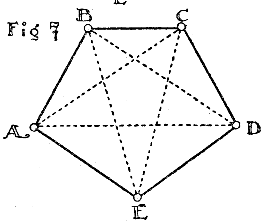


Fig 8

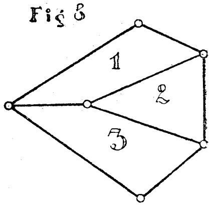


Fig 9

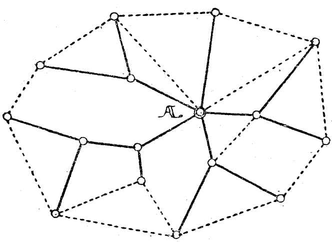


Fig 10

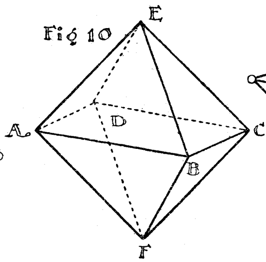


Fig 11

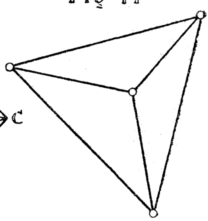


Fig 12

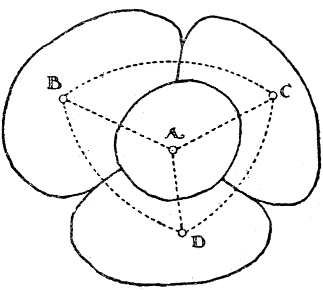
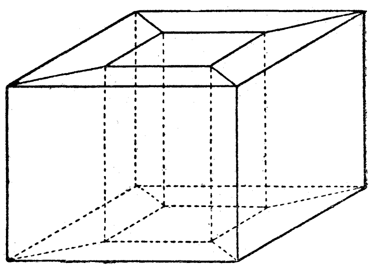


Fig 13



2° grado, cioè cicli (nella fig. 6 il ciclo $ABDCA$ a tratto continuo, e il ciclo punteggiato $ABCDA$; nella fig. 7 il ciclo dei lati, e quello delle diagonali $ACEBDA$).

Per un complesso di linee composto di m punti e l linee è importante il numero $\mu = l - m + 1$, che è sempre $\geqq 0$ se il complesso è connesso, e si chiama *numero ciclomatico.*

Si dimostra p. es. che $\nu = 2^{\mu} - 1$ è *il numero massimo dei cicli che possono essere contenuti nel complesso,* e questo massimo può essere effettivamente raggiunto. Ciò appare dalla fig. 2d, con 2 vertici, 3 linee e 3 cicli, i quali ultimi racchiudono rispettivamente la zona 1, la zona 2, e queste due insieme, e dalla fig. 8, complesso con 6 vertici, 8 linee e 7 cicli, racchiudenti rispettivamente le zone segnate con 1, 2, 3, queste stesse prese a 2 a 2, e tutte tre insieme.

Se $\mu > 0$, ossia se $l > m$, sopprimendo μ linee scelte opportunamente, ma che si potranno scegliere generalmente in più di un modo, si può ridurre il sistema a non contenere più alcun ciclo. Un sistema così ridotto, e nel quale perciò sarà $l = m - 1$, si chiama *albero,* poichè la mancanza di cicli lo fa apparire come un insieme di ramificazioni da un nucleo centrale. Per es. il sistema della fig. 9, nel quale inizialmente $l = 29$ e $m = 16$, quando si sopprimano i 14 segmenti punteggiati, si riduce a un *albero*, formato dai 15 segmenti residui, a tratto continuo. Un cammino continuo semplice è anche un albero.

In un albero, a partire da un vertice arbitrario, non si può giungere a un altro vertice qualsiasi, seguendo linee del sistema, che per una via *unica*; se no vi sarebbe un ciclo, costituito dalle due diverse vie, o da loro parti non comuni. Perciò, rispetto a un vertice arbitrario preso come *origine,* tutto l'albero si suddivide in un numero finito di *rami,* completamente distinti, ciascuno dei quali si spingerà fino a uno o più estremi (nella fig. 9, a partire dal vertice A, si hanno 5 rami). Ogni linea, e ogni vertice distinto dall'origine, appartiene a uno, e uno solo di questi rami.

