Gino Fano

Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali. Nota V

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 5, Vol. **292** (1920), p. 231–236

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1920_5>

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota V del Corrispondente GINO FANO [1].

1. A seguito di quanto detto nella precedente Nota IV [2], esaminiamo ora il caso di una superficie del 4° ordine F^4 condotta nel modo più generale per una curva di genere 2 e ordine dispari $m = 2h - 1$ ($m \geq 5$, $h \geq 3$).

Per questa curva passa un sistema lineare di superficie di ordine h, non contenenti la F^4 come parte, di dimensione non inferiore a

$$\left\{\binom{h+3}{3} - 1\right\} - \left\{\binom{h-1}{3} - 1\right\} - 1 - \{h(2h-1) - 2 + 1\} = h + 2$$

le quali segano ulteriormente F^4 secondo un sistema, appunto ∞^{h+2}, di curve di ordine $2h+1$ e genere $h+2$. Perchè la C_2^{2h-1} stia, oltre che sopra F^4, anche in una F^{h-1} non contenente F^4 come parte, occorrono ancora, se $h > 3$, altre $h - 3$ condizioni.

La $C_2^{2h-1} \equiv \gamma$ e la sezione piana $\mathbf{C}$ costituiscono sopra F^4 una base di determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 2h-1 \\ 2h-1 & 4 \end{vmatrix} = -\{(2h-1)^2 - 8\};$$

base che sarà perciò minima, ogni qualvolta $(2h-1)^2 - 8$ non ammetta alcun divisore quadrato perfetto. Supponiamo per ora che così sia.

La determinazione delle reti di genere 2 esistenti sopra F^4 (del tipo $\lambda\gamma + \mu\mathbf{C}$) dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione:

$$(1) \qquad \lambda^2 + (2h-1)\lambda\mu + 2\mu^2 = 1;$$

e la determinazione delle eventuali curve razionali (di genere virtuale *zero*, e grado virtuale -2) dipende dall'altra equazione:

$$(2) \qquad \lambda^2 + (2h-1)\lambda\mu + 2\mu^2 = -1.$$

Per ogni soluzione intera di una delle due equazioni precedenti, sarà λ *dispari* (se no sarebbero pari tutti tre i termini del 1° membro), e, per

[1] Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1920.
[2] Questi Rendiconti, pag. 175.

conseguenza, μ *pari* (se no sarebbe di nuovo pari il 1° membro) (¹). Possiamo perciò applicare la sostituzione:

$$\lambda = t - (2h-1)u \qquad \mu = 2u$$

trasformando le (1) e (2) nell'equazione di Fermat-Pell (col doppio segno al 2° membro):

(3) $$t^2 - \{(2h-1)^2 - 8\} u^2 = \pm 1$$

della quale si dovranno cercare tutte le soluzioni intere, tali che la curva corrispondente

(4) $$\{t - (2h-1)u\} \gamma + 2u\mathrm{C}$$

risulti effettiva, vale a dire abbia l'ordine

$$\{t - (2h-1)u\}(2h-1) + 8u > 0 .$$

A questa condizione soddisfanno (come nella Nota prec.) le soluzioni per le quali t è positivo. Infatti la condizione indicata può scriversi

$$(2h-1)t - \{(2h-1)^2 - 8\} u > 0 ;$$

e si può verificare anzitutto ch'essa è soddisfatta se t, u sono entrambi positivi (²). Premesso questo, è chiaro ch'essa sarà pure soddisfatta conservando invariato t e cambiando di (solo) segno la u.

L'equazione (3) ha infinite soluzioni se al 2° membro si prende il segno $+$, e può invece averne o anche non averne quando vi si prenda il segno negativo. Poichè il coefficiente $(2h-1)^2 - 8$ è congruo, mod. 4, a $+1$, vi sono certo soluzioni, col segno negativo al 2° membro, se detto coefficiente è numero primo, mentre possono esservene o anche non esservene se $(2h-1)^2 - 8$ non è numero primo (³). I valori più piccoli di h pei quali $(2h-1)^2 - 8$ non è numero primo sono $h = 7, 8, 14, 15, \ldots$; per questi valori di h la (3), col segno negativo al 2° membro, *non* ammette soluzioni.

(¹) Anzi, nella (1) deve essere μ multiplo di 4; nella (2) invece μ semplicemente pari (non multiplo di 4). Perciò nella (3) sarà u pari o dispari (t invece rispett. dispari o pari), secondo che vi si prende il segno $+$ oppure il segno $-$.

(²) Dalla (3) emerge che, per t, u positivi, sarà $t < (2h-1)u$; se dunque, nel primo membro della (3) stessa, a uno dei due fattori t del primo termine sostituiamo la quantità maggiore $(2h-1)u$, renderemo positivo detto membro. Dopo di che, dividendo per u, si ha quanto richiesto.

