GINO FANO

Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari

Rendiconti Circ. Mat. Palermo, Vol. **29** (1910), p. 98–118

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1910_2>

SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE ZERO E BIGENERE UNO, E LORO CASI PARTICOLARI.

Nota di **Gino Fano** (Torino).

Adunanza del 23 maggio 1909.

1. Le superficie algebriche di genere zero e bigenere uno ($p_g = p_a = 0$, $P_2 = 1$) con curva bicanonica di ordine zero sono state caratterizzate in modo completo, dal punto di vista delle trasformazioni birazionali, dal sig. ENRIQUES [1]), il quale ha dimostrato ch'esse possono tutte trasformarsi in superficie di 6° ordine di S_3 passanti doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, eventualmente degenere.

Le stesse superficie possono riferirsi birazionalmente anche ai due tipi seguenti, pure interessanti dal punto di vista proiettivo:

a) piano doppio con curva di diramazione di 8° ordine composta: 1) di una sestica avente due tacnodi e un punto doppio nell'intersezione delle due tangenti tacnodali; 2) di queste stesse due tangenti;

b) superficie di ordine 10 dello spazio S_5, con curve sezioni di genere 6, immagine (nel solito senso della geometria della retta) della congruenza (7, 3) formata dalle « rette principali » (« Hauptstrahlen ») di un sistema lineare ∞^3 di quadriche di S_3 privo di punti basi (ossia da quelle rette che appartengono a tutto un fascio di quadriche del sistema ∞^3, anzichè a una sola quadrica di esso) [2]).

Il sig. ENRIQUES ha mostrato pure (l. c., n° 20) che queste superficie ammettono, in generale, delle trasformazioni birazionali non cicliche, e quindi un'infinità discontinua di tali trasformazioni.

La presente Nota si propone di portare un modesto contributo allo studio di queste trasformazioni birazionali, e, principalmente, di far conoscere alcuni casi particolari delle dette superficie, che appaiono non privi d'interesse. Questi casi comprendono quelli in

---

[1]) *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, serie III, tomo XIV (1907), pp. 327-352].

[2]) Vedi la mia Memoria: *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo LI (Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali) (1901), pp. 1-79], in particolare il § 14. Dal punto di vista proiettivo, questa congruenza di rette era già stata studiata dal sig. REYE [*Geometrie der Lage*, 3ª edizione, vol. III (1892), pag. 140].

cui il tetraedro fondamentale della F^6 di S_3 dianzi accennata ha le facce non tutte distinte.

2. Come superficie-tipo, a cui riferire le nostre considerazioni, prenderemo generalmente la F^{10} di S_5 sopra nominata; e talvolta ci riferiremo anche alla congruenza di rette (7, 3) di cui questa superficie è immagine.

Un sistema lineare ∞^3 di quadriche di S_3 (Σ) contiene in generale 10 quadriche spezzate in coppie di piani, e ognuno di questi piani contiene un inviluppo ellittico di 3ª classe di rette principali del sistema Σ: l'inviluppo « Cayleriano » della rete di coniche che le quadriche di Σ segano su quel piano. La retta intersezione dei due piani di una medesima coppia non appartiene, in generale, agli inviluppi contenuti in questi piani, e questi inviluppi non hanno perciò nessuna retta a comune; mentre due inviluppi contenuti in piani di diverse coppie hanno sempre una retta a comune. La superficie F^{10} contiene per conseguenza 20 cubiche piane γ_i, γ'_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$), tali che le due cubiche corrispondenti a un medesimo indice i non hanno nessun punto a comune, mentre due cubiche di diverso indice hanno sempre un punto a comune.

