Gino Fano

L'analysis situs I

Scientia, Vol. **36** (1924), p. 217–230

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1924_3>

L'ANALYSIS SITUS

> Il est une géométrie d'où la quantité est complètement bannie, et qui est purement qualitative; c'est l'Analysis Situs. Elle est le véritable domaine de l'intuition géométrique.
>
> H. POINCARÉ

PARTE PRIMA:

Lo studio intuitivo del continuo.

Dopo avere dato un cenno, in un precedente articolo,[1] di alcuni gruppi geometrici e delle corrispondenti geometrie, mi propongo di discorrere ora di un'ulteriore geometria, semplice nei suoi primi elementi, e importante in sè e per i rapporti con altre teorie.

Consideriamo un filo sottilissimo (corrispondente, dunque, con grande approssimazione, al concetto intuitivo di una linea) ed elastico, il quale si possa a piacere incurvare, allungare, accorciare; e ciò, in ogni singolo tratto, in modo indipendente dagli altri tratti. Rispetto a queste deformazioni della linea non è certo invariante la distanza di due punti misurata lungo la linea stessa, nè il rapporto di due consimili distanze; e nemmeno il concetto di retta. Ma se un punto, sul filo, si trova *in mezzo* ad altri 2 determinati, anche dopo comunque deformato il filo esso continuerà a trovarsi in mezzo a questi; la proprietà di un punto di essere *intermedio fra 2 altri, sulla linea,* e, più generalmente, *l'ordine naturale,* anzi *i due ordini naturali fra loro opposti* secondo cui si seguono i punti sulla linea, hanno carattere invariante rispetto a quelle deformazioni.

[1] «Scientia», vol. XXXVI (1924), p. 145.

Se prendiamo uno strato sottilissimo di caoutchouc, immagine sensibile di una superficie, che si possa flettere, distendere, allungare in tutti i sensi, cambieranno su di essa distanze e angoli, singole linee verranno maggiormente incurvate o distese. Ma se una linea chiusa tracciata sul caoutchouc separava una regione interna da una regione esterna, come per es., nel piano, una circonferenza, o una qualunque linea chiusa non intrecciata, e perciò la superficie, tagliata lungo quella linea, risultava spezzata in due parti, dopo tutte le flessioni od estensioni le stesse proprietà continueranno a sussistere. Anche qui, dunque, c'è qualcosa di invariante.

Queste proprietà si presentano nello studio puramente qualitativo del *continuo,* a una o più dimensioni (linee, superficie,...), nel quale si mette in evidenza soltanto ciò che è invariante rispetto a *deformazioni arbitrarie, purchè fatte con continuità,* senza strappi o lacerazioni, nè saldature; in modo che punti vicinissimi (meglio « infinitamente vicini », nel senso matematico che non posso qui meglio precisare) rimangano tali. Da questo punto di vista, la regione di piano interna a una circonferenza è equivalente, cioè si può ridurre, deformandola, alla regione interna a qualsiasi altra linea piana chiusa, comunque sinuosa o ad angoli, purchè non intrecciata; anche, per es., il perimetro di un rettangolo o di altro poligono; e si può ridurre altresì a un'analoga regione sopra una sfera; ma non per es. a una regione piana o sferica con 2 orli diversi, quale è una corona circolare. Sempre dal medesimo punto di vista, una sfera è una superficie chiusa, equivalente a quella di un poliedro elementare; oppure a un ellissoide, comunque allungato o schiacciato; e si può anche deformarla, schiacciandola completamente dalle due parti di un piano diametrale, fino a ridurla all'insieme di 2 strati eguali, di forma circolare od ellittica, saldati lungo la comune periferia, come la superficie di una focaccia schiacciata. Viceversa questa focaccia, gonfiandola a guisa di una camera d'aria di bicicletta, si può ridurre di nuovo, sempre con deformazioni qui consentite, a forma sferica od ellissoidica. Ma non si potrebbe, con tali deformazioni, ridurre la sfera a una superficie anulare, cioè a un « toro », come dicono geometri e architetti: mentre sulla sfera ogni linea chiusa spezza la superficie in 2 parti, ne rompe cioè la *connessione,* ciò non avviene sempre sul toro; in altri termini, se sopra una sfera immaginiamo di avere costruito un muro circolare, non potremo, stando sulla sfera, passare da una parte all'altra di questo muro senza scavalcarlo; mentre sul toro, se il muro è costruito lungo un «meridiano» (cerchio in un piano per l'asse), o lungo un «parallelo» (cerchio in un piano perpendicolare all'asse), sarà possibile passare da una parte all'altra di esso «girando» opportunamente, lungo un parallelo nel primo caso, lungo un meridiano nel secondo.

