GINO FANO

# Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali. Nota IV

*Rendiconti Acc. Naz. Lincei*, Serie 5, Vol. **292** (1920), p. 175–182

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1920_4>

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.


---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

---

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota IV del Corrispondente Gino Fano [1].

1. Le superficie del 4° ordine assoggettate alla sola condizione di contenere una curva irriducibile di genere (virtuale) 2 e ordine assegnato $m\,(\geqq 4)$, e perciò tutta una rete di curve consimili, incontrantisi a due a due nelle coppie di una involuzione **I**, presentano già per i valori più piccoli dell'ordine $m$ due casi essenzialmente diversi.

Per $m=4$ la superficie ha un punto doppio, e ammette come *unica* trasformazione birazionale la stessa involuzione **I** (in questo caso segata dalle rette uscenti dal punto doppio), mentre le $\infty^2$ quartiche di genere 2 sono segate dai piani per questo punto [2]. Anche per $m=5, 7, 9\,\ldots$ l'involuzione **I** è l'unica trasformazione birazionale sopra $F^4$, nè vi sono sopra $F^4$ altre reti irriducibili di genere 2: per $m=5$, la $F^4$ contiene una cubica sghemba, le $C_2^5$ sono segate dalle quadriche passanti per questa cubica, e le coppie della **I** dalle corde della cubica stessa.

Invece per $m=6$ la $F^4$ contiene, oltre la data rete di sestiche, una seconda rete analoga, residua della prima rispetto a superficie del 3° ordine,

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1920.

(2) Cfr. la precedente mia Nota III (questi Rendiconti, pag. 113); nota a piè di pagina, alla fine del n. 2.

e appartenente a una diversa involuzione; e queste due involuzioni generano sopra $F^4$ un gruppo infinito, che è il gruppo birazionale totale della superficie ([1]). Allo stesso risultato si perviene per ogni valore di $m$ pari e $> 6$, come sarà mostrato nella presente Nota ([2]).

La differenza fra i due tipi di $F^4$ non è però inerente, come potrebbe sembrare, o almeno non è inerente *soltanto* all'essere $m$ rispett. dispari o pari (fatta eccezione pel valore pari minimo $m = 4$), perchè anche per taluni valori dispari di $m$ (13, 15, 27, 29, ...) si hanno $F^4$ con ulteriori reti irriducibili di genere 2, e perciò con infinite trasformazioni birazionali.

La determinazione delle reti di genere 2 e perciò di grado (virtuale) 2 esistenti sulla proposta $F^4$ dipende dalla risoluzione in numeri interi di una equazione di Fermat-Pell $t^2 - Du^2 = 1$, la quale, essendo $D > 0$, ha infinite soluzioni. Ma può avvenire che questi sistemi di genere (virtuale) 2, all'infuori della prima rete di $C^m$, siano tutti *riducibili* (composti di un sistema di genere e dimensione $\geq 2$, più una sua curva fondamentale, come parte fissa); e ciò avviene precisamente quando la $F^4$ contiene una curva razionale (per $m = 4$, il punto doppio), la quale, contata eventualmente più volte, costituisce questa parte fissa; vale a dire quando è risolubile in numeri interi l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ (collo stesso D). Questo, se $m$ è pari, avviene solo per $m = 4$. Invece, se $m$ è dispari ($\geq 5$), nel qual caso $D = m^2 - 8$, l'equazione $t^2 - Du^2 = -1$ ammette certo soluzioni se $D = m^2 - 8$ è numero primo; allora, sopra $F^4$, le $C^m$ sono le sole curve irriducibili di genere virtuale 2, e l'involuzione **I** è l'unica trasformazione birazionale; mentre se $m^2 - 8$ non è numero primo, l'equazione accennata può non avere o anche avere soluzioni ([3]).

Al caso di $m$ dispari verrà dedicata una prossima Nota. Aggiungo infine che tali considerazioni sono facilmente estendibili alle superficie di ge-

([1]) Superficie segnalata da me nel 1906 (Rend. R. Ist. lombardo, serie 2ª, vol. 39, pag. 1071), e il cui gruppo venne determinato in modo completo dal Severi [*Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica,* Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. 30 (1910), pag. 265].