Sopra F^{10} (come risulta dalla Memoria citata del sig. ENRIQUES) ogni sistema lineare $|C|$, irriducibile o no, di genere virtuale $\pi \geqq 1$ ha grado $2\pi - 2$, e ha un sistema aggiunto $|C'|$, di egual genere e grado, di cui esso è a sua volta l'aggiunto. Se $\pi > 1$, e il sistema $|C|$ è completo e irriducibile, i due sistemi $|C|$ e $|C'|$ sono certo regolari, e hanno perciò la dimensione $\pi - 1$. Sono anche privi di punti basi, se si compongono di curve non iperellittiche. Le curve di genere $\pi = 1$ o sono isolate (come per es. le 20 cubiche γ_i, γ'_i), oppure appartengono a fasci. Se C è una curva ellittica isolata, è pure isolata la sua (unica) aggiunta C'; ma le curve $2C \equiv 2C'$ appartengono a un medesimo fascio, composto ancora di curve ellittiche (ENRIQUES, l. c., nº 4 e seg.). Le cubiche γ_i, γ'_i (di egual indice) sono appunto mutuamente aggiunte.

Anche due sistemi lineari qualunque mutuamente aggiunti $|C|$, $|C'|$ sono tali che $|2C| \equiv |2C'|$; perciò sopra F^{10} *la divisione dei sistemi lineari non è operazione univoca* [3]. Però, all'infuori di $|C'|$, nessun altro sistema distinto da $|C|$ può avere con $|C|$ stesso un sistema equimultiplo a comune; poichè un tale sistema, supposto di genere $\pi > 1$ (ed è sufficiente considerare questo caso), dovrebbe segare sulle C una $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, la quale non potrebbe essere che la rispettiva serie canonica: tale sistema non potrebbe dunque essere distinto da $|C'|$. Perciò il carattere σ introdotto dal sig. SEVERI [4]) sarà $= 2$.

Il sistema somma di tre fra le 20 cubiche, a due a due non aggiunte, è di grado 6 e genere 4, e conduce a rappresentare la F^{10} sopra una F^6 di S_3 passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Queste sei rette doppie sono le immagini delle 3 cubiche considerate e delle loro aggiunte; in particolare le tre coppie di spigoli op-

---

3) F. SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris), 3ᵉ série, t. XXV (1908), pp. 449-468], nº 5.

4) Loc. cit. 3), § 2. Questo carattere è il « massimo numero di sistemi lineari distinti che si possono ottenere da un sistema assegnato mediante divisione per un numero intero ».

posti del tetraedro corrispondono rispettivamente alle 3 coppie di cubiche mutuamente aggiunte.

La rappresentazione di F^{10} sul piano doppio si ottiene mediante le involuzioni delle quali parleremo al n° 5.

3. La superficie F^{10} (al pari della F^6 di S_3 passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro) è priva di curve eccezionali, perchè ogni suo sistema lineare è esattamente secondo aggiunto di sè stesso. Il suo genere lineare [5] ($p^{(1)} = \omega$) è eguale all'unità; perciò dalla relazione

$$\omega + I = 12 p_a + 9$$

si ricava che l'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE vale 8. E il numero-base ρ e il numero ρ_0 degli integrali doppi di 2^a specie distinti dovranno soddisfare la relazione di PICARD [6]:

$$\rho_0 + \rho = I + 2 = 10.$$

D'altra parte il determinante [7] delle dieci cubiche γ_i (10 qualunque fra le 20, purchè a due a due non aggiunte tra loro) ha gli elementi principali tutti nulli, e gli altri elementi eguali all'unità; esso risulta quindi diverso da zero [ed eguale precisamente a -9 [8])], e le 10 cubiche γ_i saranno perciò algebricamente distinte. Dal confronto colla relazione precedente si può dunque concludere che sarà $\rho = 10$, $\rho_0 = 0$; e che sulla F^{10} le dieci cubiche γ_i costituiranno una *base*.

Questa base non è però certo una *base intermediaria* [9]), cioè tale che, se una curva C tracciata sulla superficie è legata alle γ_i dalla relazione:

$$\lambda C \equiv \sum_i \lambda_i \gamma_i$$

i numeri interi (positivi, negativi o nulli) λ_i siano sempre tutti divisibili per λ. Ciò non avviene infatti certamente se l'ordine di C non è multiplo di 3; per es. se C è una sezione iperpiana della F^{10}.

