Gino Fano

A proposito dell'apparecchio elicoidale per volte oblique

Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett., Serie 2, Vol. **43** (1910), p. 177–179

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1910_3>

A PROPOSITO

DELL'APPARECCHIO ELICOIDALE PER VOLTE OBLIQUE

Osservazione

del prof. GINO FANO

Nell'apparecchio elicoidale di una volta cilindrica obliqua, a sezione retta circolare, le linee dei giunti sul piano di fronte hanno la proprietà che le loro tangenti nei punti d'intersezione coll'arco d'intradosso, o rispett. coll'arco di estradosso, concorrono in due punti fissi (*fuochi*). La dimostrazione di questa proprietà, e la determinazione delle “ eccentricità „ dei due archi suddetti, ossia delle distanze dei due fuochi dal centro comune degli archi stessi, si possono ricavare facilmente da proprietà note degli elicoidi e da nozioni elementari di geometria proiettiva.

Poichè le superficie dei giunti, nell'apparecchio elicoidale, sono elicoidi conoidi retti, le linee dei giunti sul piano di fronte saranno sezioni piane di tali elicoidi; e le tangenti a queste linee nelle loro intersezioni ad es. coll'arco d'intradosso saranno le tracce, sul piano di fronte, dei piani tangenti in questi stessi punti a quegli elicoidi: i quali piani altro non sono che i piani osculatori nei medesimi punti alle eliche, direttrici di quegli elicoidi, che costituiscono le linee dei giunti longitudinali (continui) sulla superficie di imbotte (*). Le tangenti domandate sono dunque le tracce, sopra un piano fisso, dei piani osculatori a eliche di egual asse, raggio, passo e verso nelle loro intersezioni con quel piano fisso (piano di fronte).

(*) È noto infatti che il piano tangente a un elicoide conoide retto in un punto qualunque coincide col piano osculatore in questo stesso punto all'elica direttrice che passa per tale punto (il che equivale a dire che queste eliche sono linee asintotiche dell'elicoide).

Ora, se noi rappresentiamo un'elica colle equazioni parametriche:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \qquad y = r \cos \varphi \qquad z = h\,\varphi$$

(dove r è il raggio e h il passo ridotto), il piano osculatore a questa elica in un punto qualunque ha per equazione:

$$\begin{vmatrix} X - r \operatorname{sen} \varphi & Y - r \cos \varphi & Z - h\,\varphi \\ r \cos \varphi & -r \operatorname{sen} \varphi & h \\ -r \operatorname{sen} \varphi & -r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

e sviluppando il determinante:

$$X \,.\, h\, r \cos \varphi - Y \,.\, h\, r \operatorname{sen} \varphi - r^2 (Z - h\,\varphi) = 0$$

ovvero:

$$X \,.\, h\, y - Y \,.\, h\, x - r^2 Z + r^2 z = 0.$$

Questo piano corrisponde al punto di osculazione (x, y, z) nella reciprocità spaziale rappresentata (facendo uso di coordinate omogenee di piani) dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \qquad\quad h\,y \\ \eta &= -h\,x \\ \rho &= \qquad\qquad\qquad\quad -r^2 \\ \tau &= \qquad\qquad r^2 z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

e questa reciprocità, avendo il determinante gobbo simmetrico, è (com'è ben noto) un " sistema nullo „ o " polarità nulla „; ossia una reciprocità involutoria e tale che ogni punto appartiene al piano (" polare „) che gli corrisponde.

Inoltre questo sistema nullo è lo stesso per tutte le eliche di egual asse e raggio (contenute cioè in un medesimo cilindro), di egual passo (o inclinazione) e di egual verso, perchè tali eliche si deducono l'una dall'altra mediante traslazioni parallele all'asse comune, che è il nostro asse coordinato z; traslazioni che mutano in sè stessa la corrispondenza [ossia le equazioni] (1).

Se noi dunque consideriamo le intersezioni di tutte le eliche dei giunti longitudinali della superficie d'intradosso — che si trovano appunto nelle condizioni ora enunciate — col piano di fronte della volta, i piani osculatori a quelle eliche in questi punti corrisponderanno a tali punti in un sistema nullo; e perciò le loro tracce sul piano di fronte concorreranno in un medesimo punto: il "polo" di questo piano.

Il sistema di coordinate a cui ci siamo riferiti era vincolato finora alla sola condizione che l'asse z coincidesse coll'asse comune delle due superficie d'intradosso e di estradosso. Supponiamo che l'origine stia nel piano di fronte, e l'asse y sia in posizione verticale: il piano di fronte sarà allora rappresentato da un'equazione del tipo:

$$Z = m\,X$$

il cui coefficiente direttivo m è eguale alla cotangente trigonometrica dell' "angolo degli assi" (ossia dell'angolo α formato dall'asse della volta col piano di fronte). Avendo questo piano le coordinate omogenee (m, 0, -1, 0), le coordinate cartesiane x, y, z del suo polo, ossia del fuoco dell'arco d'intradosso, si ricaveranno immediatamente dalle relazioni (1), le quali danno:

$$x = z = 0\,; \quad \frac{m}{-1} = \frac{h\,y}{-r^2} \quad \text{ossia} \quad y = \frac{m\,r^2}{h}\,.$$

Per l'arco di estradosso, indicandone con r' il raggio, si avrà analogamente $x' = z' = 0$; $y' = \dfrac{m\,r'^2}{h}$.

Le due eccentricità sono dunque:

$$y = \frac{m\,r^2}{h} \qquad y' = \frac{m\,r'^2}{h}\,.$$

Ricordando poi che $m = \operatorname{ctg}\alpha$, e che $\dfrac{r}{h}$, $\dfrac{r'}{h}$ sono le tangenti trigonometriche degli angoli costanti β, β' che le eliche longitudinali d'intradosso e di estradosso formano colle generatrici, avremo le note relazioni:

$$y = r \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta \qquad y' = r' \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta'\,;$$

come pure, dividendo l'una per l'altra le espressioni precedenti delle due eccentricità:

$$\frac{y}{y'} = \frac{r^2}{r'^2}\,.$$