([2]) La presente Nota estende ad $m$ pari qualunque, con lievi modificazioni, la trattazione data dal Severi pel caso $m = 6$. Sul caso successivo $m = 8$ ho trovato un cenno, non però la determinazione del gruppo totale, in una Memoria recente di Sharpe e Snyder, venuta a mia conoscenza dopo la compilazione di questo lavoro [*On certain types of involutorial space transformations,* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 21 (1920), pag. 52; ved. in part. pag. 60].

([3]) Legendre, *Théorie des nombres* (Paris, 1830), vol. I, pag. 65, come pure tav. X, nota alla fine del volume. Per $m$ dispari, $m^2 - 8$ è certo del tipo $4n + 1$ ($n$ intero), e non divisibile nè per 3 nè per 5; può essere bensì divisibile per 7, ed è tale per i valori sopracitati $m = 13, 15, 27, 29$. Per questi valori di $m$, l'equazione

$$t^2 - (m^2 - 8)\, u^2 = -1$$

*non* ammette soluzioni intere.

nere uno di spazî superiori ($F^{2\pi-2}$ di $S_\pi$, a sezioni di genere $\pi$, vincolate del pari a contenere una curva di genere 2).

2. Consideriamo una $F^4$ condotta nel modo più generale per una curva di genere 2 e di ordine qualsiasi pari $m = 2k$ ($k \geq 3$). Per la $F^4$, il dover contenere una tal curva (come una qualsiasi curva che non sia sua intersezione completa con altra superficie) è condizione semplice; essa dipenderà perciò da 33 parametri (18 moduli). Per la $C_2^{2k}$ passerà un sistema lineare di superficie di ordine $k$, non contenenti la $F^4$ come parte, di dimensione non inferiore a

$$\left\{\binom{k+3}{3}-1\right\}-\left\{\binom{k-1}{3}-1\right\}-1-\left\{k\cdot 2k-2+1\right\}=2.$$

Perciò la $C_2^{2k}$ si potrà certo ottenere come intersezione di $F^4$ con una $F^k$, avendo come residua un'altra rete di $C_2^{2k}$ (in generale anche irriducibili). Siccome tali $C_2^{2k}$ dipenderanno, in $S_3$, al più da $33+2=35$ parametri, così, se $4\cdot 2k > 35$, ossia $k > 4$, le $C_2^{2k}$ contenute in $F^4$ saranno curve particolari, fra quelle di ordine $2k$ e genere 2 in $S_3$.

La prima $C_2^{2k}$ (che indicheremo con $\gamma$) è una sezione piana $C$ costituiranno sopra $F^4$ una base di determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 4 \end{vmatrix} = -4(k^2-2);$$

perciò una base certo minima ogni qualvolta $k^2-2$ non sia divisibile per alcun numero quadrato perfetto (¹). *Noi supporremo qui che la base* $(\gamma, C)$ *sia minima*, riservandoci di esaminare in seguito l'ipotesi opposta (²).

La determinazione delle reti $|\lambda\gamma + \mu C|$ di genere 2, perciò anche di grado (virtuale) 2, esistenti sopra $F^4$ dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione:

$$\lambda^2 + 2k\cdot\lambda\mu + 2\mu^2 = 1$$

la quale, mediante la sostituzione

$$\lambda = t - ku \qquad \mu = u$$

si muta nell'equazione di Fermat-Pell:

$$(1) \qquad t^2 - (k^2-2)\,u^2 = 1 .$$

(¹) Invero, in tal caso l'unico numero quadrato perfetto e divisore di D sarebbe il 4. Ora il determinante di una qualsiasi base sopra $F^4$, essendo simmetrico e avendo come elementi principali numeri pari, deve essere congruo, mod. 4, a *zero* oppure *tre*; mentre invece $D:4 = -(k^2-2)$ è congruo a *due*, oppure *uno*.

(²) Cfr. la nota alla fine del lavoro. Si osservi fin d'ora che $k^2-2$ non può essere divisibile nè per 3, nè per 4, nè per 5. Può essere divisibile per 7, e anche per $7^2$; il minimo valore di $k$ pel quale ciò avviene è $k=10$.

Le reti di genere 2 sono date perciò dalle combinazioni

$$(t-ku)\gamma+u\mathrm{C} \tag{2}$$

colla condizione (1), avvertendo inoltre che *t deve sempre essere positivo.* Infatti l'ordine delle curve (2) è $(t-ku)\,2k+4u$, e deve essere positivo; da ciò segue $t>\frac{k^2-2}{k}u$; per conseguenza, se $t<0$, sarà anche $u<0$, colla condizione $|t|<\frac{k^2-2}{k}|u|$, la quale è incompatibile colla (1) [1].