In talune questioni analoghe entrano pure relazioni combinatorie tra un numero finito di elementi. Nel problema dei «7 ponti di Königsberg», del quale è già cenno in Eulero (1736), si chiedeva di passare, con un unico cammino, sopra i 7 ponti della città, attraversanti vari rami del fiume Pregel, come nella fig. 1, senza mai passare alcun ponte più di una volta. Per questa configurazione di rami del fiume e

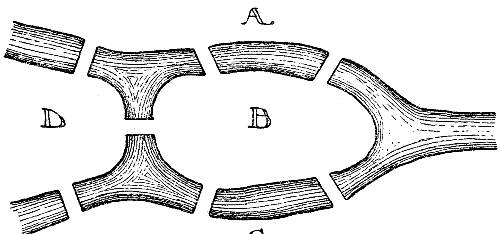

Fig. 1

di ponti, ciò non è possibile; ma è fin d'ora evidente che non importa affatto che i singoli rami del fiume siano diritti o sinuosi, le isole rotonde od ovali, i ponti più o meno obliqui o storti, purchè i ponti rimangano in egual numero, e uniscano sempre le stesse rive od isole; la figura si può comunque deformare, purchè non si separi ciò che era unito, nè si unisca ciò che era separato.

È anche generalmente nota sotto il nome di *formola di Eulero* (1752), benchè già enunciata, in forma un po' diversa, da Descartes, in un frammento pubblicato solo nel 1860, una relazione fra i numeri dei vertici, spigoli e facce di un poliedro elementare; e cioè che la somma dei numeri dei vertici e delle facce eguaglia il numero degli spigoli aumentato di 2 unità (es.: nel tetraedro si hanno 4 vertici, 4 facce, 6 spigoli, e $4+4=6+2$; nel cubo, rispett. 8, 6 e 12, e $8+6=12+2$). Questa relazione, benchè apparentemente di pertinenza della geometria elementare, continua a sussistere per figure ottenute da poliedri elementari con deformazioni continue arbitrarie, anche se spigoli e facce cessano di essere rispettivamente rettilinei e piane, pur mantenendo le stesse mutue disposizioni. La formola, più che un poliedro, riguarda una superficie chiusa, comunque deformata della sfera, la quale per mezzo di linee su di essa sia stata suddivisa in un numero finito qualsiasi di parti o zone semplicemente connesse: cambierebbe se si considerasse l'analoga figura sopra una superficie non deformabile in una sfera, p. es. un poliedro di forma anulare.

In tutte le proprietà anzidette si tratta dunque di relazioni di posizione reciproca, susseguenza, e connessione di punti, linee, superficie, corpi e loro parti od aggregati, indipendentemente da ogni concetto di misura, e anche dai concetti di linea retta e piano. Tali relazioni formano un sostrato, puramente qualitativo, comune a tutte le geometrie considerate nel precedente articolo. Il loro studio costituisce un ramo di geometria che si suol designare come *teoria dell'estensione* o *del continuo*, a una o più dimensioni, o anche *topologia*, ovvero *Analysis Situs*. Esso si può definire, dal punto di vista della teoria dei gruppi (cfr. il mio articolo cit.), come lo studio di quelle proprietà delle figure, che non sono alterate da *deformazioni continue arbitrarie* delle figure stesse; che hanno cioè carattere invariante rispetto al « gruppo » di tali deformazioni.