Si può domandare un vertice, in posizione per così dire centrale, tale che, considerando i varî rami che ne escono, e quello fra essi che contiene il numero massimo q di linee, sia tuttavia questo massimo il *minimo possibile* in confronto a tutti gli altri vertici. Si dimostra che, indicando ancora con l il numero totale delle linee dell'albero, esistono certamente:

o un unico vertice pel quale nessun ramo comprende più di $\frac{l}{2}$ linee. Nell'albero della fig. 9, limitata ai tratti continui, è questo il caso del vertice A, a partire dal quale il ramo più ampio comprende 5 linee (mentre $l = 15$). Questo vertice si chiama allora *centro* dell'albero;

oppure due vertici contigui per ciascuno dei quali $q = \frac{l+1}{2}$; e allora si chiama *asse* il segmento compreso fra tali vertici. Per es. in un cammino continuo semplice aperto a m lati, se m è dispari, vi è un lato di mezzo, che è *asse*, come nella fig. $2a$, dove $m = 3$; mentre se m è pari, vi è un vertice centro.

*
* *

Se un complesso di linee contiene dei cicli, in modo tale che ogni sua linea appartenga ad almeno un ciclo (si pensi ancora, come esempio, al sistema degli spigoli di un poliedro, dei quali ciascuno appartiene a 2 facce, e quindi certo a 2 cicli), si possono immaginare le linee di uno stesso ciclo congiunte da una zona superficiale, o *faccia,* limitata a quel ciclo come contorno, appunto come le facce di un poliedro; però le facce attuali non saranno in generale piane, nè si escludono qui cicli di 2 sole linee, come quello della fig. 1 b, e nemmeno che le linee di uno stesso ciclo possano essere congiunte da più facce a un tempo. Allora i punti o *vertici,* le linee o *lati* o *spigoli,* e queste *facce* formano un *complesso a due dimensioni* o *complesso di superficie.* Lo studio di questi complessi è però meno progredito che quello dei complessi di sole linee. Una superficie chiusa, suddivisa, mediante un sistema di vertici e linee segnati su di essa, in un numero finito qualunque di zone semplicemente connesse, dà un esempio di complesso a due dimensioni, caratterizzato, dal punto di vista topologico, dalla duplice proprietà, che ogni lato appartiene a due facce, e che le facce passanti per ogni singolo vertice formano un unico ciclo, nel quale due fra esse consecutive (soltanto) hanno un lato comune. È questo il caso che finora, più di altri, è stato studiato.

Per complessi di linee tracciati sopra una superficie — che supponiamo per semplicità bilatera e chiusa — si presentano questioni interessanti:

1. Il problema delle *carte a colori,* la determinazione cioè del numero di colori necessari a dipingere la superficie, comunque divisa in zone, in modo che 2 zone contigue secondo una linea abbiano sempre colori diversi (« numero cromatico » della superficie). Nel piano, o sulla sfera, quindi sopra ogni superficie di genere zero, 5 colori sono certo sufficienti; e probabilmente bastano anche 4, ma quest'ultima proprietà non fu ancora assodata in modo definitivo. Sul toro, che ha diversa connessione, ne occorrono 7. Ancora nel piano, o sulla sfera, quando ogni zona sia contigua a un numero costantemente *pari* di altre, bastano 3 colori: si pensi p. es. al caso di 6 zone sopra una sfera, tali che, riducendo la sfera per deformazione a un cubo, quelle zone si identifichino rispettivamente colle facce di questo cubo; è ovvio allora che bastano 3 colori, da darsi rispettivamente alle 3 coppie di facce opposte del cubo. E se è invece pari il numero delle zone convergenti in ogni singolo vertice, bastano 2 colori; si pensi ai quadretti di un foglio di carta quadrettata, oppure, sulla sfera, al sistema delle 8 zone (« ottanti ») determinate da 3 piani diametrali mutuamente perpendicolari; zone riducibili per deformazione alle facce di un ottaedro regolare. Nella fig. 10, ad esempio, basta uno stesso colore per le 4 facce EAB, ECD, FBC, FDA, e un altro per le 4 rimanenti.

2. Il problema precedente si collega strettamente — ma non è del tutto equivalente — a quello delle *zone contigue,* il quale richiede, per ogni data superficie di genere p, il numero massimo n di zone, ciascuna delle quali sia contigua secondo linee a tutte le altre. Conosciuto questo numero n, è chiaro che il numero cromatico della superficie non sarà inferiore a n; ma non è evidente senz'altro che non possa essere superiore. E viceversa, se sopra una superficie esistono n zone mutuamente contigue, si può assegnare un *minimo* per il genere p della superficie? Quest'ultima domanda consente, nei casi più elementari, una risposta precisa: è sempre cioè $p \leqq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$; e per $n \leqq 12$ il genere p può assumere effettivamente il minimo valore intero non inferiore al limite indicato; ad es. per $n=4$, $p=0$; per $n=5, 6, 7$, $p=1$; ecc.