La più piccola soluzione intera positiva della (1) è data da $t=k^2-1$, $u=k$. Questa è infatti una soluzione della (1); e d'altra parte la (1) stessa può scriversi:

$$t^2=(ku-1)^2+2u(k-u)$$

dove l'ultimo termine, se $0<u<k$, è positivo. Ora il quadrato inferiore e più prossimo a $(ku-1)^2$ è $(ku-2)^2$, che ne differisce per $2ku-3$, numero certo superiore all'ultimo termine della relazione precedente (almeno se $u>1$; mentre per $u=1$ si avrebbe l'assurdo, in numeri interi positivi, $t^2=k^2-1$).

Per $t=1$, $u=0$ si ha la rete $|\gamma|$; per $t=k^2-1$, $u=k$ si ha la rete $|\delta|=|k\mathrm{C}-\gamma|$, residua di $|\gamma|$ rispetto a superficie $\mathrm{F}^k$.

*La superficie* $\mathrm{F}^4$ *non contiene curve razionali.* Tali curve essendo di grado virtuale $-2$, la loro determinazione dipende infatti dalla risoluzione dell'equazione

$$\lambda^2+2k\cdot\lambda\mu+2\mu^2=-1 \quad \text{e perciò} \quad t^2-(k^2-2)\,u^2=-1.$$

Ora, se quest'ultima equazione ammettesse soluzioni intere, indicando con $t^\star$, $u^\star$ la più piccola sua soluzione intera positiva, l'espressione

$$t_n+u_n\sqrt{\mathrm{D}}=(t^\star+u^\star\sqrt{\mathrm{D}})^n \qquad (\mathrm{D}=k^2-2)$$

darebbe per $t_n$, $u_n$ tutte le altre soluzioni intere positive della stessa equazione, se $n$ dispari; e tutte quelle della (1), se $n$ pari. Dovrebbe essere quindi, per $n=2$,

$$t_2\equiv k^2-1=t^{\star 2}+(k^2-2)\,u^{\star 2};$$

relazione che, nel campo intero positivo, ammette l'unica soluzione $t^\star=u^\star=1$, la quale, se $k\geqq 3$, non soddisfa però alla

$$t^2-(k^2-2)\,u^2=-1.$$

[1] Dalle due relazioni $|t|<\frac{k^2-2}{k}|u|$ , $|t|>\sqrt{k^2-2}\cdot|u|$ seguirebbe infatti $\frac{k^2-2}{k}>\sqrt{k^2-2}$, e perciò, elevando a quadrato e riducendo, $k^2-2>k^2$; il che è assurdo.

3. Indichiamo con $I_1$, $I_2$ le due involuzioni di coppie di punti sopra $F^4$ a cui appartengono rispett. le due reti $|\gamma|$ e $|\delta|$. L'involuzione $I_1$ opera sui parametri $t, u$, sui parametri $\lambda, \mu$, e sopra i sistemi di curve di $F^4$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} t' = t \\ u' = -u \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda' = \lambda + 2k\cdot\mu \\ \mu' = -\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma' = \gamma \\ C' = 2k\cdot\gamma - C. \end{cases}$$

La $I_2$ lascia invariata la rete $|\delta|$, e muta, per analogia, $|C|$ in $|2k\cdot\delta - C|$, dove $|\delta| = |kC - \gamma|$. Di qui si ricava ch'essa opera sui sistemi di curve di $F^4$ secondo la sostituzione:

$$\begin{cases} \gamma'' = -(2k^2-1)\gamma + 2k(k^2-1)C \\ C'' = -2k\cdot\gamma + (2k^2-1)C \end{cases}$$

e, per conseguenza, sui parametri $t$ ed $u$ nel modo seguente:

$$(3)\quad \begin{cases} t'' = \{(k^2-1)^2 + k^2(k^2-2)\}t - 2k(k^2-1)(k^2-2)u \equiv t_2 t - (k^2-2)u_2 u \\ u'' = 2k(k^2-1)\cdot t - \{(k^2-1)^2 + k^2(k^2-2)\}u \equiv u_2 t - t_2 u \end{cases}$$

