I Grandi Matematici Italiani online

Gino Fano

Gino Fano

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali

in: Scritti matematici offerti ad E. d'Ovidio, Torino, 1918, p. 342–363

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1918_1>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali (1)

di GINO FANO, a Torino.

È noto da tempo che le superficie a sezioni razionali sono tutte razionali, e quelle a sezioni ellittiche od iperellittiche sono anche razionali, oppure rigate.

Queste proprietà furono poi estese alle varietà algebriche a tre o più dimensioni, a curve-sezioni degli stessi tipi indicati. Una varietà a curve-sezioni razionali è sempre rappresentabile biunivocamente sopra uno spazio di un egual numero di dimensioni (2). E così dicasi delle varietà a curve-sezioni ellittiche od iperellittiche, fatta eccezione soltanto per quelle composte di una serie ∞^1 di spazi e, forse, per le varietà del 3° ordine (3).

Il presente lavoro porta un contributo allo studio delle varietà a tre dimensioni, in base alla natura delle loro *superficie-sezioni*. Vi si dimostra che *sono razionali* (rappresentabili cioè sullo spazio S_3) *tutte le varietà a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali, ad eccezione* (eventualmente) *della varietà cubica di* S_4 *priva di punti doppi*. Dal punto di vista invariantivo, le varietà di cui si tratta sono quelle che contengono *un sistema lineare semplice* (perciò almeno ∞^3; e, se ∞^3, omaloidico) di *superficie razionali*. È già noto che l'esistenza in una varietà a tre

(1) Sunto di Memoria dello stesso titolo, pubblicata negli “Annali di Matematica„, (3), t. 24 (1915), pp. 49 e seguenti.

(2) Per le varietà a tre dimensioni, v. Enriques, “Mathem. Annalen„, Bd. 46 (1895), p. 179. L'estensione alle varietà superiori è immediata.

(3) Enriques, l. c. L'estensione alle varietà superiori è immediata per il caso delle curve-sezioni iperellittiche di genere > 1. Per il caso delle curve ellittiche, v. Scorza, “Rendic. Acc. dei Lincei„ (5), vol. 17_1 (1908), p. 10; “Annali di Mat.„ (3), t. 15 (1908), p. 217.

dimensioni di *un sistema lineare almeno* ∞^3 *di superficie razionali ad intersezioni variabili irriducibili*, o anche di una sola *rete a intersezioni non razionali od ellittiche*, è sufficiente per rappresentare la varietà sopra una involuzione dello spazio S_3 (4); ma è pur noto che queste involuzioni non sono tutte razionali (5).

1. — Si abbia nello spazio S_r $(r \geq 4)$ una varietà a tre dimensioni M_3^n, normale, di ordine $n \geq 4$, a superficie-sezioni F razionali. Per questa varietà è certamente nulla la *irregolarità superficiale* (o *bidimensionale*) (6); e sono per conseguenza normali le superficie-sezioni F (7). Sarà inoltre nullo il genere geometrico della varietà, perchè ogni eventuale superficie canonica (di ordine ≥ 0) segnerebbe sopra una F generica una curva, che, sommata alle sezioni iperpiane della F medesima, ne darebbe delle curve canoniche, contrariamente all'ipotesi della razionalità delle F. Il genere aritmetico della M_3^n (non superiore al genere geometrico, quando sia nulla l'irregolarità superficiale (8)) sarà perciò ≤ 0; e si può facilmente convincersi che anch'esso sarà nullo. Infatti l'esistenza sulla M_3^n anche di una sola rete di superficie razionali permette di rappresentare detta varietà sopra uno spazio S_3 doppio, con superficie di diramazione di ordine pari $2m$ (Φ^{2m}) dotata di una delle singolarità seguenti (9):

1) Un punto O multiplo di ordine $2m-2$;

2) Una retta r multipla di ordine $2m-4$;

3) Due punti infinitamente vicini (O, O') multipli di ordine $2m-3$, congiunti da una retta r multipla di ordine $2m-6$.

---

(4) Enriques, "Mathem. Annalen", Bd. 49 (1897), p. 1; cfr. in particolare § 17.

(5) Enriques, "Rendic. Accad. dei Lincei" (5), vol. 21_1 (1912), p. 81; Fano, "Atti della R. Accad. di Torino", vol. 43 (1907-08), p. 973.

(6) Castelnuovo ed Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*, "Annales de l'École Norm. Sup." (3), t. 22 (1896), p. 339.

(7) Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, "Rendiconti Circ. Matem. di Palermo", t. 28 (1909), p. 33. Ved. in particolare n° 17, teor. VIII.

(8) Severi, l. c., n° 19.

(9) Enriques, l. c. a nota (4), § 18.

Più particolarmente, a un fascio arbitrario di superficie razionali contenuto nella rete suindicata si possono far corrispondere nel primo caso i piani doppi di un fascio contenuto nella stella O, negli altri casi i piani doppi passanti per la retta r. — E per questi tre spazi doppi si verifica facilmente che il genere aritmetico è nullo, anche se la Φ^{2m} doppia possiede ulteriori singolarità.

La varietà M_3^n *è dunque una varietà completamente regolare, a generi nulli.* Per conseguenza, sopra ogni superficie di genere > 0 in essa contenuta il sistema aggiunto segnerà il sistema canonico completo (10).

2. — Se le curve-sezioni della varietà M_3^n sono razionali, ellittiche (l'ordine n essendo ≥ 4), od iperellittiche, la varietà stessa, come abbiamo già detto, è certo razionale. Se invece le curve-sezioni di M_3^n sono di genere $p \geq 3$ e non iperellittiche, si consideri il sistema lineare $|F+F'|$ aggiunto a $|2F|$, depurato delle sue eventuali componenti fisse. Questo sistema, dovendo segare sulle superficie $(2F)$, regolari e di genere p, il sistema canonico completo, avrà dimensione $p-1$; e sulle F esso segnerà l'intero sistema aggiunto al sistema caratteristico di $|F|$, cioè alle curve-sezioni delle F stesse. Il detto sistema $|F+F'|$ si comporrà certo anch'esso di superficie razionali o riferibili a rigate; perchè ogni superficie aggiunta al sistema $|F+F'|$ sarebbe biaggiunta alle F, contrariamente all'ipotesi che le F siano razionali (sicchè le $F+F'$ avranno genere geometrico nullo); e, del pari, se esistessero superficie i-aggiunte alle $F+F'$ — e di queste, per qualche valore di i (in ogni modo per $i=12$), dovrebbero certo esservene, se le $(F+F')$ non sono riferibili a rigate (11) — esse segnerebbero sulle F curve $2i$-canoniche, contrariamente ancora all'ipotesi della razionalità delle F.

Si osservi pure che il sistema $|F+F'|$ non è certo un fascio, perchè le sezioni iperpiane delle F si sono supposte di genere $p \geq 3$, e perciò la dimensione $p-1$ del sistema stesso

(10) Severi, l. c., n° 20, teor. X.

