Gino Fano

Osservazioni su alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli

Atti R. Acc. Sci. Torino, Vol. **50** (1915), p. 1067–1072

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1915_1>

Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli.

di GINO FANO.

In un lavoro pubblicato alcuni anni or sono negli " Atti „ di questa R. Accademia [1] ho dimostrato che la varietà del 4° ordine dello spazio S_4 priva di punti doppi, e la varietà M_3^6 di S_5 intersezione generale di una quadrica e di una varietà cubica di quest'ultimo spazio, pur avendo tutti i generi nulli, non sono razionali. La dimostrazione era fondata sull' impossibilità di soddisfare in pari tempo a certe condizioni, tutte necessarie per l'esistenza di sistemi omaloidici di superficie contenuti rispett. in quelle due varietà.

Questo risultato viene confermato e messo in più chiara luce dalla Nota presente, nella quale sono stabilite per quelle stesse due varietà alcune proprietà nuove, invarianti per trasformazioni birazionali, e sufficienti a differenziarle dallo spazio S_3, ossia dalle varietà razionali, nonchè fra di loro.

1. In una varietà algebrica a tre dimensioni, completamente regolare e coi generi nulli, un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie F, regolari anch'esse e aventi tutti i generi eguali all'unità, ha bensì una superficie aggiunta, eventualmente di ordine zero, ma manca di aggiunte di un qualsiasi indice superiore. Infatti, se esistesse un'aggiunta di indice $i > 1$, questa insieme ad una qualsiasi F contata $i - 1$ volta costituirebbe per le F medesime una comune superficie i-aggiunta, variabile

(1) Vol. XLIII, adunanza del 14 giugno 1908.

con quella F, e incontrante ogni F secondo una linea pure variabile; il che è da escludersi, poichè sopra ogni F non vi è che una sola curva i-canonica.

Consideriamo pertanto, sopra una varietà del 4° ordine V^4 dello spazio S_4 priva di punti doppi, un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie regolari coi generi tutti eguali all'unità; superficie che saranno intersezioni di V^4 con forme di un certo ordine n. Se $n > 1$, questo sistema lineare dovrà avere o un punto base multiplo di ordine $> 2n$, oppure una linea base (effettiva, o infinitesima) multipla di ordine $> n$; poichè in caso contrario nessuna condizione sarebbe imposta alle aggiunte d'indice n (le quali sono di ordine zero) (¹).

Ora, sopra V^4, una superficie F^{4n} generica è di genere

$$\binom{n+3}{4} - \binom{n-1}{4} = 4\binom{n}{3} + n(n+1) - 1$$

mentre un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ ne abbasserebbe il genere di $\binom{2n+1}{3}$ unità; numero che, se $n > 1$, supera il precedente (e per $n = 1$ lo eguaglia). Una F^{4n} di genere uno non può avere dunque un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$.

D'altra parte una linea base $(n+1)^{\text{pla}}$ del sistema $|F^{4n}|$, la quale sia di ordine k, costituisce per l'intersezione complessiva di due F^{4n}, che è di ordine $4n^2$, una componente di ordine $k(n+1)^2$. Sarà dunque $k \leq 3$. Ma una F^{4n} contenuta in V^4 non può certamente avere una retta $(n+1)^{\text{pla}}$, perchè ogni forma di ordine n passante per essa dovrebbe contenere per intero le cubiche piane intersezioni ulteriori di V^4 coi piani passanti per quella retta (avendo già a comune con ciascuna di queste cubiche $3(n+1)$ punti). E, a più forte ragione, non potranno le F^{4n} avere come linea $(n+1)^{\text{pla}}$ una conica oppure una cubica, piana o sghemba, perchè facendo spezzare quest'ultima linea si avrebbe di nuovo una F^{4n} con retta $(n+1)^{\text{pla}}$.

(¹) Anche un punto $(2n)^{\text{plo}}$, eventualmente con un numero finito di altri punti consimili successivi, e, successivamente, una linea n^{pla} infinitesima (retta o conica) con eventuali elementi multipli ulteriori (non più che n^{pli}) non imporrebbe condizione alcuna alle aggiunte di indice n.