---

5) Carattere definito anche per le superficie di genere zero. Cfr. CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [Annali di matematica pura ed applicata, serie III, tomo VI (1901), pp. 165-225].

6) Cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars), t. I (1897), t. II (1906). In particolare t. II, p. 373. La forma invariantiva suindicata di questa relazione è stata data dal SEVERI [Cfr. la Recensione di detta opera nel Bollettino di Bibliografia e storia delle Scienze Matematiche, anno X (1907), pp. 1-10].

7) F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* [Mathematische Annalen, t. LXII (1906), pp. 194-225], pag. 199. In questa Memoria {e nella precedente Nota *Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de* PICARD *attachées à la surface* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXL (1er semestre 1905), pp. 361-363 (séance du 6 février 1905)]} è pure introdotto e definito il numero-base ρ di una superficie.

8) Più generalmente, un determinante della forma indicata e di ordine n vale $(-1)^{n-1}(n-1)$. Ciò può verificarsi direttamente per $n = 2$; e si dimostra, per $n > 2$, per mezzo di una formola ricorrente.

9) Loc. cit. 3), n° 1.

È invece una base intermediaria quella formata da una sezione iperpiana di F^{10} insieme a 9 fra le 10 cubiche γ_i; infatti il determinante di queste nuovo sistema di 10 curve è il seguente:

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 & 3 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 3 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 3 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

e, tenendo conto della nota [4]), vale:

$$10.8 - 3.3.9 = -1\,;$$

esso ha perciò certamente valore assoluto minimo.

Una *base minima,* cioè tale che ogni curva sulla superficie se ne possa dedurre con sole operazioni di addizione e sottrazione, sarà allora costituita [10]) da una sezione iperpiana e per es. dalle dieci cubiche

$$\gamma_1,\ \gamma_2, \dots, \gamma_9,\ \gamma_1'.$$

D'altra parte i due sistemi lineari $|\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{10}|$ e $|3\,C|$ (dove con C indichiamo una sezione iperpiana) sono composti di curve di eguale ordine (30), hanno lo stesso grado (90), e due loro curve si tagliano reciprocamente pure in 90 punti. Essi dunque o coincidono, o sono mutuamente aggiunti. In questo secondo caso sarà $|3\,C| \equiv |\gamma_1' + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{10}|$; e si potrà nella base minima sostituire γ_{10} a γ_1'. Analogamente, nella prima ipotesi, si potrà sostituire γ_{10} a γ_1, chiamando poi γ_1 la primitiva γ_1' (e viceversa).

Una base minima della F^{10} è dunque costituita in ogni caso da una sezione iperpiana insieme a 10 *cubiche opportunamente scelte* (a due a due non aggiunte, e tali che la loro somma non sia $\equiv 3\,C$).

4. Indicheremo d'ora in poi con δ_i una cubica piana contenuta nella F^{10}, la quale possa essere indifferentemente la γ_i oppure la γ_i' ($i = 1, 2, \dots, 10$).

Sulle curve ellittiche del fascio $|2\,\delta_i|$ le cubiche δ_h e δ_k ($h, k \neq i$; $h \neq k$) segano coppie di punti ($A_h B_h$, $A_k B_k$) non equivalenti, perchè se no sarebbero esse pure equivalenti, o diventerebbero tali quando si sommassero a componenti di curve riducibili di quel fascio [11]); ora in quel fascio le sole curve riducibili sono, in generale, $2\,\gamma_i$ e $2\,\gamma_i'$, e si avrebbe perciò una relazione lineare fra le curve δ_h, δ_k, e γ_i, γ_i', il che non è possibile. Per la stessa ragione non saranno equivalenti i multipli di quelle due coppie di punti secondo un intero r qualsiasi.

Si possono perciò costruire sulla superficie F^{10} delle trasformazioni birazionali non cicliche col seguente procedimento, indicato dal sig. ENRIQUES, e applicabile a qualunque

---

[10]) Loc. cit. [3]), § 2.

