Gino Fano

I gruppi di trasformazioni nella geometria

Scientia, Vol. **36** (1924), p. 145–154

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1924_2>

I GRUPPI DI TRASFORMAZIONE
NELLA GEOMETRIA

Quali risposte darebbero i cortesi lettori di « Scientia » alle domande: Che cos'è una figura geometrica? Che cos'è una *proprietà geometrica* di questa figura?

La risposta alla prima domanda non sembra difficile; ne abbiamo anzi tutti un'idea, più o meno determinata; occorre soltanto concretarla in termini precisi. Da tutto il complesso degli oggetti e dei fenomeni che cadono, in qualsiasi modo, sotto i nostri sensi, noi, per astrazione, a mezzo di confronti fra alcuni di essi, intesi a mettere in evidenza quanto vi è in essi di comune, per elaborazione della nostra mente, ricaviamo, com'è noto, dei *concetti*; e fra i concetti più semplici — più semplici, perchè richiedono soltanto osservazioni relative allo spazio, e non p. es. anche di tempo, di energia, o di altri elementi — vi sono i concetti geometrici: punto, retta, piano. Figura geometrica, nel senso più generale, è un insieme qualsiasi di questi elementi, in numero finito o infinito; p. es. i triangoli, quadrangoli, e altri poligoni piani studiati dalla geometria elementare sono figure di punti (vertici) e rette (lati); la circonferenza è una figura di infiniti punti; ecc.

Meno semplice è la risposta all'altra domanda: Che cos'è una proprietà *geometrica* di una figura? La migliore risposta (quale mi auguro possa venire chiarita dal presente articolo) muove dal concetto di *gruppo di trasformazioni* (o di operazioni); concetto fondamentale che, da circa un secolo in qua, è andato acquistando, in matematica, sempre maggiore importanza, come principio informatore e coordinatore di vecchie e nuove teorie. Ed è ciò che, per la geometria e la sua ripartizione in vari rami o branche, ha messo in luce F. Klein, con geniale veduta, 50 anni or sono.

*
* *

Comincio con un esempio. È noto che per i 3 vertici di un triangolo passa sempre un cerchio, il così detto cerchio «circoscritto» al triangolo; mentre i 3 lati di questo sono tangenti ad altri cerchi, uno dei quali è il cerchio «inscritto» nel triangolo. Se io dicessi che, *per ogni triangolo, il centro del cerchio inscritto si trova 5 millimetri a oriente del centro del cerchio circoscritto*, sarebbe questa una proprietà *geometrica* del triangolo? Certamente no: ammesso anche che la proposizione enunciata fosse vera, si potrebbe dire ch'essa esprime una proprietà «topografica», non una proprietà geometrica. Una proprietà geometrica deve essere indipendente dai punti cardinali (oriente, occidente,....), cioè dall'orientamento della figura; e, del pari, dalla sua posizione nello spazio; quindi da tutti i movimenti, o spostamenti, a cui possiamo assoggettarla (la figura essendo qui intesa come sistema rigido). — Inoltre, nessuna proprietà geometrica considera la lunghezza assoluta (cioè ad es. in metri, millimetri,....) di un segmento di retta; bensì soltanto segmenti eguali (come ad es. i lati di un quadrato o di un triangolo equilatero, o i raggi di un cerchio) oppure segmenti aventi fra loro un determinato rapporto (lato e diagonale di un quadrato; lato, raggio, apotema dei singoli poligoni regolari). Un quadrato può avere il lato di un km. o di un cm., ma è sempre un quadrato, e gode delle stesse proprietà «geometriche» (lati eguali, angoli retti); in altri termini, queste proprietà devono essere indipendenti dalla grandezza della figura, purchè questa conservi la stessa «forma»; devono dunque continuare a sussistere se alla figura primitiva se ne sostituisce un'altra ad essa «simile» (secondo la terminologia usata in geometria elementare). — Infine, una *proprietà geometrica* ad es. *del guanto della mano destra* deve pure sussistere per il guanto della mano sinistra; eppure ognuno sa che i due guanti differiscono in qualche cosa (ed è appunto questa stessa differenza che, applicata alla costituzione molecolare di taluni composti organici, permette di spiegare come sostanze chimicamente identiche possano differire nel comportamento ottico). I due guanti non possono sovrapporsi l'uno all'altro, ma possono disporsi in modo da essere « simmetrici » rispetto a un piano; e pertanto qualunque proprietà geometrica di una figura deve conservarsi, se a questa figura si sostituisce la sua simmetrica rispetto a un piano.