3. Il doppio problema testè indicato è altresì equivalente a quello detto dei *punti contigui,* cioè del numero massimo n dei punti di una superficie di genere p che possono

congiungersi a 2 a 2 mediante linee tracciate sulla superficie, una e una sola linea per ciascuna coppia, tali che 2 fra queste linee non si incontrino mai fuori di quei punti medesimi; e del genere minimo di una superficie sulla quale esistono n punti congiungibili a 2 a 2 in tal modo. Sul piano, o sulla sfera, ne esistono 4 (fig. 11), ma non 5.

Se esistono su di una superficie n zone mutuamente contigue secondo linee, è facile convincersi che n punti rispettivamente interni a queste zone sono pure a 2 a 2 contigui, nel senso ora indicato; si veda ad es. la fig. 12, per $n = 4$. L'inversa è pur vera, ma un po' meno evidente all'intuizione.

4. Per un complesso di linee segnate sopra una sfera o altra superficie chiusa di genere zero, il quale abbia m vertici, l lati, e spezzi la superficie in f facce uniconnesse, vale la formola di Descartes-Eulero relativa ai poliedri elementari, già ripetutamente ricordata:

$$m + f = l + 2 \quad \text{ovvero} \quad m - l + f = 2.$$

(Nell'articolo precedente l'abbiamo verificata pel tetraedro e cubo; per l'ottaedro regolare (fig. 10) è $m = 6$, $l = 12$, $f = 8$). Ma sopra una superficie di genere $p > 0$, ossia per un poliedro le cui facce formino complessivamente una tal superficie, i tre caratteri anzidetti sono legati da una diversa relazione. La fig. 13 p. es. rappresenta un parallelepipedo cavo, quindi un poliedro di forma anulare, le cui facce costituiscono complessivamente una superficie di genere uno. Nella faccia superiore e in quella inferiore sono segnati in più 4 lati per ciascuna (e sarebbe bastato uno solo per ciascuna), per suddividerle in parti uniconnesse. Complessivamente, abbiamo ora 16 vertici, 16 facce e 32 spigoli; onde $m - l + f = 0$. E lo stesso valore avrebbe quest'espressione per ogni poliedro di forma anulare.

Più generalmente, per superficie bilatere chiuse di genere p, vale la relazione:

$$- m + l - f = 2p - 2;$$

e per superficie bilatere con r contorni:

$$- m + l - f = 2p + r - 2$$

che è la formula di Descartes-Eulero generalizzata. Per superficie unilatere, al doppio genere $2p$ va sostituito il numero massimo k delle retrosezioni unilatere che non s'incontrano a 2 a 2 e non spezzano la superficie, onde:

$$-m+l-f=k+r-2.$$

Si può verificarlo sulla fig. 4 dell'articolo precedente, con $A' \equiv A$, $B' \equiv B$; ivi $m=5$, $l=10$, $f=5$; $k=r=1$.

* * *

L'Analysis Situs combinatoria, dei cui primi elementi abbiamo dato testè un cenno, riferendosi solo a sistemi di punti, e a certi legami o connessioni fra tali punti, può ricevere base logica in pochi e semplici postulati, i quali affermino: l'esistenza di infiniti punti; l'esistenza, per ogni coppia di punti, di quante si vogliano linee che li congiungano, in modo che su ciascuna di esse esistano ancora infiniti altri punti, ma due qualunque di tali linee aventi i medesimi estremi non si incontrino ulteriormente; l'esistenza, per ogni coppia di linee consimili coi medesimi estremi, di infinite zone superficiali aventi l'insieme di queste due linee per comune contorno; la possibilità di spezzare ciascuna di queste linee e zone superficiali in due, per mezzo di un punto intermedio o di una linea trasversale; ecc. In questa teoria e nella sua estensione a spazi superiori, è possibile far rientrare anche la topologia dei continui, di cui ho parlato nell'articolo precedente, appoggiandola così alla medesima base logica.

Un complesso a 2 dimensioni, ossia di superficie, soggetto alla duplice condizione che ogni lato appartenga a due facce, e che tutte le facce contenenti uno stesso vertice arbitrario formino un unico ciclo, nel quale soltanto due facce consecutive abbiano un lato a comune, si può allora *definire* come una « superficie chiusa »; e, analogamente, per più dimensioni. Ciò che rimane sopprimendone r facce non aventi a due a due alcun elemento comune, si definisce come superficie a r orli. La superficie si può inoltre chiamare bilatera o unilatera — e tale risulta effettivamente, nel senso intuitivo — secondo che il sistema delle facce soddisfa o no alla « legge degli spigoli » di Möbius, accennata nell'articolo precedente. E da altre proprietà, tra cui la formola di Descartes-Eulero, si può giungere al concetto della connessione, in particolare del genere di una superficie bilatera.

