Gino Fano

Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali. Nota III

Rendiconti Acc. Naz. Lincei, Serie 5, Vol. **292** (1920), p. 113–118

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1920_3>

Matematica. — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota III del Corrispondente GINO FANO [1].

1. La presente Nota è dedicata alla superficie del 4° ordine più generale, F^4, contenente un punto doppio O e una retta r passante per questo punto (superficie dipendente da 17 moduli). Anche questa superficie, come quella oggetto delle due Note precedenti [2], non ammette trasformazioni proiettive. Invero, una trasformazione così fatta non potrebbe lasciare fissi tutti i punti della retta r, perchè sarebbero allora invarianti anche le singole cubiche γ segate sopra F^4 dai piani per r; mentre invece una cubica piana non ammette trasformazioni proiettive aventi come punti uniti tutti i punti di una retta *generica* del suo piano (quale è appunto la r per le γ). Sulla r (certo unita) verrebbe dunque subordinata una proiettività ciclica, per la quale sarebbe O un punto unito; e poichè nel fascio $|\gamma|$ vi sono *due* cubiche tangenti a r fuori di O, queste due dovrebbero venire scambiate fra loro, e così i loro punti di contatto con r. Il quadrato di questa (supposta) omografia determinerebbe dunque l'identità sopra r, e perciò anche sopra F^4; l'omografia stessa sarebbe dunque involutoria, il che non è possibile, in quanto F^4 dovrebbe allora dipendere da soli 11 moduli al più [3].

Il gruppo delle trasformazioni birazionali di F^4 si rispecchierà pertanto in un gruppo oloedricamente isomorfo di sostituzioni lineari della forma fondamentale della superficie.

La superficie F^4, essendo condotta nel modo più generale per il punto O, che si suppone doppio per essa, e per la retta r, conterrà soltanto curve composte mediante le sezioni piane, il punto doppio (considerato come curva d razionale, di ordine zero, e grado -2), e la retta r. Introducendo nella base, in luogo delle sezioni piane C, le cubiche $\gamma \equiv C - d - r$, segate dai piani per r, il determinante della base (d, r, γ) sarà

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14 .$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1920.

[2] Ved. questi Rendiconti, 1° sem. 1920 (vol. 29), pp. 408 e 485. A queste Note rinvio per la citazione precisa delle Memorie qui richiamate in modo abbreviato.

[3] Severi, *Complementi* ecc., n. 12, *b*).

La detta base è dunque intermediaria, e perciò minima, non avendo il numero 14 nessun divisore >1 e quadrato perfetto. Ogni curva di F^4 potrà esprimersi mediante una combinazione $xd + yr + z\gamma$, per valori intèri (positivi, negativi, o nulli) di x, y, z. Notiamo in particolare che le curve $\gamma + r \equiv C - d$ sono le quartiche di genere 2 segate dai piani passanti per il punto doppio.

La forma fondamentale della superficie è

$$f \equiv -2x^2 - 2y^2 + 2xy + 2xz + 4yz. \tag{1}$$

2. Sulla superficie F^4 si possono facilmente assegnare *due* trasformazioni birazionali:

a) L'involuzione I risultante dalla proiezione doppia di F^4 dal punto doppio O. Questa trasformazione muta in sè stessa ogni cubica γ, nonchè la retta r; e fa corrispondere all'intorno (d) del punto doppio O la curva intersezione di F^4 col cono quadrico ad essa tangente in O medesimo, all'infuori della r (che di tale intersezione è parte). Poichè quest'intersezione, compresa anche la r, è espressa da $2(C - d) - d \equiv 2(r + \gamma) - d$, l'involuzione I opererà sulle curve di F^4 e, conseguentemente, sulle x, y, z nel modo seguente:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} d' = -d + r + 2\gamma \\ r' = \qquad\quad r \\ \gamma' = \qquad\qquad \gamma \end{array} \right. \qquad\qquad (2')\ [1] \left\{ \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = \quad x + y \\ z' = \quad 2x \qquad + z \end{array} \right.$$

b) Una trasformazione non ciclica S sopra le singole cubiche γ, costruita in modo analogo alle $\boldsymbol{\Gamma}_1$ e $\boldsymbol{\Gamma}_2$ delle due Note precedenti. Essendo razionalmente noti, sopra ogni γ, il punto O (doppio per F^4) e la coppia di punti A, B intersezioni ulteriori con r, sarà ivi definita la trasformazione:

$$P' \equiv P + 2 \cdot O - (A + B).$$

Applicando tale trasformazione, sopra ogni γ, al punto ivi segato dall'intorno d del punto doppio, e ai 2 punti segati da r, si vede che le curve d'' e r'', trasformate rispett. di d e di r, potranno differire rispett. da $d + 2d - r \equiv 3d - r$ e da $r + 4d - 2r \equiv 4d - r$ solo per multipli di γ; sarà cioè:

$$d'' = 3d - r + k\gamma \qquad\qquad r'' = 4d - r + i\gamma$$

dove i coefficienti incogniti k, i potranno determinarsi in base alla proprietà che tanto d'' quanto r'' devono essere (come d ed r) di grado virtuale -2. Si ricava $k = 12$, $i = 10$. La S opererà pertanto sulle curve di F^4 e

[1] Interpretando le x, y, z come coordinate proiettive omogenee nel piano, la $(2')$ è l'omologia armonica di asse $x = 0$ e centro $(-2, 1, 2)$.

rispett. sulle x, y, z nel modo seguente:

$$(3)\ \begin{cases} d'' = 3d - r + 12\gamma \\ r'' = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma'' = \gamma \end{cases} \qquad (3')\ \begin{cases} x'' = 3x + 4y \\ y'' = -x - y \\ z'' = 12x + 10y + z \end{cases}$$

Dimostreremo che sopra F^4 non esistono altre trasformazioni birazionali all'infuori di quelle composte mediante I ed S (1) (2).

3. Vediamo ora se sulla superficie F^4 esistano altre curve ellittiche, effettive e irriducibili, all'infuori delle cubiche γ. A tal uopo, occorre anzitutto trovare le soluzioni intere dell'equazione $f = 0$, ossia:

$$x^2 + y^2 - xy - xz - 2yz = 0.$$

(1) La trasformazione determinata da **S** sopra ogni singola γ è il prodotto della **I** per l'altra involuzione che ivi risulta dalla proiezione doppia fatta dal punto tangenziale di O (anch'esso razionalmente noto). Perciò, anche sopra F^4, la **S** è il prodotto di **I** per un'altra involuzione; e il gruppo complessivo di F^4 si potrà generare anche con queste due involuzioni.

(2) Si può riconoscere facilmente che invece *Sulla* F^4 *più generale contenente un (solo) punto doppio* (non contenente perciò nessuna curva effettiva, all'infuori delle intersezioni complete con altre superficie) *non vi sono altre trasformazioni birazionali all'infuori dell'involuzione che risulta dalla proiezione della superficie stessa dal punto doppio.* Sopra tale superficie, una base minima è costituita dal punto doppio d e dalle sezioni piane δ condotte per esso (di genere 2); il determinante di questa base vale infatti -8, e ammette perciò come unico divisore quadrato perfetto il 4; mentre il determinante di altra base, essendo anche del tipo $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ con a_{11}, a_{22} pari, non potrebbe in nessun caso assumere il valore $-8:4 = -2$. Dico che, sopra questa F^4, la rete $|\delta|$ è la sola rete di curve effettive, irriducibili, di genere 2. Invero, la determinazione di queste reti, di grado virtuale anche 2, e del tipo $x\delta + yd$, dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione $x^2 + 2xy - y^2 = 1$; la quale, mediante la sostituzione $x = t - u$, $y = u$, si trasforma nell'equazione di Fermat-Pell:

$$t^2 - 2u^2 = 1. \tag{1}$$

Le reti di genere 2 sono date perciò dalle combinazioni $(t-u)\delta + ud$, colla condizione (1); avvertendo inoltre che si avranno curve effettive (ossia di ordine > 0) solo per $t > u$, e perciò (essendo altresì $t^2 > 2u^2$) per valori positivi di t. Essendo inoltre:

$$(t-u)\delta + ud \equiv (t-u)(\delta + d) + (2u - t)\,d,$$

si vede che, per u positivo (nel qual caso $u < t < 2u$), l'accennata combinazione risulta dalla somma di un multiplo del sistema delle sezioni piane $|\delta + d|$, di genere 3 e dimensione 3, e del punto doppio, contato $2u - t$ volte; è dunque un sistema riducibile (poichè detto punto doppio, contato $2u - t$ volte, è parte fissa del sistema). Per u negativo, si hanno i sistemi trasformati dei precedenti mediante la proiezione dal punto doppio di F^4 (la quale corrisponde alla sostituzione $t' = t$, $u' = -u$); anch'essi dunque riducibili. Rimane perciò la sola soluzione $u = 0$, $t = 1$, che conduce alla rete $|\delta|$. Infine, è pure ovvio che la forma quadratica $t^2 - 2u^2$ (equivalente alla $x^2 + 2xy - y^2$) non ammette altre sostituzioni lineari che mutino in sè la soluzione $t = 1$, $u = 0$, cioè la rete $|\delta|$, all'infuori della sostituzione $t' = t$, $u' = -u$, alla quale corrisponde sopra F^4 la *sola* proiezione dal punto doppio.