(11) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, " Rendiconti Circ. Mat. di Palermo ", t. 20 (1905), p. 1.

$|F+F'|$ è ≥ 2; e non è nemmeno composto mediante un fascio, perchè le aggiunte delle curve-sezioni delle F, da esso segate, sarebbero composte in egual modo, e ciò avviene soltanto quando le sezioni di $|F|$ sono iperellittiche. *Il sistema* $|\mathrm{F}+\mathrm{F}'|$ *è dunque almeno* ∞^2 *e irriducibile.*

Per detto sistema $|F+F'|$ sono pertanto prevedibili i casi seguenti:

a) Il sistema $|\mathrm{F}+\mathrm{F}'|$ *è un sistema lineare semplice* (*di dimensione* ≥ 3) *di superficie razionali.* In tal caso potremo rappresentare la varietà proposta sopra una nuova varietà V, le cui sezioni iperpiane siano anch'esse razionali e immagini delle superficie $(F+F')$. E si può anzi dimostrare (N. 11) che *tale varietà* V *non può essere una varietà cubica dello spazio* S_4 *priva di punti doppi.*

b) Il sistema $|\mathrm{F}+\mathrm{F}'|$ *appartiene a una congruenza di linee, razionale e del 1° ordine* (ogni superficie del sistema è pertanto luogo di ∞^1 linee di tale congruenza). Questo caso si presenterà certo ogni qualvolta le superficie $(F+F')$ siano riferibili a rigate non razionali, e abbiano perciò le intersezioni variabili riducibili; come pure quando sia $p=3$, e per conseguenza $|F+F'|$ di dimensione 2; esso verrà esaminato ai n^i 3 e seg.

c) Il sistema $|\mathrm{F}+\mathrm{F}'|$, *pur non appartenendo ad alcuna congruenza di linee, appartiene ad una involuzione di punti* (di grado >1). Al n° 10 verrà però dimostrato che quest'ipotesi va esclusa.

Inoltre, nella prima ipotesi (caso *a)*):

o la varietà V ha le curve-sezioni iperellittiche, in particolare razionali od ellittiche, risultando però escluso ch'essa sia una varietà cubica di S_4 priva di punti doppi;

oppure le curve-sezioni di V saranno ancora di genere ≥ 3 e non iperellittiche. Potremo allora operare sulla varietà V come già abbiamo operato sulla M_3^n, vale a dire sul sistema $|F+F'|$ come già sul sistema $|F|$. Sopra una superficie generica del sistema $|F+F'|$, il sistema delle curve caratteristiche avrà alla sua volta il proprio aggiunto, di dimensione ≥ 2, il quale verrà ivi segato dal nuovo sistema:

$$|F+F'|+|(F+F')'|=|F+F'|+|2F'|=|F+3F'|,$$

composto anch'esso di superficie razionali o riferibili a rigate; e così, occorrendo, di seguito. Il procedimento avrà certo termine, perchè il sistema $|F+3F'|$ sega sulle F curve del sistema lineare terzo aggiunto a quello delle sezioni iperpiane; e, del pari, gli eventuali sistemi successivi segheranno sopra F curve di ulteriori aggiunti di questo stesso sistema; la serie dei quali aggiunti sopra una superficie razionale è finita.

Potremo dunque in ogni caso rappresentare la varietà proposta:

1) o sopra una varietà regolare a curve-sezioni iperellittiche, in particolare ellittiche o razionali, e diversa da una V^3 di S_4 priva di punti doppi: varietà dunque certamente razionale;

2) oppure sopra una varietà le cui sezioni iperpiane F presentano il caso *b)*; sono cioè tali che il sistema $|F+F'|$ risulta composto mediante una congruenza razionale di linee. Se queste linee fossero rette, la varietà V conterrebbe un sistema razionale ∞^2 di rette, del 1° ordine, e sarebbe perciò certo razionale (e così dicasi della M_3^n); essa potrebbe rappresentarsi sullo spazio S_3 facendo corrispondere a queste rette le rette di una stella, e alle superficie $(F+F')$ coni collo stesso vertice. Basterà dunque esaminare il caso in cui le superficie $(F+F')$ appartengano a una congruenza di linee non rette; e in tutti questi casi (n^i 7-9) riconosceremo pure che la varietà V è razionale.

Con questo, e colle dimostrazioni preannunciate dei n^i 10 e 11, il nostro còmpito sarà assolto. Risulterà inoltre dimostrato che: *Se la varietà cubica dello spazio* S$_4$ *priva di punti doppi non è rappresentabile sullo spazio* S$_3$, *essa non può contenere altri sistemi lineari semplici di superficie razionali all'infuori di quelli di dimensione 4 e di grado 3, a intersezioni variabili ellittiche* (forse tutti trasformabili birazionalmente nel sistema delle sezioni iperpiane). Infatti da qualunque altro sistema discenderebbe, in forza del procedimento indicato, la rappresentazione della varietà sullo spazio S_3.

3. — Se il sistema lineare $|F+F'|$ appartiene a una congruenza di linee aventi ordine $k>1$, questa congruenza determinerà sopra ogni superficie F una involuzione $\boldsymbol{I}_k$, alla quale apparterrà il sistema lineare aggiunto a quello delle sezioni iperpiane. Possiamo supporre quelle linee irriducibili, e perciò l'involuzione $\boldsymbol{I}_k$ non composta mediante un'involuzione di ordine inferiore. Consideriamo ora, nello spazio S_{r-1} di una F generica, il sistema ∞^2 di rette Γ formato dalle congiungenti di tutte le coppie di punti di uno stesso gruppo dell'involuzione $\boldsymbol{I}_k$. Sopra una sezione iperpiana generica $\boldsymbol{C}$ di F, una tale coppia di punti, supposta contenutavi, imporrebbe una sola condizione a un gruppo canonico obbligato a sua volta a contenerla; e ciò, sopra una curva non iperellittica, non è possibile. Il sistema di rette Γ, nello spazio S_{r-1}, è dunque tale che un iperpiano generico (di questo S_{r-1}) non ne contiene alcuna retta, ossia è di classe *zero*. Ogni iperpiano passante per una retta s del sistema Γ dovrà però contenere ∞^1 di queste rette; e se P è un punto qualunque della superficie F, ogni iperpiano passante per il piano sP conterrà una retta del sistema Γ passante per P, la quale non potrà variare con quell'iperpiano, e starà perciò nel piano sP, vale a dire sarà incidente a s. Il sistema Γ, che nelle ipotesi fatte è certo irriducibile, si compone dunque di rette a due a due incidenti, e perciò tutte passanti per uno stesso punto O.