Esaminiamo infine se le F^{4n}, supposte sempre di genere uno, possano avere una linea infinitesima di multiplicità $\geq n+1$, naturalmente consecutiva a un punto di multiplicità almeno eguale alla precedente [1]. Per questo caso valgono le seguenti osservazioni:

1° Questa linea infinitesima di multiplicità $\geq n+1$ potrà essere soltanto una retta, perchè, se fosse anche solo una conica (ossia di 2° ordine), dovrebbe seguire un punto di multiplicità $\geq 2(n+1)$; punto che la F^{4n}, come già sappiamo, non può avere.

2° Una eventuale retta infinitesima $(n+1)^{\text{pla}}$ dovrà seguire un punto A avente per la F^{4n} multiplicità $2n$; poichè, se la multiplicità di questo punto fosse inferiore, le aggiunte di indice $n-1$ sarebbero vincolate soltanto (al più) ad avere A come punto doppio e la retta considerata ad esso consecutiva come semplice, e per le aggiunte d'indice n mancherebbe qualsiasi condizione. — D'altra parte, se $n>3$, una F^{4n} di genere uno non può avere un punto $(2n)^{\text{plo}}$, perchè già questo produrrebbe un eccessivo abbassamento del genere; mentre, se $n=2$, una F^8 con punto quadruplo è già di genere uno, e non potrebbe perciò, conservando questo genere, avere in più una retta multipla infinitesima successiva a quel primo punto.

3° Più generalmente, una retta infinitesima di multiplicità $n+k$ dovrebbe seguire un punto di multiplicità $\geq 2n-k+1$ (se no, di nuovo, nessuna condizione sarebbe imposta alle aggiunte d'indice n); e basterà limitarsi al caso $2n-k+1 \geq n+k$, ossia $k \leq \frac{n+1}{2}$. Ora l'abbassamento di genere determinato da questa singolarità complessiva ha il suo valore minimo in corrispondenza al valore massimo di k $\left(\frac{n+1}{2}\text{, oppure } \frac{n}{2}\right)$; e anche in quest'ultimo caso esso è superiore al genere di una F^{4n} ge-

---

[1] Si osservi che a un elemento generico di quella linea infinitesima di multiplicità $\geq n+1$ potranno anche seguire elementi ulteriori di multiplicità non superiore alla precedente e del pari $\geq n+1$, *ma solamente in numero finito*. Se no, la singolarità complessiva — la quale si riconosce immediatamente che equivarrebbe a più che quattro punti $(n+1)^{\text{pli}}$ — implicherebbe una riduzione eccessiva nel genere della F^{4n}.

nerica. (È superiore p. es. alla riduzione determinata da due punti $\left(\frac{3n+1}{2}\right)^{\text{pli}}$, la quale si manifesta già troppo elevata).

Concludiamo pertanto: *Sulla varietà* V^4 *di* S_4 *priva di punti doppi il sistema delle sezioni iperpiane è il solo sistema lineare di superficie regolari coi generi tutti eguali all'unità e di dimensione* ≥ 2.

Possono esistere invece, all'infuori delle sezioni iperpiane, dei *fasci* di superficie regolari coi generi uno. Per esempio, se la V^4 ammette in un suo punto una quadrica avente ivi con essa un contatto di 3° ordine, e perciò anche tutto un fascio di quadriche consimili (quello determinato dalla prima quadrica e dallo spazio S_3 tangente alla V^4 nel medesimo punto, contato due volte), queste quadriche segheranno sulla V^4 un fascio di superficie F^8 con punto quadruplo e coi generi uno.

Abbiamo altresì, come conseguenza ulteriore immediata: *La varietà* V^4 *di* S_4 *priva di punti doppi non ammette trasformazioni birazionali, all'infuori delle eventuali trasformazioni proiettive* (¹).

2. Queste considerazioni si estendono, con poche modificazioni, alla varietà M_3^6 di S_5, intersezione di una quadrica e di una forma cubica di quest'ultimo spazio, supposta anch'essa priva di punti doppi.

