Gino Fano

# Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali. Nota I

*Rendiconti Acc. Naz. Lincei*, Serie 5, Vol. **291** (1920), p. 408–415

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1920_1>

**Matematica.** — *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali.* Nota I del Corrispondente GINO FANO.

I primi esempî di superficie algebriche che ammettono gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali (non contenuti in gruppi più ampî e continui) sono stati dati da Humbert e Painlévé (1). Più tardi, Enriques (2) ha stabilito che queste superficie appartengono tutte a una delle due categorie seguenti: 1) superficie contenenti un fascio di curve ellittiche (3); 2) superficie (regolari) aventi i generi tutti eguali all'unità; e Severi (4) ha dimostrato che, in connessione colla *base* del sistema delle curve esistenti sulla superficie, si può costruire una forma quadratica a coefficienti interi, tale che il gruppo delle trasformazioni birazionali della superficie si rispecchi in un gruppo isomorfo (oloedricamente o meriedricamente) di sostituzioni lineari di questa forma quadratica. Singoli casi di superficie così fatte, e, fra altre, di superficie del 4° ordine, sono stati studiati da Severi stesso, Godeaux, Snyder, Sharpe, Rosenblatt e da me. Nella presente Nota, e in altre che seguiranno, vengono trattati alcuni casi nuovi di superficie del 4° ordine ($F^4$) con gruppi birazionali infiniti (5), cominciando colla $F^4$ contenente due rette

(1) La citazione che si trova generalmente per Humbert (Compt. Rend., 30 gennaio 1897), e quella, anche frequente, di Painlévé (Compt. Rend., 14 febbraio 1897), non sono esatte; fra altro, nei due giorni sopra indicati non ebbe luogo seduta dell'Accademia di Parigi. L'esempio dato da Humbert, che è caso particolare della superficie di Kummer, si trova, quasi incidentalmente, nelle Note *Sur la décomposition des fonctions θ en facteurs*, Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc., vol. 126 (1° sem. 1898), pag. 394, e *Sur les fonctions abéliennes singulières* (ibid., pag. 508); si cfr. anche la Memoria avente questo stesso ultimo titolo, nel Journ. de mathém., ser. 5ª, vol. 6 (1900), pag. 279, in part. parte IV, pag. 372. L'esempio dato da Painlévé, fondato sopra proprietà della funzione ellittica $\wp(u)$, si trova nella Nota *Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu*, Compt. Rend., vol. 126 (1° sem. 1898), pag. 512.

(2) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend. R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, vol. 15 ($1906_2$), pag. 665.

(3) Categoria più ampiamente discussa nelle due Note *Sulla classificazione delle superficie algebriche e più particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ Rend. e ser. cit., vol. 23 ($1914_1$), pp. 206, 291.

(4) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rendic. Circ. mat. di Palermo, vol. 30 ($1910_2$), pag. 265.

(5) E si troveranno forse elementi per avviare lo studio di *tipi* generali di superficie che ammettono gruppi così fatti; forse anche per la determinazione di questi tipi, in corrispondenza ai valori più piccoli del numero $\varrho$ delle curve costituenti una base.

sghembe, primo esempio di studio completo di un gruppo per il quale la forma quadratica fondamentale di Severi è ternaria.

**1.** Consideriamo la superficie più generale del 4° ordine, $F^4$, dello spazio $S_3$, contenente due rette sghembe $r_1, r_2$ (1) (superficie che dipende da 17 moduli). Tale superficie non ammette trasformazioni proiettive (all'infuori dell'identità). Invero, una trasformazione così fatta dovrebbe avere $r_1$ e $r_2$ come rette unite, oppure dovrebbe scambiarle fra loro; e non potrebbe in nessun caso essere involutoria (nè potrebbe essere involutoria una sua potenza), perchè $F^4$ dipenderebbe da 11 moduli al più (2), anzichè da 17, Ora, se $r_1$ e $r_2$ sono rette unite, l'omografia dovrebbe trasformare in sè l'involuzione $g_3^1$ (affatto generica) che sopra ciascuna di esse segnano le cubiche intersezioni di $F^4$ coi piani per la retta stessa; potrebbe quindi soltanto scambiare a 2 a 2 i quattro punti doppi di ciascuna $g_3^1$; e perciò il suo quadrato, avendo come punti uniti tutti i punti $r_1$ e $r_2$, sarebbe l'identità, oppure un'omografia involutoria (potendo soltanto scambiare i due punti intersezioni ulteriori di $F^4$ con ogni retta appoggiata a $r_1$ e $r_2$). Se invece $r_1$ e $r_2$ vengono scambiate fra loro, le stesse considerazioni valgono per il quadrato di tale (supposta) omografia.