In luogo di « deformazioni continue », si parla spesso in Analysis Situs anche della sola relazione finale (statica, anzichè cinematica) tra la figura primitiva e la sua deformata; cioè puramente di una « corrispondenza » tra queste figure, in cui a ogni punto dell'una corrisponde uno e un solo punto dell'altra, e viceversa, senza eccezioni (il che si esprime dicendo che la corrispondenza è « biunivoca »); e, di più, a punti vicinissimi dell'una corrispondono punti anche vicinissimi dell'altra (modo intuitivo, benchè impreciso, di esprimere che la corrispondenza è « continua »). Quest'ultimo concetto, corrispondenza biunivoca e continua, è più generale di quello di deformazione, in quanto la deformazione presuppone l'esistenza di uno spazio ambiente, a maggior numero di dimensioni, nel quale siano contenute ambo le figure in discorso, e entro il quale si possa l'una deformare fino a coincidere col-l'altra; mentre ciò non è richiesto dal semplice concetto di corrispondenza, il quale può anzi applicarsi p. es. a un continuo di punti e un continuo di rette, cioè a due continui rispettivamente di elementi di nome diverso.

In relazione a ciò si distinguono nell'Analysis Situs proprietà *assolute* (o *interne*) delle figure, e proprietà *relative* (o *esterne*). Le prime riguardano la figura di cui si tratta « in sè », indipendentemente da ogni spazio ambiente in cui essa sia contenuta; come p. es. la proprietà di una superficie di venire o non venire spezzata da un taglio operato lungo una certa linea; del toro, ad es., di non essere spezzato da un taglio operato lungo un meridiano o lungo un parallelo. Queste proprietà sono invarianti per trasformazioni biunivoche continue qualsiansi, e ad esse esclusivamente ci riferiremo nel presente articolo. Da questo punto di vista è anche indifferente che la figura, la superficie p. es. di cui si tratta, sia comunque intrecciata; o che, potendosi essa deformare e ridurre ad un'altra, un intrecciamento sia all'uopo necessario: soltanto le due parti, o « falde », che si intrecciano, dovranno considerarsi come *nettamente distinte lungo la linea d'intersezione;* ogni punto di questa linea dovrà cioè pensarsi come materiale, eventualmente momentanea sovrapposizione di 2 punti distinti della superficie, uno di una falda e uno dell'altra, *senza* possibilità di passare ivi, muovendosi sulla superficie, da una falda all'altra.

Sono invece proprietà *relative* di una curva o superficie quelle che ad esse spettano soltanto in relazione allo spazio ambiente in cui sono contenute; p. es. la proprietà di una curva chiusa di potersi o non potersi ridurre a forma di un cerchio, con deformazioni continue e senza che un qualsiasi suo arco in alcun momento ne attraversi un altro; cioè di essere, o no, contorno unico di una superficie non intrecciata riducibile, per deformazione, alla zona piana interna a un cerchio. Nel secondo caso, che si presenta p. es. per un filo nel quale si faccia un nodo, saldandone poi ancora gli estremi ad anello, la curva si dice « nodata ». È anche proprietà relativa quella di due curve di essere o no « incatenate », cioè di potersi o non potersi, dopo opportune deformazioni e senza che l'una attraversi l'altra, includere rispettivamente in 2 sfere esterne l'una all'altra; il che non è possibile ad es. per 2 anelli consecutivi di una catena.

* * *

Il problema fondamentale dell'Analysis Situs consiste nella determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti perchè 2 date figure, in particolare 2 continui a uno stesso numero di dimensioni, si possano riferire in corrispondenza biunivoca e continua; siano cioè equivalenti, o identici, dal punto di vista dell'Analysis Situs. A queste condizioni si cerca di dare la forma di eguaglianze fra certi caratteri, o *invarianti topologici,* delle 2 figure. Si cerca, in altri termini, di « caratterizzare » una figura, in particolare un continuo, a mezzo di invarianti topologici; e per ogni classe di figure equivalenti si può anche chiedere un rappresentante tipico, o *forma normale.*

Per es.: ogni continuo a una dimensione è equivalente ad una linea aperta, p. es. un segmento finito di retta, oppure chiusa, p. es. un cerchio, o l'insieme di due linee aperte distinte, congiungenti una stessa coppia di punti, in due modi diversi, senza punti intermedi a comune.