(³) Legendre, *Théorie des nombres* (Paris, 1830), vol. 1°, pag, 65, come pure tavola X, nota alla fine del volume.

2. Supponiamo che la (3), sempre col segno negativo, ammetta soluzioni; e sia t_1, u_1 la più piccola sua soluzione positiva. Allora l'espressione

$$t_n + u_n\sqrt{D} = (t_1 + u_1\sqrt{D})^n \qquad (D = (2h-1)^2 - 8) \tag{5}$$

darà per valori dispari di n tutte le soluzioni intere positive della stessa equazione, e per valori pari di n quelle della stessa (3) col segno $+$ al 2° membro.

La soluzione t_1, u_1 conduce a una curva razionale

$$\gamma_1 \equiv \{t_1 - (2h-1)u_1\}\gamma + 2u_1 C \equiv 2u_1 C - \{(2h-1)u_1 - t_1\}\gamma$$

che si può effettivamente costruire sopra F^4, come residua di un gruppo di $(2h-1)u_1 - t_1$ curve γ rispetto al sistema multiplo secondo $2u_1$ delle sezioni piane. Invero, quest'ultimo sistema, essendo di genere $8u_1^2 + 1$, è anche di dimensione $8u_1^2 + 1$. Ora, la prima γ impone a una F^{2u_1} obbligata a contenerla $2u_1 \cdot (2h-1) - 1$ condizioni (al più); e, per le successive γ, questo numero diminuisce di due unità per volta; ricordando pertanto che la somma dei primi r numeri dispari vale r^2, le condizioni imposte a una F^{2u_1}, complessivamente, dalle $(2h-1)u_1 - t_1$ curve γ saranno (al più) in numero di

$$\begin{aligned} 2u_1 \cdot (2h-1)\{(2h-1)u_1 - t_1\} - \{(2h-1)u_1 - t_1\}^2 \\ = \{(2h-1)u_1 - t_1\}\{(2h-1)u_1 + t_1\} \\ = (2h-1)^2 u_1^2 - t_1^2 = 8u_1^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Esiste dunque certo una F^{2u_1}, non contenente F^4 come parte, e passante per $(2h-1)u_1 - t_1$ curve γ; e esiste quindi la curva, già riconosciuta come razionale, intersezione residua di tale F^{2u_1} con F^4. Insieme ad essa esisterà pure l'altra curva razionale $\{t_1 + (2h-1)u_1\}\gamma - 2u_1 C$, trasformata della prima mediante l'involuzione $I(t' = t\,,\, u' = -u)$, cui appartiene la rete $|\gamma|$. Tali curve saranno irriducibili; vedremo infatti che sopra F^4 tutte le altre curve di genere virtuale zero contengono o l'una o l'altra di queste come parte.

3. Le altre soluzioni positive t_n, u_n dell'equazione (3), essendo t_n, u_n definiti dalla (5), condurranno a curve

$$\gamma_n \equiv \{t_n - (2h-1)u_n\}\gamma + 2u_n C$$

di grado virtuale -2 oppure $+2$, perciò di genere virtuale *zero* oppure *due*, secondo che n è dispari o pari, e perciò secondo che si tratta di soluzioni della (3) col segno $-$ oppure col segno $+$ al 2° membro.

Per $n = 2$ si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \{t_2 - (2h-1)u_2\}\gamma + 2u_2 C \\ &= \{2t_1^2 + 1 - (2h-1)\cdot 2u_1 t_1\}\gamma + 2\cdot 2u_1 t_1 C = \gamma + 2t_1\gamma_1 = (\gamma + t_1\gamma_1) + t_1\gamma_1 \end{aligned}$$

vale a dire il sistema $|\gamma_2|$, di genere 2 e grado virtuale 2, risulta composto del sistema $|\gamma + t_1\gamma_1|$, di grado $2(t_1^2 + 1)$ e dimensione $t_1^2 + 2$, e di una parte fissa, multipla secondo t_1 della curva razionale γ_1, incontrata al n. prec., e colla quale la parte variabile $\gamma + t_1\gamma_1$ non ha alcun punto a comune (1).

Analogamente, per $n = 3$, si ha:

$$\gamma_3 = \{ t_3 - (2h - 1)\, u_3 \}\, \gamma + 2u_3\, \mathrm{C}$$
$$= \{ t_1 t_2 + \mathrm{D} u_1 u_2 - (2h - 1)\,(u_1 t_2 + u_2 t_1) \}\, \gamma + 2(u_1 t_2 + u_2 t_1)\, \mathrm{C}$$

dove $\mathrm{D} = (2h - 1)^2 - 8$. Raccogliendo il fattore t_2 nei termini che lo contengono, ponendo negli altri termini $u_2 = 2u_1 t_1$, e ricordando la (3), onde $\mathrm{D}u_1^2 = t_1^2 + 1$, si ricava:

$$\gamma_3 = 2t_1(\gamma + t_1\gamma_1) + t_2\gamma_1$$

ancora somma di un multiplo del sistema $|\gamma + t_1\gamma_1|$ e di una parte fissa, multipla della curva razionale γ_1, fondamentale per $|\gamma + t_1\gamma_1|$.