Qualunque trasformazione biràzionale non identica sopra $F^4$ dovrà dunque operare in modo non identico sopra i sistemi lineari di curve della superficie; e, inoltre, non potrà mutare in sè stesso nè il sistema lineare delle sezioni piane di $F^4$, nè un qualsiasi suo multiplo (la divisione dei sistemi lineari essendo, sopra $F^4$, operazione univoca).

Poichè la più generale superficie del 4° ordine non contiene altre curve all'infuori delle sezioni piane e loro multipli, la $F^4$ condotta genericamente per due rette sghembe non conterrà che curve composte mediante tali rette $r_1, r_2$ e le sezioni piane $C$. Queste tre linee formeranno pertanto sopra $F^4$ una *base* (3); noi sostituiremo però alle rette $r_1, r_2$ le cubiche loro residue rispetto alle sezioni piane ($\gamma_1 = C - r_1$, $\gamma_2 = C - r_2$), considerando perciò come base la terna di curve $\gamma_1, \gamma_2, C$.

(1) Le $F^4$ contenenti due rette sghembe rientrano in uno dei casi considerati da Sharpe e Snyder nella Memoria *Birational transformations on certain quartic surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 15 (1914), pag. 266; cfr. in part. § 3, dove si suppone che la $F^4$ contenga una retta, e un'altra curva razionale, di ordine $n$, incontrante la retta in $n-1$ punti. Lo studio è però quivi appena avviato; inoltre nel caso presente, $n=1$, vi è sulla superficie un secondo fascio di curve ellittiche, e il gruppo è perciò più ampio che non per $n>1$.

(2) Severi, Mem. cit. *Complementi* ecc.; ved. in particolare n. 12, *b*).

(3) Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Math. Ann., Bd. 42 (1906), pag. 194, nonchè la Nota precedente nei Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc., vol. 140 (1° sem. 1905), pag. 361. Inoltre: *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales Ec. norm. sup., 3èm sér., tom. 25 (1908), pag. 449.

*Poichè i gradi virtuali di* $\gamma_1$, $\gamma_2$ e $C$ valgono rispett. $0$, $0$, $4$, mentre C taglia $\gamma_1$ e $\gamma_2$ in 3 punti, e queste ultime si tagliano in 2 punti, il determinante di tale base sarà

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 .$$

Dico, ora, che la base considerata è *intermediaria* (¹), ossia che il suo determinante ha il valor assoluto minimo possibile. Infatti, se con altra base si potesse avere un determinante di valor assoluto $< 20$, questo valore dovrebbe essere un divisore di $20$; e anzi, più particolarmente, sarebbe il quoziente della divisione di 20 per un numero quadrato perfetto (²); dunque soltanto $20:4 = 5$. Ora il determinante in parola è, in ogni caso, simmetrico, e come elementi principali ha numeri tutti pari (perchè del tipo $2p - 2$, essendo $p$ il genere delle singole curve costituenti la base); perciò, dei 6 termini, certo 4 sono pari, e gli altri 2 (per la simmetria) sono eguali fra loro in valore e segno. Il determinante sarà dunque anch'esso numero pari, e non potrà perciò essere $= 5$.

Essendo $F^4$ superficie con curva canonica di ordine zero, la base intermediaria $\gamma_1$, $\gamma_2$, C sarà pure *minima* (³); vale a dire, ogni curva esistente sopra $F^4$ potrà esprimersi mediante una combinazione lineare

$$x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC$$

per valori interi (positivi, negativi, o nulli) di $x$, $y$, $z$.

A questa base è legata, nel senso stabilito da Severi (⁴), la forma quadratica fondamentale

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz ,$$

alla quale spettano le proprietà seguenti:

1) Detta forma è equivalente, propriamente o impropriamente, a tutte quelle formate in modo analogo colle altre basi intermediarie, e perciò minime, della superficie $F^4$.

2) La determinazione delle curve di grado (virtuale) $n$, esistenti sopra $F^4$, dipende dalla risoluzione in numeri interi dell'equazione

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz = n ;$$

(¹) Severi, Mem. cit. *La base minima* ecc., § 1.