Anche per i continui a 2 dimensioni, o superficie, la questione degli invarianti topologici è abbastanza semplice, e da tempo risoluta. Occorrono all'uopo 3 diverse considerazioni:

1. Anzitutto, se 2 superficie sono in corrispondenza biunivoca e continua, a ogni linea che sia *orlo* o *contorno* dell'una (come p. es. una circonferenza, o il perimetro di un poligono piano elementare, per la regione di piano ad essi rispett. interna; oppure ciascuna di 2 circonferenze concentriche, per la corona circolare fra esse compresa) deve corrispondere un contorno dell'altra. Il numero r dei contorni è dunque un primo invariante topologico. Esso può anche essere nullo, e la superficie è allora *chiusa;* come sono p. es. la sfera, il toro, la superficie di un poliedro elementare.

2. Inoltre, se sopra una superficie noi tracciamo una linea chiusa non intrecciata, senza punti comuni cogli eventuali orli, può avvenire che questa linea *spezzi* la superficie in due parti, tali che qualunque cammino continuo tracciato sulla superficie e che congiunga un punto interno a una delle 2 parti con un punto dell'altra, debba necessariamente attraversare la linea sopraccennata, come avviene p. es. in ogni caso sulla sfera; e può anche darsi che ciò non avvenga.

Non avviene p. es. sul toro, se la linea in discorso è un meridiano, o un parallelo. In questo secondo caso chiameremo tale linea una « retrosezione ». È ovvio che, in una corrispondenza biunivoca e continua fra 2 superficie, a ogni retrosezione dell'una deve corrispondere una retrosezione dell'altra; e a più retrosezioni non aventi a 2 a 2 alcun punto comune, retrosezioni anche così fatte. *Il numero massimo delle retrosezioni non incontrantisi a 2 a 2* che si possono tracciare sopra una superficie senza spezzarla, è dunque anche un invariante topologico della superficie; e si dice allora che queste retrosezioni, in numero massimo, costituiscono un « sistema completo ».

In luogo delle retrosezioni, si possono considerare sulla superficie anche « tagli trasversi », cioè linee che congiungano un punto di un contorno con un punto di un altro, o anche dello stesso contorno. In una corrispondenza biunivoca e continua fra due superficie, a un taglio trasverso sull'una corrisponde un taglio trasverso sull'altra; e il numero massimo dei tagli trasversi successivi che non rompono la connessione della superficie (p. es. una superficie in forma di tubo, con 2 orli alle estremità, non è spezzata da un taglio trasverso che vada da un punto di uno dei 2 orli a un punto dell'altro) è anche un invariante topologico, ma dipendente dai 2 numeri già considerati degli orli e delle retrosezioni.

3. Un terzo carattere topologico delle superficie è dato dalla loro distinzione in *bilatere* e *unilatere.*

Una superficie sferica separa una regione di spazio, che chiamiamo *interna* ad essa, da una regione *esterna:* siamo così condotti a dire che la superficie ha due diverse *facce,* interna una, esterna l'altra, senza possibilità di passare con continuità dall'una all'altra, se non attraversando la superficie. Se concepiamo la superficie sferica come costituita da un sottilissimo strato materiale, possiamo p. es. tingerne le 2 facce, interna ed esterna, con colori diversi, distinguendole così nettamente. La sfera si dice perciò una superficie *bilatera;* e questa è anche una proprietà invariante per deformazione continua, come pure per corrispondenze biunivoche e continue. Sono anche superficie bilatere il toro, e tutte le superficie che possiamo più facilmente immaginare.