Dico ora che, in generale:

$$\gamma_n = \mathrm{A}_{n-1}(\gamma + t_1\gamma_1) + t_{n-1}\gamma_1$$

dove le A sono definite mediante la relazione ricorrente $\mathrm{A}_n = t_{n-1} + t_1\mathrm{A}_{n-1}$, coi valori iniziali $\mathrm{A}_0 = 0$, $\mathrm{A}_1 = 1$; perciò, per $n \geq 2$:

$$\mathrm{A}_n = t_{n-1} + t_{n-2}t_1 + t_{n-3}t_1^2 + \cdots + t_2 t_1^{n-3} + 2t_1^{n-1}$$

valore certamente positivo. Invero, essendo tali relazioni verificate per $n = 2$ e $n = 3$, basterà mostrare che sono verificate per l'indice $n + 1$, nell'ipotesi che lo siano per l'indice n. Ora:

$$\gamma_{n+1} = \{ t_{n+1} - (2h - 1)\, u_{n+1} \}\, \gamma + 2u_{n+1}\, \mathrm{C}$$
$$= \{ t_1 t_n + \mathrm{D} u_1 u_n - (2h - 1)\,(u_1 t_n + u_n t_1) \}\, \gamma + 2(u_1 t_n + u_n t_1)\, \mathrm{C}\,.$$

Raccogliendo il fattore t_n nei termini che lo contengono, e ricordando che $\mathrm{D}\, u_1 u_n - t_1 t_n = t_{n-1}$ (2), si ha:

$$\gamma_{n+1} = t_n\gamma_1 + t_{n-1}\gamma + t_1\gamma_n = t_n\gamma_1 + t_{n-1}\gamma + t_1 \{ \mathrm{A}_{n-1}(\gamma + t_1\gamma_1) + t_{n-1}\gamma_1 \}$$
$$= \mathrm{A}_n\gamma + t_1\mathrm{A}_n\gamma_1 + t_n\gamma_1 = \mathrm{A}_n(\gamma + t_1\gamma_1) + t_n\gamma_1$$

c. s. v. d. Tutti i sistemi $|\gamma_n|$ sono dunque somme di un multiplo del

(1) Si verifica infatti immediatamente che la curva γ_1 incontra le γ in $2t_1$ punti, e perciò le $\gamma + t_1\gamma_1$ in *zero* punti.

(2) Ciò si ricava infatti dalle due relazioni

$$t_n = t_{n-1}t_1 + \mathrm{D}u_{n-1}u_1\,,\; u_n = t_{n-1}u_1 + u_{n-1}t_1\,,$$

tenuto presente ancora che $t_1^2 - \mathrm{D}u_1^2 = -1$.

sistema $|\gamma + t_1\gamma_1|$ e di una parte fissa, multipla della curva razionale γ_1, fondamentale per $|\gamma + t_1\gamma_1|$.

Le rimanenti soluzioni dell'equazione (3), per le quali t è positivo e u negativo, conducono ai sistemi trasformati di questi ultimi mediante l'involuzione **I**.

Sulla superficie F^4 *non esistono dunque altre reti di genere* 2, *effettive e irriducibili, all'infuori della rete* γ (nè altre curve razionali, effettive e irriducibili, all'infuori di γ_1 e della sua trasformata mediante l'involuzione **I**).

Ogni trasformazione birazionale di F^4 *deve perciò mutare in sè stessa la rete* $|\gamma|$, unica rete effettiva, irriducibile, di genere 2, *e non può essere diversa dall'involuzione* **I**. La forma quadratica fondamentale di F^4, cioè il primo membro della (1), non ammette infatti altre sostituzioni lineari che trasformino in sè la coppia di valori $\lambda = 1$, $\mu = 0$ corrispondente alla rete $|\gamma|$, all'infuori dell'identità e della sostituzione involutoria $\lambda' = \lambda + (2h - 1)\mu$, $\mu' = -\mu$, immagine della **I**. Perchè vi fossero sopra F^4 altre trasformazioni, dovrebbe dunque esservi una proiettività non identica trasformante in sè ogni sistema lineare; il che non è possibile (per le stesse ragioni accennate alla fine del n. 3 della Nota IV).