Poichè z vi compare soltanto a 1° grado, si ricava $z = \dfrac{x^2 + y^2 - xy}{x + 2y}$; e le soluzioni intere sono perciò date dalle formole:

$$(4) \qquad x = kp(p+2q) \qquad y = kq(p+2q) \qquad z = k(p^2 - pq + q^2)$$

per valori interi non entrambi nulli di p e q (uno dei quali potrà supporsi non negativo), mentre k potrà anche assumere convenienti valori fratti.

Introducendo come nuovo parametro, in luogo di q, il valore $q_0 = p + 2q$, che è pure numero intero ogni qualvolta siano tali p e q, si ricavano per x, y, z le nuove espressioni (nelle quali sopprimiamo l'indice di q_0, scrivendo q in luogo di q_0):

$$(5) \qquad \begin{gathered} x = kpq \qquad y = \frac{k}{2} q(q-p) \\ z = \frac{k}{4}(7p^2 + q^2 - 4pq) = \frac{k}{4}\{3p^2 + (2p-q)^2\}. \end{gathered}$$

Sopra questi ultimi parametri, l'involuzione I *determina la sostituzione involutoria* $p' = p$, $q' = -q$, *e la* S *determina la sostituzione parabolica* $p'' = p + 2q$, $q'' = q$.

Per le soluzioni (4) o (5) che conducono a curve ellittiche $xd + yr + z\gamma$ *effettive* e *irriducibili*, dovranno inoltre verificarsi le condizioni seguenti:

1°. L'ordine $y + 3z$ di tale curva deve essere > 0. E poichè dalle (4) si ricava $y + 3z = k(3p^2 - 2pq + 5q^2)$, dove la forma entro parentesi è definita e positiva, sarà altresì $k > 0$.

2°. Essendo $k > 0$ dall'ultima delle (4), dove $p^2 - pq + q^2$ è anche forma definita positiva, segue che sarà pure $z > 0$.

3°. Disponendo ad arbitrio del segno di uno dei parametri p e q, possiamo supporre, nelle (5), $p \geq 0$. E possiamo supporre ivi altresì $q > 0$, poichè per $q = 0$ si ha soltanto il fascio $|\gamma|$ (prescindendo dai suoi multipli, che sono riducibili); e, se fosse $q < 0$, potremmo riferirci alle curve trasformate di quelle in esame, mediante la I.

Essendo nelle (5) $k > 0, p \geq 0, q > 0$, sarà altresì $x \geq 0$. D'altra parte la combinazione $xd + yr + z\gamma$, per valori positivi o nulli delle x, y, z, non può mai essere un fascio di curve ellittiche, effettive e irriducibili, distinto da $|\gamma|$. Per un tal fascio (distinto sempre da $|\gamma|$) dovrà perciò essere negativo almeno un coefficiente; e questo, essendo già $z > 0$, $x \geq 0$, non può essere che y. Ora, $y < 0$ implica $p > q$; e allora, applicando al corrispondente fascio di curve ellittiche la trasformazione inversa di S (colla quale si muta p in $p - 2q$, lasciando invariato q), eventualmente più volte, se ne ricaverebbe un altro fascio, pel quale sarebbe $|p| \leq q$. Per quest'ultimo fascio, o per il suo trasformato mediante I, sarebbero dunque p e q positivi con $p \leq q$, il che va escluso.

Sulla superficie F^4 *non esiste dunque nessun fascio di curve ellittiche, effettive ed irriducibili, all'infuori del fascio di cubiche* γ. Perciò qualunque trasformazione birazionale sopra F^4 muterà in sè stesso quest'ultimo fascio (e risulterà anzi dal seguito ch'essa deve lasciare invariata ogni singola curva di tale fascio).