Ma non è così in ogni caso. Se una zona piana rettangolare *ABCD* (fig. 2) si chiude a forma di cilindro, facendo coincidere il vertice C con B e D con A, si ha una zona cilindrica, anche bilatera, con 2 orli risultanti dal chiudersi dei singoli lati BC e AD. Ma se lo stesso rettangolo (si prenda ad es. una striscia di carta, che a tal uopo, in pratica, conviene sia piuttosto lunga in confronto all'altezza) si torce prima una volta su sè stesso, saldando poi C con A e D con B, otteniamo una superficie (fig. 3) a contorno unico, formato da AD e BC che si trovano ora uno sul prolungamento dell'altro, e sulla quale non è più possibile distinguere le 2 facce, e tingerle ad es. con colori diversi. Percorrendo il cammino, ora chiuso, EF, si passa con continuità da una faccia della superficie all'altra, senza attraversare la superficie nè girare intorno

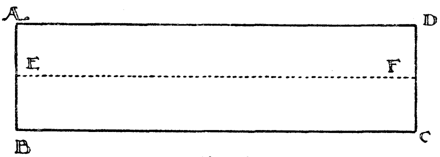

Fig. 2

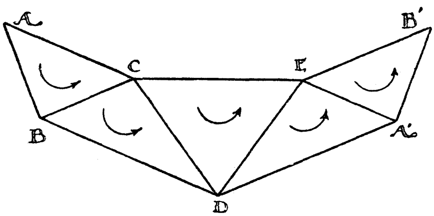

Fig. 4

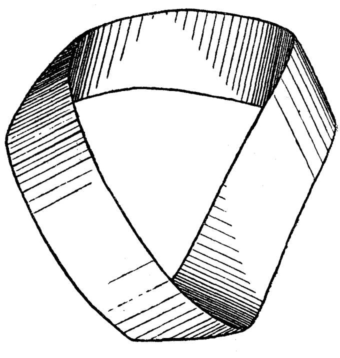
Fig. 3

all'orlo. La nuova superficie si chiama perciò *unilatera*. Mentre un taglio aperto lungo EF, quando il rettangolo era saldato in forma di cilindro, spezzava la superficie in 2 parti, nel caso presente esso non spezza più la superficie — è dunque una retrosezione — e la converte in una nuova striscia anulare, di larghezza metà e lunghezza doppia, torta su sè stessa 2 volte, e bilatera. L'esperienza, per chi desidera farla, è molto semplice!

Se la striscia, prima di saldarne gli estremi, viene torta su sè stessa più volte, si avrà una superficie bilatera o unilatera, secondo che questo numero di volte è pari o dispari. Le superficie unilatere che così si ottengono hanno tutte un orlo; ma si possono rendere chiuse completandole con una nuova qualsiasi zona superficiale limitata allo stesso contorno (p. es.

con una zona di superficie conica proiettante questo contorno da un punto arbitrario). La superficie complessiva sarà intrecciata; ma, dall'attuale punto di vista, ciò non ha importanza.

La superficie unilatera testè addotta come esempio è comunemente detta « *nastro di Möbius* ». E questo geometra vi è giunto in una ricerca intesa ad estendere il concetto di « volume » di un poliedro, dai casi elementari, a poliedri comunque intrecciati; e a mostrare che esistono poliedri pei quali assolutamente *non ha senso* parlare di volume: quelli appunto la cui superficie è unilatera. Per un poliedro elementare, il volume, nel senso ordinario, eguaglia la somma, che è costante, dei volumi delle piramidi che hanno per basi le singole facce del poliedro, e il vertice in un punto interno arbitrario. Questa proprietà continua a sussistere anche se il vertice comune delle piramidi si suppone esterno al poliedro, purchè al volume di ogni singola piramide si attribuisca un *segno* conveniente, riducendosi così a una « somma algebrica », ossia alla differenza fra la somma dei volumi positivi e quella dei volumi negativi. E la determinazione di quel segno, per ciascuua piramide, implica che si fissi, sulla faccia del poliedro che ne è base, un certo *senso di percorrenza* del relativo perimetro. Nei casi elementari, questi sensi di percorrenza sulle diverse facce si possono, e si devono stabilire in modo tale che ciascuno spigolo, nei perimetri delle 2 facce cui appartiene, venga sempre percorso rispettivamente nei 2 sensi opposti (in tutti i casi elementari, è facile convincersi che questo è possibile): è ciò che Möbius chiama la « legge degli spigoli ». Ora, per tutti i poliedri, anche comunque intrecciati, che soddisfano alla « legge degli spigoli », sempre quella somma algebrica di volumi di piramidi è costante, al variare comunque del vertice; e si può allora definire questa somma come volume del poliedro.