Una proprietà geometrica è dunque *qualcosa che permane, che deve conservarsi,* se la figura di cui si tratta viene fatta variare in certi modi (di posizione, come sistema rigido; di grandezza, pur conservando la stessa forma; o per simmetria rispetto a un piano); *deve perciò avere carattere invariante* rispetto a (o *essere indipendente* da) talune possibili variazioni, o modificazioni, o « trasformazioni » della figura: rispetto a quelle già indicate (movimenti, similitudini, simmetrie), e perciò anche rispetto a tutte quelle operazioni che si ottengono come risultato complessivo, applicando due o più di queste, una di seguito all'altra (e che sono ancora tutte similitudini, o loro casi particolari). E questo è ciò che i matematici chiamano un *gruppo di trasformazioni*: un sistema « chiuso » di trasformazioni, tale che, applicando due o più di esse una dopo l'altra, ne risulti una trasformazione complessiva (loro « prodotto ») che ancora appartenga al sistema. Questo concetto di *gruppo* di operazioni, a cui poco fa alludevo, è appunto uno di quelli che informano e dominano tutta la matematica moderna. I diversi scambi o sostituzioni di un numero qualunque di oggetti, intesi a alterare comunque l'ordine in cui tali oggetti sono disposti, formano anche un gruppo; ed è per questa via che il concetto di gruppo è entrato per la prima volta nella scienza. Evaristo Galois, morto a 20 anni (1832) in un duello, il quale la notte precedente la sua morte, che presentiva, scrisse rapidamente il riassunto delle sue grandi idee, lasciandolo, come testamento, al suo migliore amico; Camille Jordan, Sophus Lie, segnano, insieme con F. Klein, già nominato, le tappe principali del progressivo sviluppo di quel concetto.

Le proprietà « geometriche » delle figure sono dunque caratterizzate dall'essere invarianti rispetto al « gruppo » dei movimenti, similitudini e simmetrie (cioè dal loro conservarsi quando la figura in discorso si assoggetta a una o, successivamente, a più di queste operazioni); gruppo che Klein ha chiamato *gruppo principale*, appunto per questa sua funzione fondamentale nella geometria. Le figure geometriche e le loro proprietà che s'incontrano in geometria elementare (cioè nell'insegnamento geometrico delle nostre Scuole Medie) soddisfano infatti tutte a questo requisito.

* * *

Ma le similitudini (nelle quali sono già comprese, come casi particolari, movimenti e simmetrie) sono soltanto le più semplici ed elementari fra le svariatissime «trasformazioni» geometriche. Altre trasformazioni cominciarono ad essere oggetto di studio, tra la fine del secolo XVIII e il principio del secolo XIX, in quel movimento scientifico che, iniziatosi principalmente con Monge e Poncelet, ha condotto al rifiorire della geometria pura e alla costruzione della *geometria proiettiva*.