Anche in questo caso un sistema lineare almeno ∞^2 di superficie coi generi eguali ad uno e contenute nella varietà proposta, superficie perciò di un certo ordine $6n$ segate da forme di ordine n, dovrà avere, se $n > 1$, o un punto base di multiplicità $> 2n$, oppure una linea base, effettiva o infinitesima, multipla di ordine $> n$ (poichè, in caso diverso, esisterebbe un'aggiunta d'indice n, di ordine zero).

(¹) La V^4 con punto doppio ammette invece la trasformazione involutoria risultante dalla sua proiezione doppia da questo stesso punto, e anche altre trasformazioni birazionali che è facile assegnare. Una F^{4n} contenuta in essa può avere il punto doppio di V^4 medesima come multiplo di ordine $> 2n$, senza che ciò ne riduca eccessivamente il genere; e può avere del pari una linea passante pel punto doppio (p. es. una retta) come multipla di ordine $> n$.

La prima ipotesi va esclusa, perchè già un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ produrrebbe una riduzione eccessiva nel genere delle superficie F^{6n}. — Un'eventuale linea $(n+1)^{\text{pla}}$ potrebbe bensì essere una retta; ma non potrà certo essere una conica, perchè ogni forma di ordine n passante per una F^{6n} con conica $(n+1)^{\text{pla}}$ dovrebbe contenere per intero ciascuna delle quartiche ellittiche intersezioni ulteriori della M_3^6 con spazi S_3 passanti per quella conica (avendo quella forma con queste quartiche già più intersezioni di quanto comportino i rispettivi ordini); e, a più forte ragione, non potranno nemmeno le F^{6n} avere una linea $(n+1)^{\text{pla}}$ di ordine più elevato (in ogni caso ≤ 5), perchè quest'ultima potrebbesi far spezzare in modo da contenere una conica come parte ([1]). — Infine le stesse osservazioni già fatte dianzi per la V^4 di S_4 mostrano che anche nel caso presente una eventuale linea infinitesima di multiplicità $n+k$ (dove $k \geq 1$) potrebbe essere soltanto una retta, e dovrebbe seguire un punto almeno $(2n-k+1)^{\text{plo}}$; sicchè queste due singolarità insieme determinerebbero di nuovo una soverchia riduzione nel genere della F^{3n}.

Se esiste dunque, per $n>1$, *un sistema lineare almeno* ∞^2 *di superficie* F^{6n} *coi generi tutti eguali all'unità, queste superficie avranno certamente una retta base multipla di ordine* $k \geq n+1$. Applicando pertanto a queste superficie la trasformazione birazionale della varietà M_3^6 risultante dalla sua proiezione doppia dalla retta nominata, il sistema trasformato si comporrà (v. la mia Nota cit., n° 7) di superficie di ordine $6(4n-3k)$, inferiore perciò al precedente. Se la differenza $4n-3k$ è ancora superiore all'unità, il nuovo sistema si troverà nelle stesse condizioni del precedente, e il suo ordine potrà essere ulteriormente ridotto per mezzo della proiezione doppia della M_3^6 da una nuova retta; e così, occorrendo, più volte. L'operazione avrà termine solamente quando si sia pervenuti ad un sistema di sezioni iperpiane.

---

(1) D'altronde ciò è pure dimostrato nella mia Nota cit. (n° 8) senza ricorrere a questo spezzamento, bensì con considerazioni analoghe a quelle già applicate al caso di una conica.

Sulla varietà M_3^6 *non esistono dunque sistemi lineari almeno* ∞^2 *di superficie aventi tutti i generi eguali all'unità, all'infuori dei sistemi di sezioni iperpiane, e di quelli che da questi si deducono per proiezione da una o più rette della* M_3^6 *successivamente.*

Per conseguenza: *Sopra una* M_3^6 *di* S_5 *a curve-sezioni di genere* 4 ([1]) *e priva di punti doppi ogni trasformazione birazionale è il prodotto di un numero finito di proiezioni doppie da rette della varietà stessa e di (eventuali) trasformazioni proiettive.*

Torino, aprile 1915.

([1]) Una tale M_3^6 è appunto, in ogni caso, intersezione di una quadrica e di una forma cubica; come anche viceversa questa intersezione, quando non abbia una superficie doppia, ha le curve-sezioni di genere 4.