I gruppi dell'involuzione $\boldsymbol{I}_k$ *stanno dunque sopra rette uscenti da uno stesso punto* O. Il sistema lineare $|\boldsymbol{C}|$ delle sezioni iperpiane di F, di dimensione $r-1$ e genere p, conterrà un sistema lineare $|C_0|$ di dimensione $r-2$ e genere eventualmente inferiore, segato dagli iperpiani passanti per O, e appartenente all'involuzione $\boldsymbol{I}_k$; e a questa involuzione apparterranno pure il sistema $|\boldsymbol{C}'|$ aggiunto a $|\boldsymbol{C}|$, e il sistema $|\boldsymbol{C}_0'|$ aggiunto a $|\boldsymbol{C}_0|$; quest'ultimo esistente se $|\boldsymbol{C}_0|$ ha ancora genere $\geqq 2$, e in tal caso contenuto in $|\boldsymbol{C}'|$. — Sarà inoltre $k=2$, e le curve $\boldsymbol{C}_0$ saranno iperellittiche: è infatti questo il solo caso in cui la serie canonica di una curva algebrica è composta mediante un'involuzione ∞^1 (necessariamente razionale, e costituita da sole *coppie* di punti).

Sulla varietà M_3^n, della quale la superficie considerata F era sezione iperpiana generica, *il sistema lineare* $|\mathrm{F}+\mathrm{F}'|$ *sarà composto mediante una congruenza di coniche, contenute in piani passanti per una retta.* Inoltre sopra una F generica, le sezioni determinate da iperpiani passanti per il punto O sono iperellittiche, e contengono una ∞^1 razionale di coppie di punti dell'involuzione I_2; perciò le ∞^2 rette del sistema Γ uscenti da O formeranno un cono a tre dimensioni, proiettante da O una superficie a curve-sezioni razionali, certamente normale, e proiezione doppia della F dal punto O. Pertanto: *La varietà* M_3^n *sarà luogo di* ∞^2 *coniche, contenute nei piani che da una retta fissa* (di S_r) *proiettano i punti di una superficie normale a curve-sezioni razionali* (di ordine $r - 3$, in S_{r-2}); *e il sistema* $|F + F'|$ *su di essa si comporrà di superficie luoghi di* ∞^1 *tra queste coniche.*

4. — Occorre pertanto determinare tutte le superficie F del tipo incontrato nel n° precedente; poichè esse costituiranno tutte le possibili sezioni delle M_3^n corrispondenti al caso *b)* del n° 2.

Ricerche del Sig. Castelnuovo ([12]) hanno da tempo assegnate tutte queste superficie, limitatamente alle due ipotesi restrittive ch'esse siano prive di punti multipli propri, e abbiano le curve-sezioni non speciali (ossia che i sistemi lineari di curve piane che le rappresentano siano prive di curve fondamentali proprie, e abbiano serie caratteristica non speciale). Bastano però poche considerazioni complementari per comprendere nel ragionamento e nel risultato anche ogni caso ulteriore.

Nelle ipotesi fatte dal Sig. Castelnuovo, la superficie F si proiettava in S_3, da un numero conveniente di suoi punti semplici scelti in modo generale, secondo una superficie F^* di un certo ordine m, priva di punti multipli propri, le cui sole singolarità erano il punto O^*, proiezione di O, multiplo di ordine $m - 2$, e rette multiple uscenti da questo punto, in numero e di ordini tali da rendere impropria la multiplicità in O^* stesso. Nel caso presente potrà O^* essere punto multiplo proprio, e vi potranno essere anche altre singolarità, ma è facile precisarle.

In primo luogo la superficie normale F^n non può avere già essa linee multiple, all'infuori di rette passanti per O. Invero, si consideri su di essa una sezione iperpiana C non passante per O e avente lo stesso genere p della sezione generica. Due punti assolutamente qualunque di questa curva devono imporre

---

([12]) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero,* " Mem. Soc. Ital. delle Scienze ", (3), t. 10 (1896); *Aggiunta alla Memoria:* Enriques, *Sui piani doppi di genere uno*; ibid.

a un'aggiunta C', obbligata a contenerli, condizioni distinte. D'altra parte le C', appartenendo all'involuzione I_2, sono segate sopra F da coni di vertice O. Pertanto, se P è un punto comune alla C e all'eventuale linea multipla di F, tale (come possiamo certo supporre) che OP non sia generatrice comune ai coni anzidetti proiettanti da O le C', evidentemente i punti di C sovrapposti in P imporrebbero alle C', tutti insieme, una condizione unica: il passaggio del cono che da O proietta questa C' per la generatrice OP. E questo non è possibile.

La curva (iperellittica) C_0 *intersezione di* F *con un iperpiano generico passante per* O *non potrà avere dunque punti multipli, all'infuori di* O *stesso e di punti doppi infinitamente vicini ad* O.

Queste curve C_0, di ordine n e genere $p_1 \leq p$, sono proiettate doppiamente da O secondo coni razionali normali di ordine $r-3$ (essendo sempre r la dimensione dello spazio cui appartiene la varietà M_3^n). Le C_0 avranno pertanto il punto O come multiplo di ordine $n-2(r-3)$; e avranno altresì, infinitamente vicini ad O, $(n-p_1-1)-(r-3)$ punti doppi [13] nell'intorno di 1° ordine di O, oppure anche, tutti o in parte, fra loro consecutivi.

Queste stesse curve, da $r-4$ loro punti generici, sono proiettate secondo curve piane di ordine $m = n-r+4$, aventi un punto (proiezione di O) di multiplicità $m-2 = n-r+2$, e eventualmente (come la C_0) punti doppi infinitamente vicini a questo. Perciò la superficie F, anche da $r-4$ suoi punti generici, verrà proiettata sopra S_3 secondo una superficie F^* di ordine m, avente un punto O^* di multiplicità $m-2$, e le cui ulteriori singolarità potranno essere soltanto:

a) rette multiple passanti per O^* (proiezioni di rette già multiple per F e passanti per O);

---

(13) Poichè la curva C_0, di ordine n e genere p_1, contiene una serie lineare (o involuzione razionale) g_2^1, le congiungenti delle coppie di punti di questa involuzione formano una rigata di ordine $\leq n-p_1-1$; e se quest'ordine è inferiore a $n-p_1-1$, la sua differenza da questo massimo dà il numero dei punti doppi della curva che assorbono i due elementi di uno stesso gruppo della g_2^1. Nel caso presente, questi punti doppi sono tutti infinitamente vicini ad O.

b) punti doppi e linee doppie infinitesime infinitamente vicini ad O^* (con certe restrizioni, anche fra loro susseguentisi).

Siccome però le superficie di ordine $m - 3$ aggiunte ad F^* devono incontrare F^* secondo le curve aggiunte alle sezioni piane di F^* medesima, le quali ultime appartengono all'involuzione I_2, così le anzidette superficie aggiunte saranno coni di vertice O^*, e avranno perciò in O^* la multiplicità $m - 3$, anzichè soltanto $m - 4$; e un esame più dettagliato mostra che queste singolarità, infinitamente vicine ad O^*, *non* impongono alle aggiunte in parola condizioni ulteriori;

c) punti multipli propri a distanza finita da O^*, eventualmente con altri punti o linee multiple infinitesime ad essi infinitamente vicini. Ma queste ultime singolarità (provenienti da altre consimili esistenti sopra F) si può dimostrare facilmente che sono tutte inessenziali; perchè, o si limitano a punti doppi isolati, cui sono successivi tutt'al più altri punti doppi, in numero finito; oppure si tratta di punti congiunti ad O^* da rette multiple, e la cui influenza sui generi della superficie F^* è identica a quella che spetta a queste medesime rette.