Ognuno sa, all'incirca, che cos'è la *proiezione* di una figura, da un certo *centro*, sopra un piano: è l'ombra data, o proiettata, da quella figura sopra questo piano, qualora il centro di proiezione si pensi come centro luminoso. Un disegno di prospettiva, una fotografia sono anche proiezioni. Punti di una stessa retta vengono ivi riprodotti (cioè proiettati) anche in linea retta; ma una scala a unità costante, p. es. un porticato composto di successive unità tutte eguali, viene generalmente riprodotto con unità di dimensioni decrescenti (scala «fuggente»); rette parallele hanno generalmente per immagini rette concorrenti (nel comune «punto di fuga»): p. es. le due rotaie di un binario di ferrovia non vengono riprodotte in una fotografia, in generale, secondo rette parallele. La proiezione di un triangolo o di un quadrangolo sarà ancora un triangolo o rispettivamente un quadrangolo; ma la proiezione di un triangolo equilatero, di un quadrato, di un cerchio non sarà più, in generale, del medesimo tipo (ossia simile alla figura oggettiva); sarà bensì, in generale, un triangolo non più equilatero, o rispettivamente un quadrangolo non quadrato, una «conica» non cerchio. Vediamo così che, tra le proprietà di una figura che abbiamo chiamate «geometriche», alcune si conservano (hanno carattere invariante) *anche* nelle proiezioni, altre no. Non si conservano, in generale, quelle proprietà in cui entra il concetto di «misura», che trattano cioè di grandezze angolari, di eguaglianze o rapporti di segmenti; p. es. le proprietà particolari del quadrato, o del cerchio. Si conservano invece tutte quelle proprietà che si riconducono ad es. allo stare o meno di più punti sopra una retta (il triangolo, p. es., ha per vertici 3 punti qualunque che *non* appartengono a una retta), e che, in antitesi alle precedenti proprietà di misura o «metriche», si sogliono chiamare proprietà «di posizione ». E lo sviluppo della geometria nella prima metà del secolo XIX aveva appunto condotto a suddividere la scienza geometrica in « geometria di posizione » (o geometria proiettiva) e « geometria metrica » (elementare).

Il legame, anzi la completa, assoluta analogia fra queste due geometrie, e la possibilità di costruire, accanto ad esse, altre branche ancora di geometria, appaiono ora chiare dal punto di vista dei gruppi. Le proiezioni sono anche, nello spazio, operazioni sopra una figura, cioè trasformazioni od operazioni geometriche, per quanto diverse, in generale, meno semplici se vogliamo, delle similitudini. Con queste (sostanzialmente) si può anche formare un gruppo (ripeto: un sistema chiuso di operazioni, tali che l'operazione complessiva risultante dall'applicare più di esse, una dopo l'altra, sia sempre contenuta nel sistema); e si può allora studiare quali tipi di figure (triangolo il più generale, quadrangolo, conica) e loro proprietà si conservano *anche* nelle operazioni di questo nuovo gruppo. Sarà un gruppo più ampio del « gruppo principale », perchè la proiezione di una figura piana può essere simile od eguale alla figura primitiva, ma è tale solo in casi molto particolari: sarà il gruppo delle così dette trasformazioni « proiettive » (più esattamente, per ragioni sulle quali sorpasso, delle *trasformazioni omografiche* od *omografie*), nel quale il precedente gruppo principale è contenuto; del quale quest'ultimo costituisce cioè un « sottogruppo ».

Ecco dunque il concetto che sta a base della concezione moderna della geometria, e ne costituisce una direttiva di massima. Ogni proprietà geometrica di una figura, la stessa definizione di questa, deve avere carattere invariante rispetto a un insieme di possibili *variazioni* o *trasformazioni* della figura, formanti un *gruppo*, fra le quali sono comprese, il più delle volte, quelle del così detto gruppo principale (movimenti, simmetrie, similitudini), ma che possono formare un insieme più ampio. *Studiare geometria, studiare le diverse branche di geometria* (geometria elementare; geometria proiettiva; geometria delle trasformazioni birazionali; Analysis Situs, di cui dirò in un prossimo articolo) vuol dire escogitare diversi tipi di trasformazioni geometriche, cioè di possibili variazioni di posizione, forma, grandezza di figure, secondo leggi determinate; comporre con queste dei gruppi; e investigare quali tipi di figure e quali loro proprietà hanno, rispetto alle operazioni di questi gruppi, carattere invariante. In un certo senso, non vi è limite nei diversi tipi di trasformazioni e gruppi geometrici che si possono pensare, e perciò nelle diverse geometrie che possiamo costruire; ma, per ragioni di semplicità e *fecondità*, l'interesse maggiore si è concentrato sopra alcuni di questi gruppi, in numero progressivamente crescente. Rileviamo ancora che, in questo modo di concepire la geometria, le figure vengono a perdere quel carattere di « rigidità », che è loro attribuito tuttora, generalmente, dai non geometri. Una figura geometrica è anzi qualcosa di essenzialmente variabile, flessibile, o almeno snodato; e, volta per volta, secondo le diverse branche di geometria, se ne considerano determinate variazioni, e se ne studiano quelle proprietà che permangono in seguito a queste variazioni. E le diverse figure ottenibili l'una dall'altra con variazioni siffatte: i diversi quadrati, o i diversi cerchi in geometria elementare; tutti i triangoli, tutti i quadrangoli piani, tutte le coniche in geometria proiettiva; sono, per questa geometria, figure « equivalenti », cioè sono in sostanza, tipo per tipo, come « una sola figura ».