designando con $t_2$, $u_2$ la soluzione intera positiva della (1) immediatamente superiore alla prima ($t_1 = k^2 - 1$, $u_1 = k$: onde $t_2 = t_1^2 + (k^2-2)u_1^2$, $u_2 = 2\,t_1\,u_1$). Indicando poi con $t_n$, $u_n$ la soluzione positiva della (1) per cui

$$(4)\qquad t_n + u_n\sqrt{k^2-2} = (t_1 + u_1\sqrt{k^2-2})^n$$

e designando le singole reti di genere 2 sopra $F^4$ coi simboli $(t_n, u_n)$, $(t_n, -u_n)$, dove $u_n$ s'intenderà sempre positivo, si vede ancora che l'involuzione $I_1$ scambia fra loro le reti $(t_n, u_n)$ e $(t_n, -u_n)$, lasciando invariata la $|\gamma| = (1, 0)$, mentre l'involuzione $I_2$ scambia le due reti $(t_n, u_n)$ e $(t_{n-2}, -u_{n-2})$, lasciando invariata la $|\delta|$. Infatti le formole (3), ponendo $t_{n-2}$ e $-u_{n-2}$ in luogo rispett. di $t$ ed $u$, dànno:

$$\begin{cases} t'' = t_2\,t_{n-2} + (k^2-2)\,u_2\,u_{n-2} = t_n \\ u'' = u_2\,t_{n-2} + t_2\,u_{n-2} = u_n; \end{cases}$$

Questi risultati valgono anche per indici negativi, intendendo pure $t_{-n} + u_{-n}\sqrt{k^2-2}$ definito dalla (4); eguale perciò al valore reciproco di $t_n + u_n\sqrt{k^2-2}$, cioè $t_n - u_n\sqrt{k^2-2}$ (vale a dire $t_{-n} = t_n$, $u_{-n} = -u_n$). In particolare dunque alla rete $|\delta| \equiv (t_1, u_1)$ corrisponde la rete $(t_{-1} = t_1, -u_{-1} = u_1)$, cioè ancora $|\delta|$ stessa.

Le reti di genere 2 esistenti sopra F si potranno dunque distribuire nelle due successioni:

I $\quad \gamma \equiv (t_0, u_0), (t_2, u_2), (t_2, -u_2), (t_4, u_4), (t_4, -u_4), \ldots \quad (t_{2p}, u_{2p}), (t_{2p}, -u_{2p}), \ldots$

II $\quad \delta \equiv (t_1, u_1), (t_1, -u_1), (t_3, u_3), (t_3, -u_3), \ldots (t_{2p-1}, u_{2p-1}), (t_{2p-1}, -u_{2p-1}), \ldots$

tali che, entro la prima successione, ogni rete di posto pari sarà scambiata dall'involuzione $I_1$ colla rete successiva (la prima restando invariata), e dall'involuzione $I_2$ colla precedente. Analogamente avverrà per la seconda successione, leggendo $I_2$ al posto di $I_1$, e viceversa. Con un conveniente prodotto di involuzioni $I_1$ e $I_2$ si potrà perciò trasformare una qualsiasi delle reti considerate in qualunque altra della medesima successione. L'involuzione cui appartiene ad es. la rete $(t_{2p}, u_{2p})$ risulta dal prodotto $(I_2 I_1)^{2p-1} \cdot I_2$. Reti di egual posto $p$ nelle due successioni si compongono di curve dello stesso ordine, mutuamente residue, sopra $F^4$, rispetto a superficie di ordine $u_p - u_{p-1}$.

Da quanto precede, si può già dedurre che le involuzioni $I_1$ e $I_2$ generano, coi loro prodotti, il gruppo totale delle trasformazioni birazionali di $F^4$. Infatti una qualsiasi trasformazione sopra $F^4$, che indicheremo con $\Gamma$, muterà la rete $|\gamma|$ anche in una rete di genere 2. Se questa appartiene alla successione I), esisterà un prodotto $\Pi$ di involuzioni $I_1, I_2$ che muterà di nuovo quest'ultima rete in $|\gamma|$; il prodotto $\Gamma \cdot \Pi$ lascerà dunque invariata la rete $|\gamma|$; e poichè le reti $|\delta| = (t_1, u_1)$ e $(t_1, -u_1)$, scambiate fra loro da $I_1$, sono le sole che segnino sulle curve $\gamma$ gruppi di $2k^2 - 2$ punti [1], moltiplicando eventualmente ancora il prodotto $\Gamma \cdot \Pi$ per $I_1$ avremo un'operazione che lascerà invariate entrambe le reti $|\gamma|$ e $|\delta|$, perciò la loro somma $|k\mathrm{C}|$, e perciò ancora $|\mathrm{C}|$: dunque una trasformazione proiettiva, che lascerà anzi invariato *ogni* sistema lineare sopra $F^4$. Ed è facile convincersi che una tale trasformazione non può essere che l'identità [2].