Nello stesso modo come, nell'indirizzo elementare dell'Analysis Situs, si studiano quelle proprietà dei continui, in particolare delle superficie, che si conservano inalterate per deformazioni continue, o più generalmente per corrispondenze biunivoche continue, così adesso occorrerà fissare quali proprietà dei complessi di linee, superficie,... s'intende di considerare; ovvero, il che fa lo stesso, rispetto a quali trasformazioni o modificazioni di questi complessi quelle proprietà devono conservarsi immutate. Tali trasformazioni devono anch'esse potersi definire in base ai soli pustulati della presente teoria. Ciò avviene nel modo seguente:

Si considerano anzitutto come identici due complessi corrispondenti a un medesimo « schema combinatorio », cioè costituiti da uno stesso numero di punti, e da linee, superficie,.... pure in egual numero, disposte rispetto ai punti nel medesimo modo. I due sistemi di vertici devono dunque essere in corrispondenza biunivoca; e due vertici qualunque del primo sistema, e i loro corrispondenti del secondo, sempre congiunti da uno stesso numero di linee. Così a un ciclo corrisponderà un ciclo; ecc.

Si considerano poi come operazioni fondamentali, e si chiamano « suddivisioni elementari », le seguenti: Spezzamento di una linea qualunque AB del sistema, per mezzo di un suo punto intermedio arbitrario C, in altre due AC, CB; oppure di una faccia anche in due, per mezzo di una linea trasversale tracciata ad arbitrio su di essa, da uno ad altro punto del suo contorno; e analogamente per più dimensioni.

Si dicono *equivalenti* od *omomorfi* due complessi a egual numero di dimensioni, se ne esiste un terzo ottenibile da ciascuno di essi a mezzo di un numero finito di successive suddivisioni elementari, e che diremo, per brevità, loro comune « derivato ».

Occorre però in tal caso dare una dimostrazione — fondata, s'intende, sui soli postulati ammessi — della « transitività » della relazione di omomorfismo; cioè del fatto, quasi evidente all'intuizione, che due complessi omomorfi a un terzo sono pure omomorfi tra loro; ovvero della proprietà equivalente, che se due diversi complessi sono entrambi derivati di un terzo, ne esisterà un altro ancora, derivato comune dei due primi. Questo si dimostra abbastanza facilmente per complessi a una o due dimensioni; ma per complessi a un numero arbitrario di dimensioni non fu ancora dimostrato. Prevale perciò oggi la tendenza ad adottare per l'omomorfismo di 2 complessi una definizione più larga, e chiamare « omomorfi » due complessi qualunque che siano estremi di una successione di altri, in numero finito, nella quale due complessi consecutivi qualunque abbiano un comune « derivato ». La transitività della relazione di omomorfismo è allora ovvia.

Rimane però ancora insoluta, tranne qualche risultato per le prime dimensioni, la questione che costituisce il vero « ponte », o collegamento, fra il criterio di equivalenza dell'indirizzo elementare, cioè continui in corrispondenza biunivoca e continua, e quello degli attuali schemi combinatori. Si vede facilmente che, se un complesso a 2 o più dimensioni è atto a definire una superficie, o rispettivamente una varietà a più dimensioni, altrettanto avviene per qualunque complesso equivalente al primo, secondo l'attuale criterio; e le 2 superficie o varietà si potranno allora riferire in corrispondenza biunivoca e continua. Ma manca la dimostrazione generale della proprietà inversa; che cioè 2 complessi sopra superficie o varietà in corrispondenza biunivoca e continua, o in particolare sopra una stessa varietà, sono sempre « equivalenti » secondo l'attuale criterio.

* * *

Dopo che, nel secolo XVII, la matematica aveva acquistato nel metodo delle coordinate e nel calcolo infinitesimale strumenti analitici assai potenti, ai quali in talune questioni, sia infinitesimali, sia nella stessa definizione di ente algebrico, riesce difficile o poco « economico » sostituire un'adeguata trattazione sintetica, l'Analysis Situs offre un esempio interessante di altro campo, nel quale, nonostante talune questioni tuttora insolute, la geometria ha preso sull'analisi una brillante rivincita. Anche la matematica, per conseguire i suoi progressi più importanti, richiede l'opera concorde e solidale, simultanea o alternata, di tutte le sue varie branche!

Torino, Università.

GINO FANO