*
* *

Rinviando, come ho detto, a un prossimo articolo l'esposizione di qualche nozione di Analysis Situs, o teoria del continuo e della connessione, branca che si presta più facilmente di altre a essere illustrata anche a un pubblico non specialista, dirò qui ancora qualche parola di altri gruppi, e delle corrispondenti geometrie, nei limiti consentiti dall'indole di questa Rivista.

Ricordiamo che l'ombra proiettata sopra un piano, da parte di una figura illuminata da un certo centro, ci ha già condotto al concetto più generale di *proiezione*. Nel caso speciale che i raggi luminosi siano paralleli (come sono sensibilmente i raggi solari), ossia che il centro luminoso sia a distanza infinita (in pratica, a distanza grandissima), ne ricaviamo il concetto più particolare di *proiezione parallela* di una figura sopra un piano. Con similitudini (inclusi movimenti e simmetrie) e proiezioni parallele possiamo costruire un nuovo gruppo, il *gruppo affine*, che è in certo modo intermedio fra il gruppo delle « omografie » (di cui è sottogruppo, in quanto le proiezioni parallele sono particolari proiezioni) e il gruppo principale. È facile osservare che le proiezioni parallele (le ombre solari ad es.) di rette parallele sono anche parallele (mentre abbiamo già detto che non sono generalmente tali le loro proiezioni, o ombre, da un centro a distanza finita). Per conseguenza, nelle trasformazioni « affini » si conserva la relazione di parallelismo; e nella « geometria affine » è concetto fondamentale quello di *parallelogramma* (quadrangolo avente i lati opposti paralleli), mentre nella geometria proiettiva i parallelogrammi non si distinguono dagli altri quadrangoli (sono cioè « equivalenti » a un qualsiasi altro quadrangolo piano; interessano cioè quelle sole loro proprietà che sono comuni a tutti i quadrangoli); e viceversa, nella geometria elementare (o del gruppo principale) i quadrati, rettangoli, rombi vanno distinti, fra i parallelogrammi, in modo speciale.

Ecco ancora un altro esempio di gruppo, e relativa geometria. Consideriamo una sfera, di cui indichiamo con O il centro; e, per ogni punto P interno (ad es.) alla sfera (e distinto da O), determiniamo l'altro punto P', esterno alla sfera, sulla retta indefinita OP e, rispetto ad O, dalla stessa parte di P, tale che le due distanze OP, OP' abbiano il raggio della sfera come media proporzionale (cioè il loro prodotto, o rettangolo, eguagli il quadrato di questo raggio): se dunque OP è metà, un terzo,... del raggio, sia OP' rispettivamente il doppio, il triplo di esso. Per ogni figura di punti P (interni), se ne può costruire una formata dai punti corrispondenti P' (esterni), e viceversa; e ciascuna delle due si può chiamare « immagine » o « simmetrica » dell'altra rispetto alla sfera.