(²) Severi, *La base minima* ecc., § 1, pag. 453, formola (4).

(³) Severi, Mem. cit. *Complementi* ecc., n. 7.

(⁴) Memoria cit., *Complementi* ecc., § 2. La forma quadratica fondamentale è, in generale, $\sum_{ik} n_{ik} \lambda_i \lambda_k$, dove le $\lambda_i$ sono le variabili, e i coefficienti $n_{ik}$ sono (ordinatamente) gli elementi del determinante della base (D).

e ad ogni soluzione così fatta corrisponde (con opportuna scelta del segno di una, e conseguentemente delle altre variabili) uno ed un solo sistema effettivo $|x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC|$.

3) Il gruppo delle eventuali trasformazioni birazionali di $F^4$ si rispecchia in un gruppo isomorfo [e, in questo caso, oloedricamente isomorfo (1)] di sostituzioni lineari a coefficienti interi, di modulo $\pm 1$, della forma $f$. Se la trasformazione birazionale considerata sopra $F^4$ muta la base $\gamma_1, \gamma_2, C$ nella nuova base (anche minima)

$$(1)\qquad \begin{aligned} \gamma'_1 &= a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + a_{13}C \\ \gamma'_2 &= a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + a_{23}C \\ C' &= a_{31}\gamma_1 + a_{32}\gamma_2 + a_{33}C \end{aligned} \qquad (|a_{ik}| = \pm 1),$$

la forma $f$ sarà mutata in sè dalla sostituzione lineare

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{aligned}$$

il cui determinante differisce dal precedente solo per lo scambio delle orizzontali colle verticali. Questa proprietà non è però invertibile; e vedremo che esistono anche sostituzioni lineari di modulo $\pm 1$ della forma $f$ (ad es. quella risultante dalla simmetria rispetto ad $x$ ed $y$: $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$), alle quali non corrispondono trasformazioni birazionali di $F^4$.

2. È facile assegnare *tre* distinte trasformazioni birazionali della superficie $F^4$, colle relative sostituzioni (1) e (2); e, fra queste, due non periodiche, con che il gruppo complessivo di $F^4$ sarà certo infinito (discontinuo). In seguito verrà dimostrato che questo gruppo complessivo è appunto quello generato dalle tre trasformazioni anzidette.

*a*) Le rette appoggiate a $r_1$ e $r_2$ (formanti perciò una congruenza lineare) incontrano ulteriormente $F^4$ nelle coppie di punti di un'involuzione razionale **I** (2), che lascia invariati i due fasci di cubiche $\gamma_1$ e $\gamma_2$, subordinando sopra ogni $\gamma_1$ o $\gamma_2$ la proiezione doppia dal suo punto di appoggio a $r_2$ o risp. $r_1$. Il sistema delle sezioni piane C verrà mutato in un sistema (per ovvie ragioni di simmetria) del tipo $x(\gamma_1 + \gamma_2) + zC$: scrivendo che questo sistema è, al pari di $|C|$, di grado 4 [onde $f(x, x, z) = 4$] e che

(1) Invero, la sostituzione (1) potrebbe essere identica soltanto per una trasformazione proiettiva sopra $F^4$; caso che qui è escluso.

(2) Questa involuzione conduce a rappresentare $F^4$ sopra una quadrica doppia (quale è appunto, nello spazio $S_3$ rigato, la stessa congruenza di rette di direttrici $r_1, r_2$) con curva di diramazione di 8° ordine, quadrisecante le generatrici di ambo i sistemi.

le sue curve incontrano le $\gamma_1$ (o le $\gamma_2$), anche al pari delle C, in 3 punti, si hanno le due relazioni

$$4z^2 + 4x^2 + 12xz = 4 \quad , \quad 2x + 3z = 3 ,$$

dalle quali si ricava $5z^2 = 5$; e perciò, escludendo la soluzione $z = 1$, $x = 0$, che darebbe di nuovo il sistema $|C|$, si conclude $z = -1, x = 3$. Alle C corrispondono dunque nella **I** le curve $3(\gamma_1 + \gamma_2) - C$; e le sostituzioni (1) e (2) assumono perciò la forma:

$$(1\,a) \begin{cases} \gamma_1' = \gamma_1 \\ \gamma_2' = \gamma_2 \\ C' = 3\gamma_1 + 3\gamma_2 - C \end{cases} \qquad (2\,a) \begin{cases} x' = x \quad\;\; + 3z \\ y' = \quad\;\; y + 3z \\ z' = \quad\quad\;\; - z \end{cases}$$

Interpretando $x, y, z$ come coordinate proiettive omogenee di punto nel piano, la sostituzione $(2\,a)$ è l'omologia armonica di asse $z = 0$ e centro $(3, 3, -2)$.