Tutto ciò premesso, dico ora che: *I coni di ordine* m — 3 *aggiunti alla superficie* F* *sono razionali* ([14]). E infatti, se tali non fossero, essi, considerati come enti ∞^1 della stella O^*, avrebbero almeno un cono aggiunto di ordine $m - 6$; tale perciò che ogni retta della stella O^* la quale sia k^{pla} per F^* e, per conseguenza, $(k-1)^{\text{pla}}$ per i coni aggiunti, sia $(k-2)^{\text{pla}}$ per questo nuovo cono. Aggiungendo a tale cono il cono di ordine $m - 2$ tangente alla superficie F^* nel punto O^*, per il quale le rette k^{ple} di F^* (tutte uscenti da O^*) sono anche k^{ple}, e le rette proiettanti i punti doppi infinitamente vicini ad O^*, sia isolati che formanti linee doppie infinitesime, sono tutte doppie, si avrà un cono complessivo di ordine $2m - 8$, il quale costituirebbe una superficie *biaggiunta* ad F^*. Tale superficie non potendo esistere, poichè F^* è razionale, risulta assurda l'ipotesi che non siano razionali i coni di ordine $m - 3$ aggiunti ad F^*. Per conseguenza:

Il sistema lineare $|C'|$ *aggiunto alle sezioni iperpiane di* F *si compone di curve anch'esse iperellittiche, incontrantisi a due a*

([14]) Castelnuovo, Memoria citata alla nota ([12]), n° 11.

due secondo p — 2 *coppie dell'involuzione* I_2. Invero i coni aggiunti ad F^*, essendo razionali e formando un sistema lineare completo di dimensione $p-1$, devono incontrarsi a due a due secondo gruppi di $p-2$ generatrici.

5. — Il sistema lineare $|C'|$, aggiunto alle sezioni iperpiane della superficie F, permette di rappresentare questa superficie sopra una superficie doppia dello spazio S_{p-1}, di ordine $p-2$, a curve-sezioni razionali, sulla quale alle C, sezioni iperpiane di F, corrisponderanno curve canoniche di genere p (semplici, di ordine $2p-2$).

Questa superficie φ^{p-2} sarà una rigata razionale normale, oppure, nello spazio S_5, e perciò nel solo caso $p=6$, la ben nota *superficie di* VERONESE, rappresentata sul piano dal sistema lineare ∞^5 delle coniche. Quest'ultimo caso si esclude però facilmente. Infatti alle ∞^2 coniche doppie della superficie φ^4, incontrate dalle immagini delle C (le quali sono di ordine 10) in 5 punti, corrisponderebbero sopra F curve iperellittiche di 5° ordine, perciò di genere ≤ 3. Queste curve incontrerebbero la curva doppia dell'involuzione I_2 in un numero di punti non superiore a *otto*; e perciò, riferendo la φ^4 a sua volta ad un piano nel modo consueto, la F risulterà rappresentata sopra un piano doppio con una curva di diramazione di ordine anche non superiore ad *otto*. Tenendo conto pertanto dei tipi ai quali questa curva deve potersi ridurre (poichè F è razionale) ([15]), se ne trae che la nominata curva di diramazione potrà essere soltanto:

1) una curva di 8° ordine con un punto sestuplo, oppure con tre punti quadrupli, ciascuno dei quali può essere sostituito da due punti tripli infinitamente vicini;

2) una curva di 6° ordine con un punto quadruplo, oppure con due punti tripli infinitamente vicini;

3) una curva di 4° ordine o di 2° ordine.

In ciascuno di questi casi, al sistema lineare $|C'|$ della superficie F corrisponderebbe nel piano doppio il sistema lineare ∞^5 delle coniche doppie. E si verifica facilmente che quest'ultimo sistema, nei casi enumerati, non è mai l'aggiunto d'un sistema lineare.

([15]) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, " Rendic. Circ. Matem. di Palermo ", t. 14 (1900), p. 290.

6. — Supponiamo invece che la superficie φ^{p-2} di S_{p-1} considerata al n° precedente, e sulla quale, pensata come doppia, abbiamo rappresentata la F, sia una rigata razionale normale. Essendo già note tutte le superficie razionali a sezioni di genere *tre* [16], perciò anche quelle del tipo che a noi interessa, possiamo supporre $p \geq 4$.

Ora, *una curva canonica di genere* p *tracciata sopra una rigata razionale normale dello spazio* S_{p-1} (e per noi $p-1 \geq 3$) *deve necessariamente incontrare ogni generatrice di questa rigata in* TRE *punti.* Infatti, indicato questo numero di punti con k, si avrà sulla curva stessa una serie lineare g_k^1 (completa, speciale), la cui residua è una g_{2p-2-k}^{p-3}; e ciò richiede sia $2p-2-k > 2(p-3)$, cioè appunto $k < 4$.

Alle generatrici (doppie) della rigata φ^{p-2} *corrispondono dunque sopra* F *curve di 3° ordine* (formanti un fascio).

Tali curve di 3° ordine sono certamente ellittiche e perciò piane. Infatti, se fossero razionali, la superficie F si potrebbe rappresentare sul piano in modo che a queste curve corrispondano rette di un fascio; alle sezioni iperpiane di F dovrebbero perciò corrispondere, in questo piano, curve di un certo ordine m colla multiplicità $m-3$ nel centro del fascio. E il sistema aggiunto $|C'|$ si comporrebbe allora di curve razionali. Inoltre le curve di 3° ordine suddette della superficie F, avendo per immagini sulla rigata φ^{p-2} linee doppie, apparterranno all'involuzione I_2, che sulla superficie F è segnata da rette uscenti dal punto O; per questo punto passeranno dunque i loro piani, e anzi le stesse ∞^1 curve, per le quali O costituirà pertanto una varietà unisecante.

Potremo dunque rappresentare la superficie F sul piano in modo che al fascio di cubiche esistente su di esse corrisponda un fascio di curve piane di un certo ordine $3k$ con 9 punti base k^{pli} [17]. E l'esistenza, pel fascio di cubiche, di una varietà

---

(16) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*, „ Atti R. Acc. Scienze Torino „, vol. 25 (1890). In questa Nota è posta da principio una restrizione, che è soddisfatta (come si è riconosciuto in seguito) per tutte le superficie *regolari*; fra le superficie ivi determinate sono perciò comprese tutte quelle razionali.