[11]) *Il teorema d'*ABEL *sulle superficie algebriche* [Annali di Matematica pura ed applicata, s. III, t. XII (1906), pp. 55-79], n° 6.

superficie la quale contenga un fascio di curve ellittiche e due altre curve incontranti le prime in gruppi di punti di cui due multipli arbitrari non siano mai equivalenti [12]).

Si indichi con z l'integrale ellittico di 1^a specie appartenente a una curva generica Δ del fascio $|2\delta_i|$, con 2ω, $2\omega'$ i suoi periodi, e con α_h, α_k le somme dei suoi valori nei punti A_h e B_h, A_k e B_k. Risulterà allora determinata razionalmente sopra ogni Δ, e perciò sulla superficie, la trasformazione birazionale:

$$z' \equiv z + \alpha_h - \alpha_k \qquad (\text{mod. } 2\omega,\ 2\omega') \tag{1}$$

la quale non è ciclica, perchè non esiste alcun intero r tale che sia $r\alpha_h \equiv r\alpha_k$ (mod. 2ω, $2\omega'$).

Operando analogamente su tutti i fasci $|2\delta_i|$ e con tutte le possibili coppie di cubiche δ_h, δ_k, e moltiplicando comunque tra loro le operazioni ottenute, si costruirà sulla F^{10} un'infinità di trasformazioni birazionali, la quale sarà discontinua e non contenuta in una serie continua di tali trasformazioni; poichè la F^{10} non è razionale, nè ha genere aritmetico negativo, e in questi casi soltanto essa ammetterebbe una serie continua di trasformazioni birazionali [13]).

Il gruppo infinito discontinuo così costruito sulla F^{10} è *impropriamente discontinuo,* ossia in un intorno finito comunque piccolo di un punto generico della superficie esistono punti distinti da questo e ad esso equivalenti rispetto al gruppo. Basterà a tal uopo verificare che il gruppo costituito dalle potenze dell'operazione (1) è impropriamente discontinuo sopra una qualsiasi curva Δ. E ciò è conseguenza immediata del ben noto teorema di JACOBI [14]), che una funzione di una sola variabile la quale ammettesse più di due periodi distinti dovrebbe ammettere anche periodi infinitamente piccoli (in senso aritmetico). Esisterà infatti un multiplo $r(\alpha_h - \alpha_k)$ della costante $\alpha_h - \alpha_k$ tale che la sua differenza da un periodo $2m\omega + 2n\omega'$, e perciò [posto $z^{(r)} \equiv z + r(\alpha_h - \alpha_k)$] la differenza $z^{(r)} - z$ a meno di periodi, abbiano valore assoluto minore di qualsiasi quantità positiva ε, piccola a piacere. E poichè le coordinate di un punto della curva Δ sono funzioni generalmente continue di z, così, dato ad arbitrio un punto P della curva, e data un'altra quantità positiva ε_0, pure piccola a piacere, si potrà determinare ε in modo che per ogni intero r, pel quale nell'intorno di P sia $|z^{(r)} - z| < \varepsilon$, il punto $P^{(r)}$ corrispondente di P abbia da questo distanza minore in valore assoluto di ε_0.

Una conveniente potenza dell'operazione (1) è anzi infinitesima (sempre in senso aritmetico) sopra un'intera curva Δ, ma non sarà tale generalmente sulle altre curve del fascio $|2\delta_i|$ (sulle quali l'integrale z avrà periodi diversi).

---

[12]) ENRIQUES, loc. cit. [1]), n° 20. Vedi anche la Nota: ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XV, 2° semestre 1906, pp. 665-669], n° 3.

[13]) ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XX (1905), pp. 61-72].

[14]) *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innetitur* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XIII (1835), pp. 55-78].

Si vede così che le potenze dell'operazione (1) mutano una curva qualunque di F^{10}, in particolare ogni curva ellittica isolata, in altre, fra le quali ve ne sono sempre di quelle che si approssimano alla prima tanto quanto si vuole nelle vicinanze di un suo punto assegnato. Ma variando questo punto, varia in generale quella trasformata che ivi si approssima alla curva proposta.