Lo stesso ragionamento prova altresì che non esiste sopra $F^4$ nessun'altra trasformazione birazionale che lasci invariati ambo i fasci di cubiche $\gamma_1$ e $\gamma_2$: una tale trasformazione, non potendo essere proiettiva, dovrebbe infatti operare anche sopra $|C|$, e quindi sopra tutti i sistemi di curve di $F^4$, nello stesso modo della **I**, colla quale perciò coinciderebbe. Del pari, non può esistere sopra $F^4$ nessuna trasformazione che scambii i due fasci $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$: invero, il sistema $|C|$ non potrebbe essere mutato in sè, perchè la trasformazione sarebbe proiettiva; dovrebbe dunque essere mutato di nuovo nel sistema $3(\gamma_1 + \gamma_2) - C$; e allora il prodotto di questa (supposta) trasformazione per la **I** sarebbe a sua volta una proiettività non identica [1].

*b*) Una trasformazione non periodica $\boldsymbol{\Gamma}_1$, la quale lascia ferme tutte le cubiche $\gamma_1$, si può costruire nel modo seguente:

Le cubiche $\gamma_1$ sono incontrate dalla retta $r_1$ in terne di punti (A, B, C), e dalla retta $r_2$ in singoli punti (M), dei quali ultimi, sopra una $\gamma_1$ generica, nessun multiplo è equivalente a un multiplo della terna precedente; ciò avverrebbe soltanto quando il punto di appoggio ad $r_2$, contato $3n$ volte, costituisse per tale cubica l'intersezione *unica* con una curva del suo piano di ordine $n$ — fosse dunque un suo flesso, oppure punto sestatico, nonatico, ecc. — il che non si verificherà sopra una $F^4$ generale del tipo considerato. Sarà dunque razionalmente nota sopra le $\gamma_1$, e perciò sopra $F^4$, la trasformazione

[1] La **I**, la sostituzione corrispondente al semplice scambio delle $\gamma_1$ e $\gamma_2$ (cioè $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$), e il loro prodotto, sono, come è ovvio, sulla conica $f = 0$ e nel suo piano, tre involuzioni od omologie armoniche mutuamente permutabili, formanti, insieme coll'identità, un gruppo $G_4$ diedrico. Delle tre, la sola **I** corrisponde a un'effettiva trasformazione birazionale sopra $F^4$.

birazionale *non periodica* rappresentata sulle $\gamma_1$ dalla relazione di equivalenza fra gruppi di punti [1]:

$$P' \equiv P + 3M - (A + B + C) \ [2] \ [3] \ [4].$$

Determiniamo ora la sostituzione (1) corrispondente a questa nuova trasformazione (per la quale sarà ancora $\gamma_1' = \gamma_1$). Applicando la formola precedente ai *due* punti intersezioni della curva $\gamma_2'$, trasformata di $\gamma_2$, colle cubiche $\gamma_1$, vediamo che la curva (eventualmente virtuale)

$$\gamma_2 + 6r_2 - 2r_1 \equiv \gamma_2 + 6(C - \gamma_2) - 2(C - \gamma_1) \equiv 2\gamma_1 - 5\gamma_2 + 4C$$

deve segare le $\gamma_1$ in coppie di punti equivalenti a quelle segate dalla $\gamma_2'$ cercata; essa non potrà dunque differire dalla $\gamma_2'$ che per un multiplo della curva stessa $\gamma_1$ [5]. Sarà dunque

$$\gamma_2' = k\gamma_1 - 5\gamma_2 + 4C,$$

dove il coefficiente incognito $k$ si può determinare mediante la condizione che sia nullo il grado di $\gamma_2'$, ossia $f(k, -5, 4) = 0$; si ha così un'equazione lineare in $k$, colla radice $k = 14$.

Analogamente, poichè le C, e conseguentemente le loro trasformate C′, tagliano le $\gamma_1$ in 3 punti, C′ potrà differire dalla curva

$$C + 9r_2 - 3r_1 \equiv C + 9(C - \gamma_2) - 3(C - \gamma_1) \equiv 3\gamma_1 - 9\gamma_2 + 7C$$

(1) Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend. R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. 15 ($1906_2$), pag. 665.