Questa denominazione è giustificata, fra altro, dalla circostanza che, diventando la sfera, in modo opportuno, sempre più grande (e meno incurvata); se p. es. ne rimane fisso un punto e se ne allontana indefinitamente il centro; la sfera si converte, al limite, in un piano, e 2 punti quali P e P' diventano, al limite, punti simmetrici rispetto a questo piano. Le nuove operazioni (di specchiamento rispetto a una sfera, nel modo indicato) si chiamano *trasformazioni per raggi vettori reciproci* (o *inversioni*); esse mutano punti di una stessa (ulteriore) sfera anche in punti di una sfera, o in particolare di un piano, se la prima sfera passa per O; e punti di un cerchio (cerchio che si può sempre pensare come intersezione di 2 sfere) in punti di un cerchio, o in particolare di una retta. Con esse e colle operazioni del gruppo principale si compone un nuovo gruppo, comunemente detto *gruppo dei raggi reciproci*, le cui operazioni mutano tutte ancora sfere in sfere (o piani), e cerchi in cerchi (o rette); e sfere incontrantisi sotto un certo angolo in sfere incontrantisi sotto il medesimo angolo. — In ottica, 2 punti simmetrici rispetto ad un piano sono l'uno immagine dell'altro, nel senso che, se il piano è fisicamente sostituito ad es. da uno specchio, e uno dei 2 punti emette raggi luminosi che dallo specchio vengono riflessi, questo sistema di raggi riflessi, da questa medesima parte dello specchio, potrebbe sostituirsi, eliminato lo specchio, con un sistema di raggi direttamente emessi dal secondo punto, immagine (virtuale) del primo. Del pari — riferendomi alla sopra indicata trasformazione per raggi reciproci di centro O — supponiamo che nel punto P' venga collocata una certa massa elettrica, e che la sfera considerata di centro O sia costituita da un sottile strato metallico a potenziale zero (cioè in comunicazione colla terra). Allora il risultante campo elettrico, nella regione esterna alla sfera, rimarrà invariato qualora si tolga la sfera, sostituendole una seconda massa elettrica, di segno contrario alla prima e di grandezza determinata, collocata nel punto P, immagine di P'. In ciò consiste la teoria delle *immagini elettriche*, dovuta a William Thomson (Lord Kelvin), che ne ha fatto un metodo potente per la risoluzione di problemi di elettrostatica, in particolare di problemi di potenziale, oppure concernenti la distribuzione di elettricità sopra conduttori; riconducendo, per mezzo di trasformazioni per raggi reciproci (ossia specchiamenti rispetto a una sfera), la soluzione di problemi complessi a quella di altri più semplici, e eventualmente già risoluti in precedenza.

Anche la *geometria non euclidea,* della quale quasi tutti conoscono il nome, trova, dal punto di vista gruppale, molto semplice e naturale collocamento. Si tratta solo di sostituire al gruppo principale, che è un sottogruppo del gruppo totale delle omografie, un altro sottogruppo di quest'ultimo, composto delle sole sue operazioni che mutano in sè stessa (fanno « scorrere » sopra sè stessa) una conica (p. es. un cerchio) se ci limitiamo alla geometria piana, e una « superficie di 2° ordine » (p. es. una sfera) se nello spazio. Nello stesso modo come, se un movimento dello spazio ordinario (euclideo) porta 2 punti A, B in nuove posizioni A', B', la distanza AB (sempre nel senso ordinario) è uguale alla distanza $A'B'$, così, nelle operazioni di quest'altro gruppo, di nuovo una certa quantità dipendente dai punti A, B (una *funzione* di tali punti, cioè delle loro coordinate) assumerà, per essi e per i punti corrispondenti A', B', in una qualsiasi operazione del gruppo, sempre uno stesso valore. Se questo numero, questo « invariante » di quella coppia di punti, si assume per definizione come « distanza » AB (e si definiscono pure opportunamente le nuove misure degli angoli), si hanno, fra queste misure, relazioni che coincidono colle formole della geometria non euclidea.

Riassumendo, le parole *geometria, proprietà geometrica,* presuppongono sempre il *riferimento a un certo gruppo di trasformazioni,* di variazioni o modificazioni delle figure che si considerano, *le quali non devono distruggere quelle proprietà;* rispetto alle quali cioè s'intende che tali proprietà abbiano carattere invariante. Il caso del « gruppo principale » è quello più comune, e generalmente sottinteso in mancanza di altra indicazione; ma ve ne sono molti altri; e molti se ne possono anche pensare, all'infuori di quelli più frequentemente considerati.