I gruppi ciclici infiniti formati dalle potenze positive e negative di un'operazione del tipo (1) sono 360. Infatti il fascio di curve $|2\delta_i|$ può scegliersi in 10 modi, e la coppia di curve δ_h, δ_k in $\binom{9}{2} = 36$ modi; poichè sostituendo a una di queste due curve la sua aggiunta la trasformazione (1) non muta, e scambiando δ_h e δ_k tra loro si passa dalla (1) alla sua inversa.

5. La possibilità di rappresentare F^{10} sopra un piano doppio (cfr. n° 1) è dovuta all'esistenza sulla superficie di involuzioni razionali di coppie di punti.

Il sistema lineare $|\gamma_i + \gamma'_i + \gamma_k|$, di grado (virtuale) 4, genere 3, dimensione 2, contiene le due curve riducibili $2\gamma_i + \gamma'_k$ e $2\gamma'_i + \gamma'_k$, al cui fascio, che ha γ'_k come parte fissa, non appartiene la $\gamma_i + \gamma'_i + \gamma_k$; perciò i due punti $\gamma_i\gamma'_k$ e $\gamma'_i\gamma'_k$ sono punti basi della rete, la quale avrà per conseguenza grado effettivo 2. Le curve della rete s'incontreranno pertanto a 2 a 2 nelle coppie di punti di un'involuzione razionale I_2, della quale i due punti basi della rete saranno punti doppi. Le curve della rete saranno iperellittiche, e avranno le rispettive g^1_2 tutte costituite da coppie dell'involuzione I_2 [15]).

Quest'involuzione trasforma in sè stessa ogni curva della rete; in particolare le 4 cubiche γ_i, γ'_i, γ_k, γ'_k, nonchè ogni curva del fascio $|2\delta_i|$. E le trasformazioni subordinate sopra queste ultime curve sono di specie diversa dalle (1) del n° 4.

Il sistema aggiunto alla rete suddetta è il sistema $|\gamma_i + \gamma'_i + \gamma'_k|$, che è ancora del medesimo tipo e appartiene alla medesima involuzione I_2, avendo però altri punti basi (i punti $\gamma_i\gamma_k$ e $\gamma'_i\gamma_k$). Infatti esso deve segare sulle curve della prima rete la rispettiva serie canonica, la quale è composta mediante la g^1_2, ossia mediante coppie della I_2.

Rappresentiamo ora F^{10} sopra una F^6 di S_3 le cui sezioni piane siano immagini del sistema lineare $|\gamma_i + \gamma_k + \gamma_l|$ ($l \neq i, k$; cfr. n° 2). Le sei rette doppie di F^6 (a_i, a'_i, a_k, a'_k, a_l, a'_l) saranno immagini rispettivamente delle cubiche γ di egual indice e apice; e l'involuzione corrispondente a I_2 verrà segata sopra F^6 dalle rette che si appoggiano agli spigoli opposti a_l; a'_l del tetraedro fondamentale. Infatti a quest'involuzione appartiene certamente la rete di curve segata sopra F^6 dalle quadriche passanti per le tre rette a_l, a'_l, a_k: ora fra queste quadriche vi è la coppia di piani $a_k a_l$, $a_k a'_l$, la quale sega la curva $a_i + a'_i + a_k$ corrispondente a $\gamma_i + \gamma'_i + \gamma_k$; la rete costruita sopra F^6 è dunque l'omologa di $|\gamma_i + \gamma'_i + \gamma_k|$.

