GINO FANO

Osservazioni sopra il sistema aggiunto puro di un sistema lineare di curve piane

Rendiconti Circ. Mat. Palermo, Vol. **40** (1915), p. 29–32

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1915_3>

OSSERVAZIONI SOPRA IL SISTEMA AGGIUNTO PURO DI UN SISTEMA LINEARE DI CURVE PIANE.

Nota di **Gino Fano** (Torino).

Adunanza del 13 giugno 1915.

1. Dato un sistema lineare irriducibile $|\mathbf{C}|$ di curve piane algebriche di ordine n, è noto che, per una curva di ordine $n-3$, la condizione di essere *aggiunta* alle $\mathbf{C}$, ossia di avere la multiplicità $k-1$ in ogni punto base k^{plo} del sistema proposto, implica precisamente $\sum \frac{k(k-1)}{2}$ condizioni semplici, tutte distinte; in altri termini: *Il sistema delle curve di ordine $n-3$ aggiunte al sistema $|\mathbf{C}|$ è regolare* (qualora si considerino come virtualmente inesistenti gli eventuali punti basi ulteriori, conseguenze dei primi) [1]).

Il sistema aggiunto di ordine $n-3$ può contenere tuttavia delle componenti fisse, le quali, com'è noto [2]), sono curve fondamentali improprie del sistema proposto $|\mathbf{C}|$. Staccandone queste curve $\xi, \eta, \ldots$, rimane il sistema *aggiunto puro* $|\mathbf{C}'|$, il quale è in pari tempo aggiunto e aggiunto puro del sistema $|\mathbf{C}-(\xi+\eta+\cdots)|$, ottenuto togliendo da $|\mathbf{C}|$ le curve fondamentali improprie suddette. Questo sistema $|\mathbf{C}'|$ è irriducibile ogni qualvolta le $\mathbf{C}$ non siano iperellittiche; dal qual caso, d'altronde notissimo, qui prescindiamo. Il sistema $|\mathbf{C}'|$, considerato con tutti i suoi punti basi come effettivamente esistenti, non è però sempre regolare, ma può essere invece *sovrabbondante*; e questo fatto può dipendere da due ragioni:

---

[1]) Sotto quest'ultima forma, la proposizione si estende anzi a una superficie qualunque, e, sopra questa, al sistema aggiunto a una curva qualunque atta a definire un sistema continuo di grado >0; cfr. F. SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, vol. XVII, 2° semestre 1908, pp. 465-470).

Per il sistema aggiunto alle sezioni piane di una superficie, questa proposizione era stata già dimostrata, per altra via, meno diretta, dal PICARD. Vedi É. PICARD, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXIX (1905), pp. 275-286] e *Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLI (2e semestre 1905), pp. 5-8].

[2]) G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, vol. XLII (1891), pp. 3-43]; n. 27.

1°) I punti basi di $|\mathbf{C}'|$, i quali cadono in punti anche basi per $|\mathbf{C}|$, impongono alle $\mathbf{C}'$ condizioni non più tutte distinte. Ciò avviene sempre e solo quando il sistema $|\mathbf{C} - (\xi + \eta + \cdots)|$, del quale $\mathbf{C}'$ è aggiunto (più precisamente, aggiunto di ordine $m - 3$, se m è l'ordine del precedente), è riducibile.

2°) Il sistema $|\mathbf{C}'|$ ha qualche punto base che non è tale per $|\mathbf{C}|$.

Ci proponiamo di esaminare come possa presentarsi questo secondo fatto; vale a dire in quali casi il sistema $|\mathbf{C}'|$ aggiunto puro di $|\mathbf{C}|$ possa avere qualche punto base che non sia tale per $|\mathbf{C}|$.