(2) In altri termini, indicando con $u$ l'integrale ellittico di 1ª specie sopra una $\gamma_1$ generica, e con $a, b, c, m$ i suoi valori nei punti A, B, C, M, la trasformazione sarà rappresentata analiticamente da $u' \equiv u + 3m - (a + b + c)$ (mod. $2\omega, 2\omega'$).

(3) Questa trasformazione, mentre non è periodica sopra una $\gamma_1$ generica, è però tale sopra quelle particolari $\gamma_1$ per le quali il punto $M \equiv \gamma_1 r_2$ è punto sestatico, nonatico, ecc.; ed è identica sopra le $\gamma_1$ per le quali M è flesso, che sono in numero di *otto*. Invero, imporre che M sia flesso per una $\gamma_1$, equivale a chiedere che la tangente in M alla cubica $\gamma_1$ sia ivi la seconda tangente principale di $F^4$ (la prima essendo $r_2$). Ora le seconde tangenti principali di $F^4$ nei punti di $r_2$ (ossia le tangenti in tali punti alle cubiche $\gamma_2$) formano una rigata di cui $r_2$ stessa è direttrice semplice, e generatrice quadrupla (in corrispondenza alle 4 cubiche $\gamma_2$ tangenti a $r_2$), e che ha in ogni piano per $r_2$ tre generatrici, dunque di ordine *otto*; e le sue generatrici incidenti a $r_1$ determinano sopra $r_2$ i punti M cercati. — Sopra ogni $\gamma_1$ sarà infinitesima (in senso aritmetico) una conveniente potenza dell'operazione $\Gamma_1$; potenza il cui esponente varierà però al variare di quella $\gamma_1$.

(4) Indicando con X il punto tangenziale di M sopra ogni singola $\gamma_1$, sarà $2M + X \equiv A + B + C$; perciò $P' \equiv P + M - X$, ossia $P' + X \equiv P + M$. L'operazione $\Gamma_1$ equivale perciò, sopra ogni $\gamma_1$, al prodotto della proiezione doppia da M e della proiezione doppia da X; e, sopra $F^4$, al prodottto dell'involuzione I per un'altra involuzione, che trovasi considerata nella Mem. cit. di Sharpe e Snyder (ponendo ivi $n = 1$).

(5) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie*, Atti R. Ist. Veneto, tomo 70 (1910-11), pag. 373; ved. in particolare pag. 380.

solo per un multiplo di $\gamma_1$. Sarà dunque $C' \equiv i\gamma_1 - 9\gamma_2 + 7C$; e imponendo che sia eguale a 4 il suo grado, ossia $f(i, -9, 7) = 4$, si trova $i = 31$.

La trasformazione birazionale $\boldsymbol{\Gamma}_1$ della superficie $F^4$ opera dunque sulle curve di questa superficie secondo la sostituzione $(1\,b)$ qui sotto riportata, che si rispecchia nella sostituzione $(2\,b)$, di modulo $+1$, della forma $f$:

$$(1\,b)\;\left\{\begin{aligned} \gamma_1' &= \gamma_1 \\ \gamma_2' &= 14\gamma_1 - 5\gamma_2 + 4C \\ C' &= 31\gamma_1 - 9\gamma_2 + 7C \end{aligned}\right. \qquad (2\,b)\;\left\{\begin{aligned} x' &= x + 14y + 31z \\ y' &= \quad\; - 5y - 9z \\ z' &= \quad\;\; 4y + 7z \end{aligned}\right.$$

*c*) Un'analoga trasformazione $\boldsymbol{\Gamma}_2$, anche non periodica, si ha scambiando i fasci $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$; le sue equazioni si ottengono dalle precedenti scambiando $\gamma_1$ e $\gamma_2$, $x$ e $y$:

$$(1\,c)\;\left\{\begin{aligned} \gamma_1^{(1)} &= -5\gamma_1 + 14\gamma_2 + 4C \\ \gamma_2^{(1)} &= \qquad\qquad \gamma_2 \\ C^{(1)} &= -9\gamma_1 + 31\gamma_2 + 7C \end{aligned}\right. \qquad (2\,c)\;\left\{\begin{aligned} x' &= -5x \qquad - 9z \\ y' &= 14x + y + 31z \\ z' &= 4x \qquad + 7z \end{aligned}\right.$$