Del pari, se la trasformazione $\Gamma$ muta la rete $|\gamma|$ in una rete della successione II), esisterà un analogo prodotto $\Gamma \cdot \Pi$ trasformante $|\gamma|$ in $|\delta|$; e $|\delta|$ in una rete le cui curve incontrano le $\delta$ stesse in $2k^2 - 2$ punti, la quale nuova rete, applicando eventualmente ancora la $I_2$, si può ottenere sia $|\gamma|$. Si avrà così un'operazione, la quale, scambiando le reti $|\gamma|$ e $|\delta|$, lascerà invariato il sistema lineare $|k\mathrm{C}|$, loro somma, e sarà quindi di nuovo una proiettività; il che è da escludersi, perchè il quadrato di questa proiettività sarebbe l'identità, la proiettività stessa perciò involutoria, e $F^4$ dipenderebbe da 11 moduli al più.

[1] Ogni rete di genere 2 è infatti del tipo $(t - ku)\gamma + u\mathrm{C}$; e le sue curve incontrano le $\gamma$ in un numero di punti eguale a $(t - ku) \cdot 2 + u \cdot 2k = 2t$. Dovendo tale numero risultare eguale a $2k^2 - 2$, sarà $t = k^2 - 1 = t_1$; $u = \pm u_1$.

[2] Rappresentando $F^4$, mediante la $I_1$, sul piano doppio con sestica di diramazione, si avrebbe in questo piano un'omografia trasformante in sè la detta sestica; e con considerazioni analoghe a quelle usate dal Severi per il caso di un'omografia involutoria (*Complementi* ecc., n. 12), si può concludere che, se quell'omografia non è identica, la sestica deve dipendere da un numero di moduli inferiore all'attuale (18). Le sestiche piane che ammettono trasformazioni omografiche periodiche si trovano anche enumerate in un lavoro di J. Voitek (Sitzungsber. d. Kön. Böhmischen Ges. d. Wiss., Math.-Naturw. Klasse, 1913, XIII).

4 Le trasformazioni birazionali della superficie $F^4$ si rispecchiano in sostituzioni lineari intere di modulo $\pm 1$ della forma quadratica fondamentale di $F^4$ (che scriviamo liberata dal fattore numerico 2):

$$f \equiv \lambda^2 + 2k \cdot \lambda\mu + 2\mu^2 .$$

Le sostituzioni di modulo $+1$ che mutano in sè la $f$ sono tutte del tipo $\begin{pmatrix} t - ku\ , & -2u \\ u\ , & t + ku \end{pmatrix}$, dove $t, u$ sono soluzioni della (1), e $t$ può supporsi positivo; esse formano un gruppo ciclico, costituito dalle potenze della sostituzione corrispondente alla più piccola soluzione positiva della (1), $t = k^2 - 1$ , $u = k$; dunque dalle potenze della sostituzione:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2k \\ k & 2k^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Le sostituzioni di modulo $-1$ si ottengono dalle precedenti, moltiplicandole per una qualsiasi, determinata ma arbitraria, fra esse; ad es. per la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è immagine dell'involuzione $I_1$ ($\lambda' = \lambda + 2k\mu$ , $\mu' = -\mu$); questi prodotti sono anche tutti operazioni involutorie.

La $I_2$ (cfr. n. 3) ha per immagine la sostituzione lineare

$$S' = \begin{pmatrix} -(2k^2 - 1) & -2k \\ 2k(k^2 - 1) & 2k^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Al prodotto $I_1 I_2$ corrisponde perciò la sostituzione

$$I_1 I_2 = \begin{pmatrix} 1\ , & 2k \\ 0\ , & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(2k^2 - 1)\ , & -2k \\ 2k(k^2 - 1)\ , & 2k^2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(2k^2 - 1)\ , & -4k(k^2 - 1) \\ 2k(k^2 - 1)\ , & (2k^2 - 1)^2 - 2k^2 \end{pmatrix} = T^2 .$$

Vediamo così che il gruppo totale delle trasformazioni birazionali di $F^4$, generato dalle involuzioni $I_1$ e $I_2$, si rispecchia (come già noto per $k = 3$) nel gruppo di sostituzioni lineari di $f$ costituito dalle sole potenze pari di $T$, e dai loro prodotti per la $S$. Le potenze dispari di $T$ e i loro prodotti per sostituzioni di modulo $-1$ *non* sono immagini di trasformazioni birazionali sopra $F^4$ (1) (2).