Ma vi sono poliedri le cui facce *non* soddisfano alla legge degli spigoli; cercando di applicarla, non vi si riesce; per essi non ha senso parlare di volume, e l'insieme delle facce costituisce allora una superficie unilatera. Prendiamo p. es. una zona poliedrica formata da un numero *dispari* di triangoli, in piani tutti diversi, ma aventi ciascuno un lato comune col successivo, secondo lo schema (fig. 4) ABC, BCD, CDE, DEA'. $EA'B'$, coi lati estremi AB e $A'B'$ di egual lunghezza. Se assegniamo al primo triangolo il senso di rotazione ABC, e agli altri perciò, successivamente, i sensi CBD, CDE, EDA', $EA'B'$, e se chiudiamo questa striscia poliedrica saldando A' con A e B' con B, vediamo che questa striscia, che è ancora un « nastro di Möbius », *non* soddisfa alla legge degli spigoli, perchè lo spigolo compreso fra i 2 vertici $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$ è percorso in ambo le facce ABC, $EA'B'$ nel senso da A (o A') a B (o B'). Non vi può quindi soddisfare nessun poliedro la cui superficie contenga come parte l'anzidetta striscia. Tale striscia costituisce una zona superficiale unilatera, con un unico contorno pentagonale di vertici A, C, E, $B' \equiv B$, D, e poi di nuovo $A' \equiv A$. Aggiungendovi i 5 triangoli determinati dai singoli lati di questo pentagono con uno stesso nuovo punto arbitrario F, come vertice sempre opposto a quei lati, si ha una superficie poliedrica priva di contorno, cioè « chiusa », sempre unilatera, intrecciata, la quale non racchiude alcuna regione di spazio: un poliedro per cui non ha senso parlare di volume.

Per dare al concetto di superficie bilatera od unilatera forma più precisa, pensiamo sopra una superficie qualunque un punto P, poi il piano tangente alla superficie in questo punto, e la retta perpendicolare, in questo medesimo punto, al detto piano tangente, cioè la *normale* alla superficie. Distinguiamo sulla normale stessa i due opposti *versi*, chiamando uno arbitrario dei due *positivo*, l'altro *negativo*. Supponiamo che il punto P si sposti sulla superficie con continuità, in modo arbitrario, ma senza attraversare alcun orlo, e che la relativa normale lo segua nel suo movimento, mantenendosi sempre perpendicolare, nelle successive posizioni di P, ai singoli piani ivi tangenti alla superficie. Se avviene che P, dopo un tal cammino, ritorni alla sua posizione iniziale, anche la normale alla superficie riprenderà la primitiva sua posizione; ma potrà avvenire che i 2 versi su di essa considerati riprendano del pari ciascuno la propria posizione iniziale, oppure *ch'essi risultino scambiati*. Sulla sfera, per qualunque punto P e per qualunque cammino chiuso sulla superficie, si presenta sempre la prima di queste 2 eventualità: il verso « dalla sfera al centro » rimane sempre tale. Si chiamano *bilatere* le superficie sulle quali si presenta sempre la detta prima eventualità; *unilatere* le altre, per le quali cioè esistono cammini chiusi che scambiano i due versi sulla normale, come per es. la retrosezione EF sul nastro di Möbius.