Vediamo così che alla stessa involuzione I_2 sopra F^{10} appartengono anche i due sistemi lineari $|\gamma_k + \gamma'_k + \gamma_i|$ e $|\gamma_k + \gamma'_k + \gamma'_i|$, e anzi l'intero sistema lineare ∞^4 $|\gamma_i + \gamma'_i + \gamma_k + \gamma'_k|$, privo di punti basi, al quale ultimo corrisponde sopra F^6 il sistema

[15]) ENRIQUES, loc. cit. [1]), n° 10 e seguenti.

segato dalle rigate di 4^o ordine aventi a_l, a'_l come direttrici doppie e gli altri spigoli del tetraedro come generatrici. Non appartiene invece più alla stessa involuzione il sistema ∞^4 aggiunto del precedente.

Il sistema lineare ∞^4 $|\gamma_i + \gamma'_i + \gamma_k + \gamma'_k| \equiv 2|\delta_i + \delta_k|$ contiene parzialmente anche tutte le cubiche $\delta_m (m \neq i, k)$, perchè sopra ognuna di queste cubiche esso sega una serie lineare di ordine 4, e perciò di dimensione < 4. La curva residua

$$\delta^*_m \equiv 2(\delta_i + \delta_k) - \delta_m \tag{2}$$

di ordine 9 e grado zero, sarà la coniugata di δ_m nell'involuzione I_2.

Queste relazioni $(m \neq i, k)$, insieme a quelle che esprimono l'invarianza delle curve δ_i, δ_k:

$$\delta^*_i = \delta_i \qquad \delta^*_k = \delta_k \tag{2'}$$

rappresentano, in certo modo, la trasformazione determinata dall'involuzione I_2 nel sistema delle curve esistenti sopra F^{10}. Infatti 10 cubiche δ opportunamente scelte, insieme a una sezione iperpiana C, costituiscono sopra F^{10} una base minima; e la relazione che esprime la curva C^*, trasformata di C, mediante C stessa e le δ si ricava facilmente dalle precedenti. Infatti la sezione iperpiana C (cfr. n° 3) soddisfa a una relazione:

$$3\,C \equiv \sum_{\varkappa=1}^{10} \delta_\varkappa ;$$

si ha perciò, con un breve calcolo:

$$(3\,C)^* \equiv 18(\delta_i + \delta_k) - \sum \delta_\varkappa ;$$

e poichè la divisione di un sistema lineare per 3 è sopra F^{10} operazione (quando sia possibile) certamente univoca, sarà altresì:

$$C^* \equiv 6(\delta_i + \delta_k) - C.$$

Sulla superficie F^{10} esistono $\binom{10}{2} = 45$ involuzioni del tipo indicato; e possiamo designarle singolarmente coi simboli $[ik]$, corrispondenti alle diverse combinazioni binarie dei numeri 1, 2, ..., 10.

6. L'involuzione $[ik]$, ossia la I_2 del n° prec., subordina sulle curve del fascio $|2\delta_i|$ la g^1_2 alla quale appartengono le coppie di punti ivi segate dalle due cubiche γ_k, γ'_k. Indicando perciò con α_k, come già al n° 4, la somma dei valori che l'integrale ellittico di 1^a specie z relativo a una curva qualsiasi di quel fascio assume nei due punti di una tale coppia, l'involuzione I_2 potrà ritenersi rappresentata sopra ogni singola curva del fascio $|2\delta_i|$, e perciò sulla F^{10}, dall'equazione:

$$z_1 \equiv -z + \alpha_k .$$

Le curve del fascio $|2\delta_i|$ saranno invarianti anche rispetto all'involuzione $[ih]$, la quale sarà rappresentata a sua volta da un'analoga equazione:

$$z_2 \equiv -z + \alpha_h .$$

La trasformazione prodotto di queste due involuzioni (applicando prima la $[ik]$ e poi la $[i\,h]$) sarà perciò rappresentata dall'equazione:

$$z' \equiv z + \alpha_h - \alpha_k$$

che è la stessa (1) del n° 4.

Le 720 *trasformazioni di questo tipo, a due a due inverse, si possono dunque ottenere come prodotti di involuzioni* I_2, moltiplicando ordinatamente ciascuna delle 45 involuzioni $[i\,k]$ per ciascuna delle 16 i cui simboli hanno col precedente *un* indice a comune.