(1) Per es. la sostituzione lineare $TS' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ corrisponderebbe a un'omografia involutoria scambiante le 2 reti $|\gamma|$ e $|\delta|$; scambio che, come sappiamo, non è possibile.

(2) Accenniamo ora quali modificazioni subirebbe ciò che abbiamo detto sin qui, nel caso in cui le curve $\gamma$ e $C$ non costituissero sopra $F^4$ una base minima (il che po-

trebbe avvenire soltanto quando il numero $k^2 - 2$ ammetta un divisore quadrato perfetto).

La superficie $F^4$ in parola conterrà pur sempre tutte le reti di genere 2 che abbiamo costruite, e ammetterà tutte le trasformazioni birazionali prodotti di fattori $I_1$ e $I_2$; soltanto, essendovi sulla superficie anche curve non rappresentabili sotto la forma $\lambda\gamma + \mu C$ (perchè la base $\gamma, C$ non è minima), vi potrebbero essere anche altre reti di genere 2 e altre trasformazioni birazionali. (Il gruppo ottenuto sulla $F^4$ sarebbe dunque soltanto parziale, come sarebbe stato ad es. sulla precedente $F^4$ quello generato, anzichè da $I_1$ e $I_2$, dalle due involuzioni $I_1 I_2 I_1$ e $I_2 I_1 I_2$). In tal caso cambierà, in relazione alla nuova base minima, anche la forma fondamentale della superficie, e diverrà più ampio il gruppo ciclico delle corrispondenti sostituzioni di modulo $+1$; alla $T$ verrà sostituita un'altra operazione generatrice, di cui essa sarà potenza di esponente finito e $> 1$; e per la nuova equazione di Fermat-Pell, che subentrerà alla (1), si avrà una soluzione positiva minima, corrispondente sopra $F^4$ a una rete di genere 2 di ordine minore delle precedenti.

Ora, se la proposta $F^4$ è stata condotta per una $C_2^m$ *nel modo più generale*, non sembra ammissibile ch'essa debba contenere, di conseguenza, anche curve di genere 2 e di ordine $< m$. Invero, si consideri un fascio generico di superficie del 4° ordine. In questo fascio vi sarà un numero finito di $F^4$ contenenti una $C_2^m$ (condizione *semplice* per la $F^4$), e perciò una rete di tali curve. Il numero di tali $F^4$ è quello stesso delle $C_2^m$ che si appoggiano alla curva $\Gamma^{16}$, base del fascio, in $4m$ punti, e inoltre soddisfano a due condizioni ulteriori, atte a individuare la $C_2^m$ entro la propria rete; per es. si appoggiano a 2 assegnate trisecanti della $\Gamma^{16}$ (che sono unisecanti per le superficie del fascio). Ora questo numero è funzione di $m$, e certo crescente al crescere di $m$ stesso: perciò, nel fascio considerato, le $F^4$ contenenti curve $C_2^m$ saranno in numero superiore a quelle contenenti curve di genere 2 e di un qualsiasi ordine assegnato $< m$, e le prime non potranno contenere, come conseguenza necessaria, anche una curva di ordine assegnato $< m$; perciò nemmeno di un ordine qualsiasi $< m$ (perchè, esclusa la prima eventualità, questa seconda potrebbe presentarsi solo se le $C_2^m$ di $S_3$ più generali contenute in una $F^4$ formassero più sistemi continui separati; il che nemmeno sembra verosimile). Si è perciò condotti a ritenere che l'eccezione, prevista come possibile pel caso in cui $k^2 - 2$ (essendo $k = m/2$) ammetta un divisore quadrato perfetto, in realtà non si presenti; e perciò la $F^4$ condotta *nel modo più generale* per una curva di genere 2 e ordine pari $m = 2k$, corrisponda per ogni valore di $k (\geq 3)$, al tipo studiato nella presente Nota, dipendente da 18 moduli, e dall'intero arbitrario $k \geq 3$.