**3.** Poichè le operazioni **I**, $\boldsymbol{\Gamma}_1$ e $\boldsymbol{\Gamma}_2$, e conseguentemente anche i loro prodotti, mutano i fasci di cubiche $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$ in fasci di curve ellittiche sopra $F^4$, così, per procurarci una visione generale del gruppo complessivo che nasce da queste operazioni, e per accertare se esso comprenda o meno la totalità delle trasformazioni birazionali di $F^4$, sarà utile determinare tutti i fasci di curve ellittiche esistenti sopra $F^4$, e perciò le combinazioni $x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC$ che risultano di grado (virtuale) zero; in altri termini, le soluzioni in numeri interi, non tutti nulli, dell'equazione indeterminata

$$f \equiv 4z^2 + 4xy + 6xz + 6yz = 0 .$$

Inoltre, poichè i fasci di curve ellittiche che a noi interessano, quali trasformati di $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$, sono costituiti da curve ellittiche *effettive*, *irriducibili*, dovranno considerarsi come non rispondenti allo scopo le combinazioni $x\gamma_1 + y\gamma_2 + zC$ che, pur avendo l'ordine $3(x+y) + 4z > 0$ e il grado virtuale zero, conducono a sistemi riducibili, cioè a sistemi aventi una parte fissa, oppure composti mediante un fascio. Distinguiamo tali sistemi, per maggior chiarezza, nelle seguenti categorie:

1°. Sistemi composti di un fascio di curve ellittiche (effettive, irriducibili) e di una curva fissa. Tali ad esempio i sistemi $\gamma_1 + r_2 \equiv C + \gamma_1 - \gamma_2$ e $\gamma_2 + r_1 \equiv C - \gamma_1 + \gamma_2$.

2°. Sistemi composti di un sistema effettivo di genere $>1$, grado $>0$, dimensione $>1$, e di una parte fissa, tali tuttavia che la curva complessiva risulti di grado virtuale zero e genere virtuale 1; per esempio il sistema $C + 2r_1 \equiv 3C - 2\gamma_1$ (e analogamente $C + 2r_2$), e così anche

$$C + 2r_1 + r_2 \equiv 4C - 2\gamma_1 - \gamma_2\,;\ \text{ecc.}$$

3°. Sistemi multipli di un fascio di curve ellittiche effettive irriducibili, oppure anche multipli di un sistema del tipo 1° o 2°. Questo 3° caso è caratterizzato dal fatto che i valori assoluti dei numeri $x, y, z$ hanno massimo comun divisore $>1$.

I sistemi (di grado virtuale zero) irriducibili, e quelli riducibili delle varie categorie anzidette, anche in corrispondenza ai diversi sottocasi del tipo 3°, formano altrettanti corpi distinti, ciascuno invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie $F^4$ [1]. Vedremo in una prossima Nota come, per mezzo delle soluzioni intere dell'equazione $f=0$, si possano determinare sopra $F^4$ tutti i fasci di curve ellittiche effettive ed irriducibili, riconoscendo altresì che ciascuno di questi si ottiene da uno dei due fasci $|\gamma_1|$ e $|\gamma_2|$ con un prodotto di operazioni $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\Gamma}_1$ e $\boldsymbol{\Gamma}_2$, e che questi prodotti esauriscono il gruppo birazionale di $F^4$.

## Fisica. — *L'esistenza degli ioni positivi e la teoria elettronica della conducibilità dei metalli.* Nota del Socio O. M. Corbino.

**Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.**

[1] Esistono invece sostituzioni lineari della forma $f$, del tipo (2) (non corrispondenti, naturalmente, a trasformazioni birazionali di $F^4$) tali che la corrispondente sostituzione (1), applicata ai sistemi lineari di $F^4$, muterebbe (taluni) sistemi irriducibili in sistemi riducibili, e viceversa. Un esempio è dato dalle sostituzioni

$$(2)\ \begin{cases} x' = x \\ y' = -x-2y-z \\ z' = x+3y+2z \end{cases} \qquad (1)\ \begin{cases} \gamma'_1 = \gamma_1 - \gamma_2 + C \equiv \gamma_1 + r_2 \\ \gamma'_2 = -2\gamma_2 + 3C \equiv \gamma_2 + 3r_2 \\ C' = -\gamma_2 + 2C \equiv C + r_2 . \end{cases}$$

Nel piano $(x, y, z)$ la (2) è l'omologia armonica di asse $x+3y+z=0$ e centro $(0, -1, 1$.