(17) A questo tipo (per un certo valore di k) può infatti ridursi, per

unisecante, permette di concludere che dovrà essere $k=1$, ossia che al fascio di cubiche sopra F dovrà corrispondere anche un fascio di cubiche piane. — D'altra parte le curve C', aggiunte alle sezioni iperpiane di F, hanno per immagini sulla rigata (doppia) φ^{p-2} le sezioni iperpiane di questa, le quali sono bisecanti le generatrici (considerate pure come doppie); alle C' corrisponderanno dunque nel medesimo piano rappresentativo curve di un certo ordine y e con multiplicità β_i nei punti basi del fascio di cubiche, tali che sia:

$$3y - \Sigma\beta_i = 2.$$

Il sig. Castelnuovo (18) ha determinati appunto tutti i sistemi lineari di curve piane soddisfacenti a queste condizioni; e in particolare quelli fra essi che sono, come a noi occorre, aggiunti di un sistema lineare *semplice*. Di questi ultimi sistemi (prescindendo dalla rete di cubiche con sette punti basi, che è aggiunta di un sistema di genere 3) ve ne è uno solo: *il sistema lineare* ∞^3 *delle sestiche piane con otto punti basi doppi*, il quale è l'aggiunto d'*un sistema di curve piane d'ordine 9 e genere 4, avente gli stessi otto punti base come tripli, più eventualmente punti basi semplici.*

Quanto alle superficie a sezioni di genere 3, sempre del tipo speciale che a noi occorre, esse saranno tutte e soltanto quelle nelle quali le quartiche aggiunte alle sezioni iperpiane (o piane) formano una rete di grado 2; il che avviene quando le quartiche stesse hanno genere 1 o 2 (19). E tali sono:

---

mezzo di una trasformazione cremoniana, qualunque fascio di curve piane ellittiche. La prima dimostrazione fu data dal Bertini, "Annali di Matematica", (2), vol. 8 (1877), p. 248); e il Ferretti, "Rendic. Circ. Mat. di Palermo", t. 16 (1902), p. 236, confermò il risultato, in modo da eliminare i dubbi sorti più tardi circa taluni casi di punti multipli infinitamente vicini.

(18) Cfr. la prima nota al n° 4 della "Aggiunta alla Memoria di Enriques", citata (12).

(19) Dal signor Castelnuovo, nella nota citata (16): *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre*, queste superficie sono designate come di *2ª specie* e di *3ª specie.* Quelle di *1ª specie* hanno invece, come curve aggiunte alle sezioni iperpiane, delle quartiche razionali, formanti perciò una rete omaloidica; e quelle di *4ª specie* non sono razionali.

1) *La superficie di 8° ordine di* S_6 *rappresentata dal sistema lineare delle sestiche con sette punti basi doppi, e sue proiezioni;*

2) *La superficie di 4° ordine* $F_4^{(2)}$ *di* NOETHER ([20]), *rappresentata dal sistema delle curve piane di 7° ordine aventi a comune un punto triplo e nove punti doppi, tutti appartenenti ad una cubica;*

3) *La superficie di 4° ordine* $F_4^{(3)}$ *di* NOETHER *rappresentata dal sistema delle curve piane di 9° ordine aventi a comune otto punti tripli, un punto doppio, e un punto semplice, anche tutti appartenenti ad una cubica.*

A queste va aggiunto l'unico caso dianzi trovato di superficie del tipo richiesto e a sezioni di genere ≥ 4 (e anzi precisamente a sezioni di genere 4):

4) *La superficie di 9° ordine dello spazio* S_6 *rappresentata dal sistema lineare delle curve di 9° ordine con otto punti basi tripli, e sue proiezioni.* Fra queste proiezioni vi è anche la superficie $F_4^{(3)}$ di NOETHER testè nominata ([21]).

Le varietà M_3^n, *corrispondenti al caso b) del n° 2, hanno dunque come sezioni superficie dei soli tipi* 1), 2) *e* 4) *testè enumerati.*

Inoltre, se due varietà M_3^n di uno di questi tipi sono tali che le superficie loro sezioni generiche si possano ottenere l'una come proiezione dell'altra, la stessa relazione di proiezione (come facilmente si dimostra) sussisterà pure fra le due varietà considerate.

Le varietà da determinarsi in relazione al caso *b)* del n° 2 possono dunque limitarsi a quelle (luoghi di ∞^2 coniche contenuti in piani per una retta) che hanno come sezioni: 1) La superficie F^8 di S_6, rappresentata dal sistema delle sestiche piane con 7 punti basi doppi; 2) La superficie F^9 di S_6 rappre-

---

([20]) NOETHER, *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung*, " Mathem. Annalen ", vol. 33 (1889), p. 546. La $F_4^{(1)}$ (superficie con tacnodo) è proiezione della F^8 di cui al caso 1).

([21]) Dalla rappresentazione piana di queste ultime superficie si rileva immediatamente che le loro sezioni iperpiane contengono un'unica serie lineare g_3^1 (anzichè due, generalmente distinte), segata dal fascio di cubiche che abbiamo riconosciuto esistere sopra F; esse sono dunque riferibili a sestiche canoniche contenute in coni quadrici.

sentata dal sistema delle curve di 9° ordine con 8 punti basi tripli; 3) La superficie $F_4^{(2)}$ di NOETHER. Tutte le altre varietà di questa categoria saranno proiezioni di una delle prime due fra queste.

7. — *La superficie* F^8 *di* S_6 *rappresentata da un sistema di sestiche piane con* 7 *punti basi doppi è intersezione del cono proiettante una superficie del* 4° *ordine di* VERONESE, *con una quadrica* (non passante pel vertice di quel cono) ([22]). Perciò una varietà M_3^8 di S_7 del tipo che a noi interessa sarà contenuta nel cono di 4° ordine Γ^4 che da una retta s proietta una superficie di VERONESE, e sarà l'intersezione di quest'ultimo cono con una quadrica. Le ∞^2 coniche della varietà M_3^8 incontrano la retta s (asse del cono Γ) negli stessi due punti A, B (distinti o coincidenti); e la varietà proposta è razionale, costituendo ciascuno di questi punti, per le ∞^2 coniche, una varietà unisecante.

8. — La superficie F^9 di S_6 rappresentata dal sistema delle curve piane di 9° ordine con otto punti basi tripli contiene un fascio di cubiche γ, alle quali corrispondono, nel piano, le cubiche passanti per gli stessi 8 punti suddetti.

Tale superficie è intersezione del cono proiettante una rigata razionale normale R^4 *a direttrice rettilinea, con una varietà cubica passante per tre arbitrari fra i piani generatori di quel cono.* Il vertice del cono è punto semplice della superficie F^9, ed è punto di flesso per tutte le cubiche γ.