Geometria è dunque sempre *qualcosa di relativo a un certo gruppo di trasformazioni;* e dalla frase « teoria delle proprietà invarianti » o « teoria invariantiva » *relativa a un certo gruppo* è breve il passo a dire *teoria della relatività rispetto a questo gruppo.*

Or bene, quella che oggi si chiama comunemente *teoria della relatività* senz'altro (cioè la teoria di Einstein), è appunto, pel matematico, teoria della relatività corrispondente, nel senso ora accennato, a un certo gruppo di trasformazioni; e precisamente, nel caso della *relatività speciale* (o della prima maniera), al così detto *gruppo di Lorentz.* Dal punto di vista matematico, si tratta di questo. Un sistema di equazioni (di formole!) che lega fra loro talune quantità è generalmente, o almeno può essere invariante rispetto a certe trasformazioni, od operazioni sopra queste quantità: operazioni il cui insieme costituisce un gruppo. Le equazioni della meccanica classica sono appunto invarianti rispetto ad un certo gruppo di operazioni; e la ben nota *relatività* del movimento, nel senso vecchio, classico, di Galileo, il fatto cioè che un osservatore non può, con sole esperienze meccaniche eseguite nell'interno di un sistema, decidere se questo sistema è fermo oppure in moto traslatorio uniforme, si traduce, per quelle equazioni, nella proprietà che il gruppo suddetto comprende (in linguaggio matematico) il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro che abbia, rispetto al primo, un movimento rettilineo uniforme. Ma lo sviluppo dell'elettrodinamica e dell’ottica ha mostrato che la meccanica classica non è base sufficiente alla descrizione di tutti i fenomeni fisici: le equazioni di Maxwell, che reggono i fenomeni elettromagnetici, non sono invarianti rispetto ai cambiamenti sopra indicati del sistema di riferimento; ma sono invece invarianti rispetto ad un altro gruppo, il gruppo di Lorentz, che col primo gruppo ha in comune una parte (soltanto) delle sue operazioni. La meccanica di Einstein, fondata sulla validità incondizionata delle equazioni di Maxwell, è teoria della relatività rispetto a questo nuovo gruppo; gruppo su 4 variabili (le 3 coordinate usuali e il tempo), la cui interpretazione geometrica più semplice ha luogo nel così detto *spazio-tempo* a 4 dimensioni. E poichè i due gruppi ora ricordati operano in modo essenzialmente diverso sopra una delle variabili, quella che corrisponde al concetto di *tempo,* questo concetto ne risulta, è ovvio, radicalmente modificato. L’espressione «teoria della relatività» usata per designare la geometria corrispondente al secondo gruppo sopra accennato, cioè la teoria di Einstein, è dovuta probabilmente al fatto che, nei tentativi intesi a metter d’accordo la meccanica classica colle equazioni di Maxwell, era stata presa in considerazione anche l’ipotesi dell’etere in riposo assoluto (Lorentz); e alla teoria di Einstein, sorta in opposizione a quest’ultima ipotesi, si addiceva bene un nome in antitesi col riposo « assoluto ».

La *relatività generale* (o della seconda maniera) corrisponde a sua volta a un altro gruppo, più complesso, anche nello spazio-tempo a 4 dimensioni, e, per giunta, non euclideo. Ciò mostra ancora una volta l’importanza che spazi a più dimensioni e geometria non euclidea, teorie che molti non matematici giudicano costruzioni di origine arbitraria e quasi fantastica, hanno acquistato anche per la fisica moderna. La teoria di Einstein non avrebbe potuto essere afferrata così facilmente dai matematici e fisici, se non avesse trovata, nel campo matematico, largamente spianata la via, e pronti i concetti e il linguaggio atti ad esprimerla nel modo più semplice. Per i matematici sopratutto essa trovava pronto e mirabile collocamento nel quadro generale e moderno della loro scienza!

Torino, Università.

GINO FANO