4. Se invece, contrariamente all'ipotesi fatta al principio del n. 2, l'equazione (3), col segno negativo al 2° membro, *non* ammette soluzioni, vi saranno tuttavia egualmente soluzioni della stessa (3) col segno $+$ al 2° membro; e, in corrispondenza di queste, la (4) fornirà sistemi di grado virtuale $+2$. *Tali sistemi saranno certo tutti irriducibili, e saranno perciò effettive reti di genere* 2. Infatti, sopra F^4 non esistono in questo caso curve irriducibili di genere virtuale *zero* (perchè la (3), col segno negativo, non ammette soluzioni), nè di genere *uno* (perchè il discriminante

$$-\{(2h-1)^2 - 8\}$$

non è quadrato perfetto) [1]; perciò la curva generica di uno dei sistemi in parola, se riducibile, non potrebbe essere composta che di parti irriducibili, tutte di genere >1, appartenenti a sistemi almeno ∞^2, e perciò anche certo incontrantisi tutte a due a due in un numero di punti >0; e con tali parti, se in numero >1, non si possono formare che sistemi di genere >2.

Poichè la superficie F^4 contiene infinite reti effettive di genere 2, essa ammetterà tutte le involuzioni definite da queste singole reti; involuzioni che operano sopra queste reti in modo identico a quanto si è veduto nella Nota IV per le F^4 contenenti curve di genere 2 e di ordine pari, e che generano perciò un gruppo analogo.

(1) Severi, *Complementi alla teoria della base* ecc., n. 7.

Invero, l'involuzione I_1 cui appartiene la rete $|\gamma|$, composta di curve di ordine $2h-1$, determina sui sistemi lineari di F^4 la sostituzione $\gamma' = \gamma$, $\mathrm{C}' = (2h-1)\gamma - \mathrm{C}$, e sopra t, u la solita sostituzione $t' = t$, $u' = -u$. Indicando ora con t_1, u_1 la più piccola soluzione positiva della (3) (col segno $+$), e con t_2, u_2, ecc. le successive, l'involuzione I_2, cui appartiene la rete

$$|\delta| \equiv \{t_1 - (2h-1)u_1\}\gamma + 2u_1\mathrm{C} \tag{6}$$

(che è composta di curve di ordine $t_1(2h-1) - \mathrm{D}u_1$) muterà, per analogia, il sistema $|\mathrm{C}|$ delle sezioni piane nel sistema

$$\mathrm{C}'' = \{t_1(2h-1) - \mathrm{D}u\}\,\delta - \mathrm{C}$$

$$= \{t_1(2h-1) - \mathrm{D}u_1\}\,\{t_1 - (2h-1)u_1\}\,\gamma + \{2u_1[t_1(2h-1) - \mathrm{D}u_1] - 1\}\,\mathrm{C}$$

che, con opportune riduzioni, assume la forma

$$\mathrm{C}'' = \{(2h-1)t_2 - (\mathrm{D}+4)u_2\}\,\gamma - (t_2 - (2h-1)u_2)\,\mathrm{C}.$$

D'altra parte l'involuzione I_2, mentre muta γ e C in nuove curve γ'' e C'', lascia invariate le δ, e perciò il 2° membro della (6); scrivendo pertanto:

$$\{t_1 - (2h-1)u_1\}\,\gamma'' + 2u_1\mathrm{C}'' = \{t_1 - (2h-1)u_1\}\,\gamma + 2u_1\mathrm{C}$$

e tenendo conto dell'espressione già trovata per C'', si ricava

$$\gamma'' = \{t_2 - (2h-1)u_2\}\,\gamma + 2u_2\mathrm{C}.$$

La rete $|\gamma| \equiv (t_0, u_0)$ è dunque scambiata dall'involuzione I_2 colla rete (t_2, u_2), come avveniva nella Nota IV; e si riconosce pure facilmente, per induzione da n a $n+1$, che la stessa involuzione scambia fra loro, anche nel caso presente, tutte le coppie di reti del tipo $(t_{n-2}, -u_{n-2})$ e (t_n, u_n). Le reti di genere 2 esistenti sulla F^4 ora in esame si distribuiranno perciò, come nella Nota IV, in due successioni, sulle quali le involuzioni I_1 e I_2 e loro prodotti opereranno nello stesso modo della Nota cit.; nè, all'infuori di questi prodotti, la F^4 ammetterà altre trasformazioni birazionali.

Alle F^4 considerate nella presente Nota sono pure applicabili le considerazioni svolte alla fine della Nota prec.; è a ritenersi perciò che l'ipotesi, anche qui introdotta al n. 1, che la base (γ, C) sia minima, non implichi alcuna restrizione ulteriore; sia cioè verificata ogni qualvolta la F^4 sia condotta nel modo più generale per una curva di genere 2 e ordine $2h-1$.