Valendosi delle relazioni (2) e (2′) del n° 5 si trova che l'operazione (1) trasforma le cubiche della superficie F^{10} nel modo seguente:

$$\delta^*_i = \delta_i$$
$$\delta^*_h \equiv 3\,\delta_h - 2\,\delta_k + 6\,\delta_i$$
$$\delta^*_k \equiv 2\,\delta_h - \delta_k + 2\,\delta_i$$
$$\delta^*_m \equiv \delta_m + 2(\delta_h - \delta_k) + 4\,\delta_i \qquad (m \neq i,\ h,\ k).$$

Per una sezione iperpiana si ha:

$$C^* \equiv C + 6(\delta_h - \delta_k) + 12\,\delta_i.$$

E più generalmente, per una curva qualunque φ della quale si indichino rispettivamente con m_i, m_h, m_k i numeri delle intersezioni con δ_i, δ_h e δ_k, sarà:

$$\varphi^* \equiv \varphi + 2\,m_i(\delta_h - \delta_k) + 2(2\,m_i + m_k - m_h)\delta_i.$$

7. Mi propongo ora di esaminare alcuni casi particolari a cui dà luogo la superficie F^{10} quando si facciano coincidere due o più delle sue 20 cubiche piane. E poichè, quando si rappresenta la F^{10} sopra una F^6 passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro, queste 6 rette doppie sono immagini di altrettante cubiche della prima superficie, così i casi particolari che incontreremo comprenderanno quelli nei quali il tetraedro relativo alla F^6 degenera, perchè i suoi spigoli, e per conseguenza le facce e i vertici, non sono più tutti distinti.

Cominciamo col supporre che sopra F^{10} si avvicinino indefinitamente due cubiche γ_i, γ'_i mutuamente aggiunte. Ciò equivale a supporre, per la superficie F^6, che si avvicinino indefinitamente due spigoli opposti del tetraedro fondamentale. E un sistema lineare di quadriche (Σ), le cui rette principali formino una congruenza Γ avente F^{10} per immagine, tenderà allora, come limite, a un sistema contenente un piano doppio.

Poichè sopra una superficie di genere zero una curva non può mai coincidere colla propria aggiunta, così, al limite, la curva unica $\gamma_i \equiv \gamma'_i$ non potrà essere per F^{10} che una curva doppia. Essa si staccherà però allora come parte fissa dal primitivo sistema aggiunto di un qualsiasi sistema lineare della superficie; perciò il bigenere della superficie diventerà zero, e la superficie stessa razionale.

Ciò è confermato da considerazioni dirette, che assumono la forma più semplice quando si riferiscano alla congruenza Γ. Poichè il sistema lineare Σ (v. sopra) contiene in questo caso un piano doppio π, la rete formata dalle quadriche di Σ che passano per un punto qualunque P di π ha gli 8 punti basi a due a due coincidenti in P

stesso e in altri tre punti del piano π; e delle 7 rette della congruenza uscenti da P (quelle che congiungono P coi suoi associati) una sola (la tangente fissa di quelle quadriche in P) non giace in π. La congruenza Γ risulta pertanto rappresentata birazionalmente sul piano π, assumendo P come punto corrispondente a quest'ultima retta.

Il piano π contiene un'inviluppo di 3^a classe di rette doppie della congruenza. Nella rappresentazione piana accennata a queste ∞^1 rette doppie corrispondono le coppie di un'involuzione ellittica η_2^1 sopra una cubica ξ. Alle rigate intersezioni della congruenza Γ coi complessi lineari dello spazio, ossia alle sezioni iperpiane di F^{10}, corrispondono curve di 4^o ordine con 6 punti comuni appartenenti alla cubica ξ, e che incontrano ulteriormente questa cubica nei gruppi di una g_6^2 composta mediante la η_2^1. I 6 punti fissi sono segati sopra π dalle rette-assi delle rimanenti 6 coppie di piani contenute nel sistema lineare Σ.