Data la definizione in questo modo, l'essere una superficie bilatera o unilatera sembrerebbe tuttavia un carattere topologico *relativo* della superficie, essendo la definizione fondata su un elemento, cioè la normale, che non giace sulla superficie. Ma si tratta, in realtà, di un carattere *assoluto*, come risulta da quest'altra considerazione. Immaginiamo una curva chiusa piccolissima, come un piccolo cerchio, che, sulla superficie, circondi il punto P; e su di essa un determinato, arbitrario, senso di rotazione. Questo cerchio, col senso di rotazione, è ciò che si chiama una *indicatrice* del punto P. Facendo descrivere a P sulla superficie, di nuovo, un cammino chiuso che lo riconduca alla posizione iniziale, anche il cerchietto chiuso, seguendo P con continuità, ritornerà alla posizione primitiva; ma il senso dell'indicatrice potrà non risultare, oppure risultare invertito. Le superficie unilatere sono quelle sulle quali vi sono cammini chiusi che invertono il senso dell'indicatrice: perciò si sogliono chiamare anche *superficie con indicatrice invertibile.* Noi useremo tuttavia i termini di *bilatera* e *unilatera*, come più intuitivi.

*
* *

Da quanto precede, risulta che affinchè 2 superficie siano equivalenti dal punto di vista dell'Analysis Situs, è certamente necessario — e si dimostra essere pure sufficiente:

che siano entrambe bilatere, oppure entrambe unilatere;

che abbiano lo stesso numero r di contorni;

che ammettano lo stesso numero massimo p di retrosezioni non incontrantisi a 2 a 2 e che non spezzano la superficie.

Questi caratteri costituiscono altrettanti invarianti topologici distinti; e non ve ne sono altri distinti da questi. Il problema fondamentale dell'Analysis Situs, per le superficie, è con ciò risoluto.

Per le superficie *bilatere,* il numero massimo anzidetto di retrosezioni si chiama comunemente *genere* della superficie. Queste retrosezioni sono allora tutte del medesimo tipo; tagliando la superficie lungo una tal linea (p. es. tagliando un toro lungo un meridiauo), si ha una superficie di genere inferiore di un'unità e con 2 orli o contorni in più, in corrispondenza ai 2 bordi del taglio operato (dal toro si ha una superficie tubulare, specie di cilindro incurvato, con 2 orli alle estremità). Ma per superficie *unilatere* non è sempre così. Tagliando per es. il nastro di Möbius lungo la linea mediana

EF, i 2 bordi del taglio vengono a costituire un *unico* nuovo orlo, corrispondente a un doppio percorso di *EF*; ciò è dovuto al fatto che, percorrendo il circuito *EF* una volta sola, il senso dell'indicatrice viene invertito, e perciò ad es. il primitivo bordo sinistro del taglio, proseguito con continuità, viene a saldarsi, dopo il detto percorso, col primitivo bordo destro: si tratta dunque di una retrosezione a un solo bordo, ossia « unilatera ». Sono appunto retrosezioni unilatere tutte quelle lungo le quali il senso dell'indicatrice viene invertito.

Mentre sopra una superficie bilatera un sistema completo di retrosezioni si compone di un numero costante di tali curve, eguale al genere p, per una superficie unilatera un sistema completo non sempre raggiunge il massimo contemplato nell'enunciato. Lo raggiunge, se si compone esclusivamente di retrosezioni unilatere; non lo raggiunge in caso contrario; e allora ogni retrosezione bilatera ne assorbe due fra le p unilatere.

Per *superficie bilatere*, si chiama generalmente *connessione* il numero $z = 2p + r$. Detta connessione può sostituirsi, come invariante topologico, al genere p. Per *superficie bilatere chiuse*, l'eguaglianza del genere, o della connessione, è l'unica condizione per l'equivalenza. — Se $r > 0$, un taglio trasverso (che non spezzi la superficie) diminuisce la connessione di un'unità; con $2p + r - 1$ tagli trasversi si rende la connessione uguale ad *uno*, cioè si ottiene una *superficie uniconnessa*, o *semplicemente connessa*, o *superficie elementare*, equivalente alla zona di piano interna a una linea chiusa non intrecciata.