La varietà M_3^9 di S_7 che a noi interessa è perciò contenuta nel cono Γ^4 che proietta, da una retta s, una rigata R^4 con direttrice rettilinea; incontra i piani di questo cono secondo coniche, e i suoi S_3 secondo superficie cubiche φ^3 passanti (semplicemente) per la retta s. Essa è intersezione del cono Γ^4 con una varietà cubica V^3 di S_7 passante per tre di quegli spazi S_3; questi S_3 sono contenuti in un medesimo S_6, che è tangente alla varietà lungo l'intera retta s; sicchè la varietà stessa avrà sopra s due punti doppi A, B, distinti o coincidenti, i quali saranno pure doppi per tutte le φ^3, e comuni alle ∞^2 coniche contenute nella M_3^9. Ciascuna delle φ^3 ha lungo la retta s un piano osculatore (e non soltanto tangente) fisso; questi ∞^1 piani

---

([22]) CASTELNUOVO, n° 7 della nota citata ([16]).

formano fascio attorno ad s, entro lo spazio S_3 direttore del cono Γ^4 (ossia proiettante la direttrice rettilinea di R^4).

Le superficie $(F+F')$ sono di 6° ordine, a sezioni di genere due, e si incontrano a due a due secondo coppie di coniche.

Anche questa varietà M_3^9 è razionale; e si può rappresentarla sopra S_3 proiettandola da uno dei due punti A e B secondo un cono Δ^4 di S_6 (sezione di Γ^4), e proiettando a sua volta quest'ultimo cono da una retta e da un punto rispett. di due suoi piani generatori.

9. — Consideriamo ora in S_4 una varietà M_3^4 la cui sezione generica sia una $F_4^{(2)}$ di Noether. Questa superficie ha due punti doppi infinitamente vicini, la cui congiungente l non appartiene ad essa, ma è tale che ogni piano passante per questa retta incontra la superficie secondo una quartica razionale avente un terzo punto doppio consecutivo ai due primi. La varietà M_3^4 avrà pertanto due rette doppie infinitamente vicine d, d' (la seconda anzi tacnodale), le quali si riconosce facilmente che dovranno stare in un piano. Il piano delle due rette doppie d, d' non apparterrà alla varietà M_3^4; e ogni spazio S_3 passante per esso incontrerà la M_3^4 secondo una superficie Ψ^4 a curve-sezioni razionali, avente tre rette doppie infinitamente vicine, e incontrata dai piani del fascio d secondo coniche (in generale irriducibili). Queste superficie sono particolari *superficie di* Steiner, e ciascuna di esse ha sulla retta d un punto triplo, nel quale le coniche segate dai piani passanti per d sono tutte tangenti a d stessa. Perciò:

o la M_3^4 ha anch'essa sopra d un punto triplo A, che è pure tale per tutte le Ψ^4; tutte le ∞^2 coniche della M_3^4 sono allora tangenti alla retta d in questo punto, mentre in ogni altro punto di d la M_3^4 ha un medesimo spazio tangente (doppio), pure fisso;

oppure le ∞^1 superficie Ψ^4 hanno punto triplo variabile sopra d, e ognuna di esse è luogo delle ∞^1 coniche tangenti a d nel proprio punto triplo. Lo spazio di ogni Ψ^4 è allora tangente alla M_3^4 nel punto triplo della Ψ^4 stessa; e la punteggiata d risulta riferita proiettivamente al fascio degli S_3 tangenti ad essa in quei singoli punti.

Nel 1° caso, la M_3^4, avendo un punto triplo, è certamente razionale.

Nel 2° caso, uno spazio S_3 generico passante per la retta doppia d incontrerà la M_3^4 secondo una superficie φ^4 con retta doppia, ma senza punto triplo, luogo di ∞^1 coniche tutte tangenti alla retta d. In questo spazio, ogni piano passante per d contiene una conica di φ^4, e per ogni punto di d ne passa anche una, ivi tangente a d stessa. Di queste coniche, *quattro* (generalmente distinte) si spezzeranno in due rette, uscenti da uno stesso punto di d; e questi quattro punti (A_1, A_2, A_3, A_4) saranno gli stessi per tutte quante le ∞^2 superficie φ^4, perchè gli spazi ivi tangenti alla M_3^4 dovranno incontrare questa varietà secondo superficie di STEINER contenenti rette semplici, perciò superficie degenerate, e, per conseguenza, fisse. Queste intersezioni saranno coni razionali di 4° ordine aventi nella posizione d tre generatrici doppie consecutive.

Anche questa M_3^4 è razionale, poichè le ∞^2 coniche in essa contenute hanno la retta d come varietà unisecante. Si può rappresentarla sopra uno spazio S_3, proiettando ciascuna delle sue ∞^1 superficie di STEINER (Ψ') dal proprio punto triplo. La rappresentazione è data da un sistema di superficie del 5° ordine aventi a comune: 1) Un punto triplo O; 2) Una retta doppia infinitesima, infinitamente vicina a questo punto; 3) Un secondo punto triplo O_1 infinitamente vicino ad O e contenuto nella precedente retta doppia infinitesima, più un'ulteriore retta doppia infinitesima consecutiva ad O_1; 4) La retta $OO_1 \equiv s$, e quattro quartiche contenute in piani per essa [23].

10. — Accenniamo ora come si possa dimostrare quanto si è affermato riguardo al caso *c)* del n° 2; vale a dire che il sistema $|F+F'|$, quando non è composto mediante una congruenza di linee, non può appartenere a una involuzione $\boldsymbol{I}_k$ della varietà M_3^n.

Supponiamo, se possibile, che il sistema $|F+F'|$ appartenga a una involuzione $\boldsymbol{I}_k$, e consideriamo il sistema Γ formato dalle ∞^3 rette che congiungono a due a due i punti di

---

[23] MONTESANO, *Su alcune superficie omaloidiche di 4° e 5° ordine prive di linee multiple,* “ Rendic. Acc. di Napoli „, adunanza 23 giugno 1900; PENSA, *Sulle superficie razionali del 5° ordine,* “ Ann. di Matem. „ (3), vol. 6 (1901), p. 249, n° 20.

ogni singolo gruppo della I_k medesima (o eventualmente di quella involuzione irriducibile di ordine inferiore, mediante la quale I_k fosse composta). Supponiamo inoltre, se possibile, che ogni iperpiano dello spazio S_r contenga qualche retta, e perciò una semplice infinità di rette del sistema Γ. La curva sezione della M_3^n con un S_{r-2} generico passante per una retta di Γ conterrà una coppia di punti la quale, se tale curva ha genere ≥ 2, imporrà una sola condizione a un gruppo canonico obbligato a contenerla; tale curva è dunque certo iperellittica (in particolare ellittica o razionale). Di più, la curva stessa avrà il genere inferiore a quello (p) della curva-sezione più generale; perchè, nell'ipotesi contraria, le superficie $(F + F')$ segherebbero su di essa la *sola* serie canonica, e pertanto, essendo questa serie (poichè si tratta di curva iperellittica) composta mediante una g_2^1, *ogni* coppia di tale g_2^1 imporrebbe alle $(F + F')$ una sola condizione, e sarebbe perciò contenuta in un gruppo di I_k; per conseguenza ogni S_{r-2} passante per una retta del sistema Γ dovrebbe contenere ∞^1 di cotali rette, il che non è possibile. — Consideriamo ora, sulla superficie F intersezione di M_3^n con un iperpiano generico σ, queste curve segate da spazi S_{r-2} passanti per rette del sistema Γ; avendo esse genere $< p$, i loro spazi S_{r-2} o saranno tutti tangenti a F, oppure passeranno per qualche punto multiplo proprio; e qui si tratterà certamente di questo secondo caso. Gli spazi S_{r-2} considerati sono dunque, entro σ, quelli che passano per un certo punto P, o per uno fra più punti isolati; e per quel punto, o rispett. per uno fra questi, dovrà passare ogni retta del sistema Γ contenuta in σ.