4. Si indichi ora con **T** una qualsiasi trasformazione birazionale della superficie F^4. Poichè essa muta il fascio di cubiche $|\gamma|$ in sè stesso, dovrà trasformare l'intorno d del punto doppio in una linea $xd + yr + z\gamma$ unisecante le γ. D'altra parte, il numero dei punti d'intersezione della linea $xd + yr + z\gamma$ colle γ è $x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 0 = x + 2y$; sarà perciò $x + 2y = 1$; e possiamo porre $y = k$, $x = -(2k - 1)$. Il valore di z si può allora determinare eguagliando a -2 il grado virtuale della curva in parola, e si trova così $z = k(7k - 5)$. Detta curva, unisecante le γ, sarà perciò del tipo:

$$-(2k-1)\,d + kr + k(7k-5)\,\gamma$$

e la indicheremo (in corrispondenza ai singoli valori interi di k) con η_k. Si verifica allora che, applicando alla linea η_k l'operazione S, essa si muta nella η_{k-1} (p. es. la η_0, che è lo stesso intorno d, si muta in

$$d'' = 3d - r + 12\gamma = \eta_{-1} \text{ (}^1\text{)}.$$

Supponiamo pertanto che l'operazione **T** sopra considerata trasformi l'intorno d nella linea η_k, unisecante le γ. Allora il prodotto $T \cdot S^k$ riporterà l'intorno d alla sua posizione iniziale; e per conseguenza (lasciando esso invariati d e il fascio $|\gamma|$) detto prodotto opererà sopra i sistemi di curve della superficie F^4 secondo una sostituzione del tipo

$$\begin{cases} d^\star = d \\ r^\star = ad \pm r + b\gamma \\ \gamma^\star = \gamma \end{cases}$$

dove a e b sono coefficienti ancora sconosciuti, ma che si possono determinare tenendo conto del fatto che la linea $r^\star$ deve incontrare d in un punto e γ in due punti. Secondo che, nell'espressione di $r^\star$, si prende per r il segno superiore o quello inferiore, si hanno per a e b le due equazioni:

$$-2a + 1 + b = 1 \qquad a + 2 = 2$$

(1) La linea η_k ha come *linea satellite* rispetto al fascio $|\gamma|$ (cioè come luogo dei tangenziali dei suoi punti, sopra le singole γ) la linea $\eta_{-(2k-1)}$. Infatti la somma $2\eta_k + \eta_{-(2k-1)}$ differisce da $d + r$ (la quale ultima sega sulle γ una terna di punti allineati) solo per un multiplo di γ.

da cui $a = b = 0$; oppure:

$$-2a - 1 + b = 1 \qquad a - 2 = 2$$

da cui $a = 4$, $b = 10$. Nel primo caso si ha l'identità, onde $\mathrm{T} = \mathrm{S}^{-k}$; nel secondo caso si ha l'involuzione:

$$\begin{cases} d^\star = d \\ r^\star = 4d - r + 10\gamma \\ \gamma^\star = \gamma \end{cases}$$

la quale non è altro che il prodotto $\mathrm{I}\cdot\mathrm{S}$; perciò $\mathrm{T} = \mathrm{I}\,\mathrm{S}^{-(k-1)}$.

La superficie F^4 *non ammette dunque altre trasformazioni birazionali, all'infuori delle operazioni* I *ed* S, *e loro prodotti.* Di queste, è già noto che lasciano invariata ogni singola curva γ.

Si ottengono già tutte le trasformazioni anzidette, prendendo le potenze (positive e negative) di S, e i loro prodotti (a destra oppure a sinistra) per I.

Le sostituzioni lineari della forma fondamentale f in cui si rispecchiano le trasformazioni birazionali di F^4 *non esauriscono* però il gruppo complessivo di f (1).

Matematica. — *Differenziali controvarianti.* Nota del Corrispondente Guido Fubini (2).

In una mia Nota, pubblicata recentemente in questi Rend., è messa in luce l'importanza che avrebbe per certi studî l'introduzione dei differenziali *controvarianti*, quando come forma fondamentale non si assumesse più (come negli studî del Ricci di calcolo assoluto) una forma differenziale quadratica del primo ordine, ma una forma del primo ordine e di grado qualunque (3). La generalizzazione non sembra agevole; qui farò un primo passo, definendo i differenziali controvarianti del *secondo* ordine; e, soltanto per semplicità di notazioni, assumerò a forma fondamentale una forma cubica

$$\mathrm{F} = \Sigma b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,.$$

(1) La forma f ammette per es. la sostituzione involutoria

$$x' = -x + y + z\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z$$

la quale, applicata ai sistemi di curve di F^4, opererebbe su di essi nel modo seguente:

$$d' = -d\ ,\ r' = d + r\ ,\ \gamma' = d + \gamma$$

trasformando perciò sistemi irriducibili in sistemi riducibili.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1920.

(3) Cfr. la mia Nota, *I differenziali controvarianti*, negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (1918), pp. 5-7.