*
* *

Le superficie caratterizzate dagli invarianti topologici sopra indicati si possono riferire in corrispondenza biunivoca e continua a *tipi*, o *forme normali* determinate.

Le superficie bilatere chiuse hanno un unico invariante topologico; e come tale può assumersi il genere. Quelle di genere *zero* sono tutte riferibili alla sfera; quelle di genere *uno*, al toro, il quale, gonfiandosi da una parte a guisa pressochè di sfera, e assottigliandosi dall'altra, si riduce a una *sfera con manico*; e, schiacciandolo tutto sul piano equatoriale, si riduce altresì a una ciambella con un foro nel mezzo. Analogamente, le superficie bilatere chiuse di genere p possono ridursi a *sfere* *con p manichi*, oppure a *ciambelle con p buchi*: un sistema completo di p retrosezioni è quello costituito, sulla sfera con manichi da sezioni trasversali dei singoli manichi, sulla ciambella da circuiti chiusi attorno ai singoli buchi. Tagliando ulteriormente la superficie lungo una $(p+1)^{\text{sima}}$ retrosezione opportuna, p. es. la sfera con manichi lungo un cammino che circuisca complessivamente *un* estremo, ma uno solo, di ciascun manico, e la ciambella lungo la periferia esterna, la superficie si spezza in 2 « forme fondamentali », equivalenti entrambe a una zona piana con $p+1$ contorni; compresa p. es. fra un orlo circolare esterno, e altri p cerchi interni al primo e mutuamente esterni fra loro. Viceversa, è ovvio che da due zone piane consimili, che possiamo eventualmente deformare fino ad essere uguali, saldandole lungo i singoli orli, nasce di nuovo la ciambella con p buchi.

Da questi tipi, asportandone a piacere r superficie elementari senza punti comuni, si hanno tipi di superficie bilatere dei vari generi con r contorni.

Altre forme normali, anche di superficie unilatere, si possono costruire partendo da una zona piana poligonale, e tendendo, fra coppie di lati del suo perimetro, opportuni «nastri», dei quali uno almeno torto se la superficie deve essere unilatera.

***

L'attenzione della generalità dei matematici è stata richiamata sull'Analysis Situs da Riemann (1857), col mettere in luce un'importante e intima sua connessione, che non posso qui illustrare, con un'altra teoria matematica, apparentemente di tipo affatto diverso: la teoria delle funzioni algebriche di una variabile, o delle curve algebriche. E d'allora in poi l'importanza dell'Analysis Situs per tutta la matematica è risultata sempre più manifesta. Sono stati pure studiati continui a un numero qualunque n di dimensioni, quali si possono formare con gruppi di n o più numeri, o con enti geometrici dipendenti da almeno n parametri. A questo studio hanno portato contributi importanti anche scienziati eminenti: fra altri Poincaré, uno appunto di coloro che dell'Analysis Situs hanno maggiormente e più intimamente sentita tutta la portata. I concetti di orlo o contorno, di genere e connessione di una superficie, di superficie bilatera ed unilatera, si possono estendere ai continui a più dimensioni; ma talune questioni presentano allora difficoltà e complicazioni notevolmente maggiori, sicchè Poincaré stesso ebbe a dire « qu'on ne pourra en venir « à bout que par des efforts répétés », ma che però l'argomento è « assez important pour le mériter ». Fra altro, nonostante le ricerche di Poincaré, che sono fra le sue più profonde e ingegnose, e altre più recenti, non si è ancora riesciti a assegnare un complesso di condizioni necessarie e sufficienti per l'equivalenza topologica di due continui a uno stesso numero arbitrario di dimensioni.

Dato così un rapido sguardo all'Analysis Situs dei continui, limitatamente alla sua parte più elementare, ne considereremo, in un secondo articolo, l'altra fase, non meno importante, di ordine combinatorio.

Torino, Università.

GINO FANO