Considerazioni ulteriori, che non ci fermiamo a sviluppare, provano che da un tal punto P la superficie F deve proiettarsi *doppiamente*. — Pertanto la F, se di ordine n e contenuta in S_3, avrà il punto P come multiplo di ordine $n - 2$; e se appartiene a uno spazio superiore, si proietterà da un conveniente numero di suoi punti generici in una superficie consimile. Sopra quest'ultima, il sistema aggiunto alle sezioni piane è segato dalle aggiunte φ^{n-3}, le quali sono monoidi, aventi il punto P come $(n - 4)^{\text{plo}}$ (e non sono certo coni, se no quell'aggiunto apparterrebbe a una involuzione sopra F). Dal punto P escono però ∞^1 rette del sistema Γ, o proiezioni di queste, per ciascuna delle quali le due intersezioni ulteriori con F, generalmente distinte, impongono alla φ^{n-3} una condizione unica. In altri termini, il passaggio per una di queste rette implica per le φ^{n-3} una sola condizione; il che vuol dire che le φ^{n-3} devono contenere già tutte una direttrice fissa del cono formato da quelle rette; direttrice eventualmente anche infinitamente vicina a P (se questo cono fosse tangente in P a tutte le φ^{n-3}), ma in ogni caso non appartenente ad F.

Consideriamo ora la curva (γ) intersezione di F con un piano generico passante per P. Le curve segnate dalle φ^{n-3} sopra tale piano formeranno un sistema lineare che ha qualche punto base non appartenente ad F, e perciò non appartenente nemmeno a γ. D'altra parte le curve stesse sono razionali, sicchè i punti basi impongono loro condizioni tutte distinte. Per conseguenza la serie lineare che tali curve staccano sopra γ dovrebbe essere *incompleta*.

Questo invece non è possibile. E precisamente: *Se un sistema lineare* $|\gamma|$ *di curve piane* (nel nostro caso, il sistema che rappresenta la superficie F) *ha una curva fondamentale connessa* η (immagine del punto P), *il sistema aggiunto ad esso segna sopra una curva residua generica* $\gamma - \eta$ *una serie lineare ancora completa* [24]. Omettiamo la dimostrazione, la quale, sostanzialmente, emerge da noti risultati di M. Noether [25] sulle curve algebriche riducibili.

Rimane pertanto escluso che l'involuzione I_k nella varietà M_3^n sia tale che ogni iperpiano contenga la retta congiungente almeno una sua coppia di punti.

Supponiamo adesso invece che un iperpiano generico di S_r non contenga rette del sistema Γ. Vi saranno allora ∞^{r-1} iperpiani, ciascuno dei quali conterrà una doppia infinità di tali rette; e questi incontreranno la varietà M_3^n secondo superficie contenenti ∞^2 gruppi (totali o parziali) dell'involuzione I_k, e sulle quali perciò il sistema aggiunto alle sezioni iperpiane appartiene pur esso a una involuzione. Lo stesso ragionamento già usato al n° 3 permette anche qui di concludere

---

(24) Si avrebbe invece sulla curva residua una serie incompleta quando si staccassero da $|\gamma|$ due diverse curve fondamentali, ossia si considerasse sopra F una sezione passante per due diversi punti multipli propri.

(25) Noether, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, " Acta Mathematica ", vol. 8 (1886), p. 161.

che il sistema Γ si comporrà di rette passanti per un punto fisso O; gli iperpiani che contengono rette di questo sistema saranno quelli che passano per O; e le superficie loro intersezioni colla M_3^n saranno perciò ancora razionali. *Tali superficie devono dunque appartenere a uno dei tipi determinati al n° 6, tutti a curve-sezioni di genere 3 o 4; e l'involuzione I_k è di 2° ordine.* Inoltre, poichè ogni curva-sezione della varietà M_3^n è congiunta ad O da un iperpiano, il quale deve incontrare quella varietà secondo una superficie di uno dei tipi indicati, *la superficie sezione generica della varietà* M_3^n *avrà anch'essa le curve-sezioni di genere 3 o 4, pur avendo come aggiunto a queste sezioni un sistema lineare semplice; e dovrà ridursi come caso particolare* — se l'iperpiano segante passa per O — *a una delle superficie indicate alla fine del n°* 6.

Questo risultato riduce senz'altro i casi eventualmente possibili a un numero molto limitato; e si verifica facilmente che nessuno di essi conduce a varietà M_3^n soddisfacenti a tutte le condizioni sopraindicate.

11. — Rimane da dare, infine, la dimostrazione di cui alla lettera *a)* del n° 2; cioè che in nessun caso, nella proposta varietà M_3^n, il sistema di superficie $|F+F'|$, se di grado 3 e a intersezioni variabili ellittiche, può rappresentare una varietà priva di punti doppi. In altri termini, si tratta di verificare che sopra una V^3 di S_4 priva di punti doppi non esiste un sistema lineare semplice di superficie razionali Φ, tali che il sistema $|\Phi+\Phi'|$, depurato delle eventuali parti fisse, coincida col sistema delle sezioni iperpiane; vale a dire tale che il sistema doppio $|2\Phi|$ abbia queste stesse sezioni per aggiunte (pure).

Supponiamo che esistano sopra V^3 superficie Φ così fatte: sappiamo che esse saranno intersezioni complete di V^3 con varietà di un certo ordine m ([26]). Le intersezioni variabili di queste superficie $\Phi^{(3m)}$ saranno curve di genere 5 (essendo il sistema $|\Phi+\Phi'|$ di dimensione 4) sulle quali gli iperpiani di S_4 segano

([26]) FANO, *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. 39 (1904); SEVERI, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, " Rendiconti R. Acc. dei Lincei " (5), vol. 15_2 (1906), p. 691.

la serie canonica; perciò di ordine 8 (così dette " curve canoniche „ di genere 5).

Possiamo supporre $m \geq 3$; perchè, se fosse $m = 2$, le Φ sarebbero superficie di 6° ordine segate sopra V^3 da certe quadriche, e aventi a comune una linea di 4° ordine, eventualmente riducibile; ed è facile verificare direttamente che con tali Φ^6 non è possibile formare un sistema lineare soddisfacente alle varie condizioni richieste.