2. Se P è un punto base del sistema $|\mathbf{C}'|$ e non tale per $|\mathbf{C}|$, le curve del sistema $|\mathbf{C}|$ che passano per questo punto non potranno essere irriducibili e dello stesso genere p di una $\mathbf{C}$ generica, perchè se no avrebbero in quel punto, fissa, una delle $2p - 2$ loro intersezioni colle aggiunte pure, le quali devono essere tutte variabili. Perciò queste medesime $\mathbf{C}$ o avranno tutte in P un punto (almeno) doppio, oppure si spezzeranno e avranno a comune una parte passante per P (la quale sarà curva fondamentale del sistema $|\mathbf{C}|$). Inoltre, nel primo caso, le curve $\mathbf{C}$ passanti per P avranno punti multipli che impongono alle aggiunte di ordine $n - 3$ condizioni non più indipendenti; tali $\mathbf{C}$ saranno dunque anche in questo caso tutte riducibili [3]), e, se non hanno a comune una parte passante per P (ipotesi corrispondente al secondo dei due casi testè accennati), si spezzeranno in curve di un fascio. Pertanto:

o il sistema $|\mathbf{C}|$, supposto di dimensione r, contiene un sistema di dimensione $r - 1$ composto mediante un fascio $|\gamma|$; e P è un punto base per questo fascio e non per $|\mathbf{C}|$;

oppure il punto P appartiene a una curva fondamentale del sistema $|\mathbf{C}|$.

3. Nel primo caso le $\mathbf{C}$ segano sulle γ, ciascuna delle quali è contenuta come parte in ∞^{r-2} curve $\mathbf{C}$, una serie lineare semplicemente infinita, di ordine $\geqq 2$ (se no le γ costituirebbero per le $\mathbf{C}$ un fascio di unisecanti, e le $\mathbf{C}$ sarebbero razionali). Queste ∞^1 serie lineari sulle γ formano, nel piano, una involuzione, alla quale apparterrà il sistema $|\mathbf{C}|$. *Il sistema lineare proposto appartiene dunque in questo caso a una certa involuzione piana* (ossia *non è semplice*), *e contiene un sistema di dimensione inferiore di una sola unità composto mediante un fascio.* Tale è ad es. il sistema ∞^3 delle sestiche piane con otto punti basi doppî; il punto P è allora il nono punto base del fascio formato dalle cubiche passanti (semplicemente) per quegli stessi otto punti.

4. Vediamo ora sotto quali condizioni il punto P possa appartenere a una curva fondamentale del sistema $|\mathbf{C}|$. Tale curva fondamentale s'intenderà eventualmente riducibile, ma connessa.

Dico anzitutto che sopra una curva fondamentale (complessiva) di genere zero non può cadere alcun punto P. Indichiamo con δ una curva fondamentale così fatta; con k il numero delle sue intersezioni, fuori dei punti basi di $|\mathbf{C}|$, colle curve residue $\mathbf{C} - \delta$; con p e π i generi rispettivi di una $\mathbf{C}$ e di una $\mathbf{C} - \delta$ generica; onde

[3]) M. Noether, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* [Acta Mathematica, t. VIII (1886), pp. 161-192]. V. in particolare n[i] 7, 8.

$p = \pi + k - 1$. Le $\mathbf{C}'$ formano un sistema lineare di dimensione $p - 1$; e quelle fra esse che contengono δ come parte hanno come parte residua una $(\mathbf{C} - \delta)'$, ossia un'aggiunta delle $\mathbf{C} - \delta$: esse sono dunque in numero di $\infty^{\pi-1}$, almeno se il sistema $|\mathbf{C} - \delta|$ è irriducibile. E a questo caso possiamo limitarci; poichè il sistema $|\mathbf{C} - \delta|$ è certo privo di componenti fisse, dovendosi intendere ogni eventuale componente così fatta già compresa nella curva fondamentale complessiva δ; e d'altra parte, se il sistema $|\mathbf{C} - \delta|$ fosse composto mediante un fascio, si ricadrebbe nell'ipotesi contemplata al precedente n° 3. Sulla curva fondamentale (complessiva) δ il sistema $|\mathbf{C}'|$ segnerà quindi un sistema di gruppi di punti dipendente da un numero di parametri eguale a $(p - 1) - (\pi - 1) - 1 = k - 2$. D'altra parte l'ordine di questo sistema di gruppi di punti — ossia il numero dei punti di ciascun gruppo — (essendo altresì $\mathbf{C}' \equiv (\mathbf{C} - \delta) + \delta'$, dove naturalmente δ' è virtuale) è $k - 2$; il sistema anzidetto non può dunque avere punti fissi, vale a dire non possono le $\mathbf{C}'$, fuori dei punti basi di $\mathbf{C}$, avere con δ intersezioni fisse.