Sulle superficie Φ^{3m} $(m \geq 3)$ il sistema lineare caratteristico di $|\Phi|$, essendo composto di curve di ordine 8, non potrà certo contenere il proprio aggiunto (puro), che è segato dagli iperpiani, ed è perciò di ordine $3m \geq 9$. Il genere π di quest'ultimo sistema soddisfa dunque alla disuguaglianza ([27]): $\pi < 2 . 5 - k - 1$, dove k è la dimensione *virtuale* del sistema lineare caratteristico sopra una Φ^{3m}. Ora quest'ultimo carattere è la differenza fra la dimensione effettiva del sistema, che è ≥ 3, e la sovrabbondanza, cioè l'indice di specialità della serie caratteristica. E questa serie, che è almeno ∞^2, se è speciale e perciò contenuta nella g_8^4 canonica, può essere soltanto una g_7^3 o g_6^2 (con indice di specialità *uno*), oppure una g_5^2, con indice di specialità *due*: quest'ultimo caso però si esclude facilmente ([28]).

Nella diseguaglianza scritta di sopra sarà dunque in ogni caso $k \geq 2$, e perciò $\pi \leq 6$.

D'altra parte, sopra una sezione iperpiana generica di V^3 si considerino i due sistemi lineari (eventualmente incompleti) formati dalle curve ivi segate dalle Φ^{3m} e dalle superficie del

---

([27]) Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, " Mem. della R. Accad. di Torino „, (2), t. 42 (1891), n° 29.

([28]) Invero la $M_3{}^n$ proposta sarebbe allora di 5° ordine, in S_4, a curve-sezioni di genere 5, dunque con piano doppio (prescindendo dalle singolarità ulteriori, necessarie a rendere razionali le superficie sezioni); le sue sezioni conterrebbero perciò un fascio di cubiche ellittiche, alle quali, sulle Φ^{3m} di V^3 immagini di quelle sezioni, corrisponderebbero anche cubiche. Tali Φ^{3m}, essendo luoghi di ∞^1 cubiche piane, potranno dunque segarsi sopra V^3 mediante le varietà, necessariamente di ordine m, luoghi (serie razionali ∞^1) dei piani di quelle cubiche; varietà che, se $m \geq 3$, non sono normali, sicchè non sarebbero allora normali nemmeno le Φ^{3m} anzidette. E ciò contradice all'ipotesi che, sopra una Φ^{3m}, il sistema delle sezioni iperpiane sia l'aggiunto di altro sistema lineare (il sistema caratteristico di $|\Phi|$), e perciò completo.

sistema doppio $|2\Phi|$. Il primo di questi sistemi è di genere π e di grado 8; sarà perciò $2\pi + 7$ il genere del secondo, vale a dire il genere delle curve canoniche delle superficie (2Φ); più esattamente, delle curve canoniche *pure*, cioè astrazion fatta dalle loro eventuali componenti fisse ([29]). Il grado del sistema di queste stesse curve, sulle superficie (2Φ), è l'ordine di queste superficie, cioè $6m$. Se si trattasse del sistema canonico completo (incluse le eventuali componenti fisse), il primo di questi due caratteri sarebbe il genere lineare $p^{(1)}$ delle superficie (2Φ), e il secondo sarebbe il carattere $p^{(2)}$, che è eguale al precedente diminuito di una unità; si avrebbe dunque:

$$6m = 2\pi + 6, \qquad \text{ossia} \qquad \pi = 3\,(m - 1).$$

Data tuttavia la possibilità che vi siano, nel sistema canonico, parti fisse, potremo soltanto scrivere la diseguaglianza ([30]):

$$6m \leq 2\pi + 6 \qquad \text{ossia} \qquad \pi \geq 3\,(m - 1),$$

la quale, insieme colle precedenti $m \geq 3$, $\pi \leq 6$, lascia possibile l'unica soluzione: $m = 3$, $\pi = 6$.

Se sulle varietà V^3 *esiste un sistema lineare* $|\Phi|$ *quale a noi occorre, le sue superficie* Φ^{3m} *potranno soltanto essere di ordine 9, colle curve-sezioni* (che sono le aggiunte delle C^8 caratteristiche) *di genere 6.*

I casi possibili sono così ridotti a un numero finito e molto limitato. Questo numero può venire ulteriormente ridotto da considerazioni sui caratteri invariantivi delle superficie Φ e del relativo sistema lineare caratteristico; per questi stessi caratteri si trovano così limitazioni ulteriori, tali da non consentire più alcuna soluzione.

([29]) Queste eventuali componenti fisse sarebbero “*ausgezeichnete Curven*„ secondo M. Noether (*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, II, “Math. Annalen„, vol. 8 (1875), p. 495; cfr. in particolare p. 521); ma non *curve eccezionali* nel senso odierno di questa parola, cioè trasformabili birazionalmente (ciascuna) nell'intorno d'un punto semplice della superficie.

([30]) Castelnuovo e Enriques, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, “Mathem. Annalen„, vol. 48 (1907), p. 241. Cfr. in particolare § 24.

12. — I risultati ottenuti nel presente lavoro possono pertanto così riassumersi:

1) *Le varietà a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali sono tutte rappresentabili birazionalmente sullo spazio* S_3, *fatta solo eccezione eventualmente per la varietà cubica di* S_4 *priva di punti doppi;*

2) *Se la varietà cubica anzidetta costituisce una effettiva eccezione alla proprietà suindicata* (come si ha ragione di ritenere probabile), *essa gode invece di quest'altra proprietà caratteristica: che cioè su di essa ogni sistema lineare semplice di superficie razionali è un sistema* ∞^4, *di grado 3, a intersezioni variabili ellittiche.* Essa si distinguerebbe dunque dalle varietà razionali per il fatto di contenere un unico tipo di sistema lineare semplice di superficie razionali;

3) Designando per brevità ogni sistema lineare di superficie del tipo $|F+F'|$ come " aggiunto di rango uno „ del corrispondente sistema $|F|$, si ha altresì: *L'aggiunzione di rango uno, applicata a un sistema lineare semplice di superficie razionali dello spazio* S_3, *e successivamente a quelli da esso ricavati con una o più operazioni consimili, conduce sempre a nuovi sistemi di superficie razionali, all'infuori eventualmente dell'ultimo. E dopo un numero finito di operazioni si perviene sempre a un sistema di uno dei due tipi seguenti:*

a) *Sistema lineare di superficie razionali a intersezioni variabili iperellittiche, in particolare ellittiche o razionali;*

b) *Sistema lineare equivalente, per trasformazione Cremoniana, a un sistema di coni collo stesso vertice.* È notevole che ogni qual volta si giunge a un sistema di superficie a intersezioni variabili riducibili, perciò appartenente ad una congruenza di linee, sempre questa congruenza è trasformabile in una stella di rette.

Torino, luglio 1918.