Consideriamo ora una curva fondamentale complessiva ε, di genere > 0 (perciò certamente propria); e indichiamo di nuovo con k il numero delle intersezioni, fuori dei punti basi di $|\mathbf{C}|$, di ε con una $\mathbf{C} - \varepsilon$ generica. Per una $\mathbf{C}'$, curva già aggiunta a $|\mathbf{C}|$, il passaggio in più per uno dei gruppi suddetti di k punti impone condizioni complessive delle quali una soltanto è conseguenza delle rimanenti e dei punti già basi per $|\mathbf{C}'|$ [4]. D'altra parte fra le $\mathbf{C}'$ vi sono ora tutte le curve composte di una ε', aggiunta ad ε (nei soli punti multipli che sono tali per $|\mathbf{C}'|$), e di una $\mathbf{C} - \varepsilon$ arbitraria; perciò se $|\mathbf{C}'|$ ha, fuori dei punti basi di $|\mathbf{C}|$, qualche ulteriore punto base appartenente ad ε, per questo punto (che non può stare su tutte le ε') passeranno tutte le $\mathbf{C} - \varepsilon$. E poichè questo punto dovrebbe far parte di tutti i gruppi di k punti dianzi nominati, imponenti ciascuno almeno $k - 1$ condizioni nuove, di punti così fatti sopra ε potrà esservene soltanto uno, al massimo.

Sopra ogni curva fondamentale (connessa) del sistema $|\mathbf{C}|$, *la quale abbia genere maggiore di zero, vi potrà essere dunque al più un punto (semplice), base per* $|\mathbf{C}'|$ *e non per* $|\mathbf{C}|$.

In particolare: *Se un sistema lineare di curve piane algebriche è irriducibile e semplice, gli eventuali punti basi del sistema aggiunto puro di questo, i quali non siano tali per il primo sistema, appartengono tutti alle curve fondamentali di genere maggiore di zero del primo; e sopra ognuna di queste curve non può esservene che uno (semplice).*

Per es. il sistema lineare ∞^n delle curve piane di ordine $3n$ con otto punti basi n^{pli} e un punto $(n - 1)^{\text{plo}}$ ha i successivi aggiunti tutti di questo medesimo tipo, per valori di n decrescenti di un'unità per volta, e tutti (al pari del sistema primitivo) con un ulteriore punto base semplice, conseguenza dei primi, variabile da sistema a sistema,

---

[4]) NOETHER, loc. cit. [3]). Vedi anche le considerazioni ulteriori accennate in una nota al n. 15 della mia Memoria: *Sulle varietà algebriche a superficie-sezioni razionali* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XXIV (1915), pp. 49-88].

e sempre appartenente alla cubica fondamentale che congiunge i 9 punti basi assegnati. — Questo sistema lineare rappresenta una superficie razionale di ordine $2n - 2$ dello spazio S_n, le cui sezioni sono curve canoniche di genere n; la superficie stessa ha $n - 1$ punti doppî consecutivi (sopra un ramo lineare di curva) e, successivamente a questi, una retta doppia infinitesima (un elemento della quale appartiene allo spazio S_{n-2} dei punti doppî suddetti). Sopra questa superficie, i sistemi successivi aggiunti delle sezioni iperpiane si ottengono da queste ultime imponendo loro di contenere rispett. i successivi punti doppî anzidetti.

Torino, aprile 1915.

GINO FANO.