La superficie considerata dal sig. ENRIQUES alla fine del n° 16 della sua Memoria citata, e avente una retta tripla e una retta doppia sghembe e infinitamente vicine, è dunque razionale. Volendo ottenere superficie non razionali, dovremo mantenere sempre distinte sopra F^{10} due cubiche mutuamente aggiunte, e sulla F^6 non dovremo mai far coincidere due spigoli opposti del tetraedro fondamentale.

8. Supponiamo adesso che sulla superficie F^{10} si avvicinino indefinitamente due cubiche non aggiunte γ_1, γ_2. Si avvicineranno allora indefinitamente anche le loro aggiunte γ'_1, γ'_2; e ciò equivale a far avvicinare indefinitamente, nel sistema lineare Σ di quadriche già considerato, due delle 10 coppie di piani che vi sono contenute.

Al limite, la curva virtuale $\gamma_2 - \gamma_1$, di ordine zero, grado -2, e genere zero, dovrà ridursi a un punto o gruppo di punti; e non potrà ridursi che a un unico punto, il quale sarà doppio per la superficie F^{10}, ma, in generale, semplice per la cubica con cui γ_1 e γ_2 sono venuti a coincidere. Indicando con d la conica infinitesima intorno di questo punto doppio, si può dire che la curva composta $\gamma_1 + d$ sostituisce ora la γ_2 del caso generale.

Similmente, essendo

$$\gamma'_2 - \gamma'_1 \equiv \gamma_2 - \gamma_1$$

la curva γ'_1 passerà anch'essa (semplicemente) pel punto doppio, e la γ'_2 si potrà ritenere sostituita da $\gamma'_1 + d$. Il numero-base della superficie (inteso in senso invariantivo) è ancora eguale a 10, e alla curva γ_2 si può ritenere sostituito nella base l'intorno d.

Nel sistema lineare Σ di quadriche, quando si fanno coincidere due delle 10 coppie di piani, il fascio determinato da queste due coppie acquista la caratteristica [(22)] [16]), e risulta composto di quadriche raccordate lungo la retta r intersezione dei due piani (α, β) di quella coppia. Questa retta, appartenendo ora a tutto un fascio di quadriche di Σ, diventa retta principale di Σ, e perciò elemento della congruenza Γ, e retta comune

[16]) Per la classificazione dei fasci di quadriche e loro caratteristiche, cfr. C. SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, tomo XXXVI (1884)], n° 80.

ai due inviluppi di 3^a classe contenuti nei piani α, β: si vedrebbe anche facilmente ch'essa conta come due almeno fra le rette di Γ che appartengono ad un suo qualsiasi punto o piano, ed è perciò retta doppia di Γ.

Viceversa, siamo certamente in questo caso ogni qualvolta la retta-asse di una coppia di piani contenuta in Σ appartenga anche a un'altra quadrica, e perciò a tutto un fascio di quadriche del sistema medesimo.

Sulla nuova superficie F^{10} il fascio di curve ellittiche $|2\gamma_1| \equiv |2\gamma'_1|$ ha il punto doppio come punto base (assegnato); mentre lo stesso fascio nel quale si consideri questo punto base come virtualmente inesistente, ossia il fascio $|2\gamma_1 + d|$, sostituisce il fascio di genere due $|\gamma_1 + \gamma_2| \equiv |\gamma'_1 + \gamma'_2|$. Infine il fascio $|\gamma_1 + \gamma'_2| \equiv |\gamma'_1 + \gamma_2|$, ora $\equiv |\gamma_1 + d + \gamma'_1|$, non ha il punto doppio di F^{10} come punto base, e si compone di curve di genere effettivo due.

Questa superficie F^{10} si può rappresentare sopra una F^6 di S_3, sulla quale si siano fatti avvicinare indefinitamente due spigoli adiacenti del tetraedro fondamentale; e per conseguenza anche i due spigoli rispettivamente opposti ai primi, nonchè due vertici, e due facce. Le sezioni piane della F^6 si possono far corrispondere alle curve del sistema lineare $|2\gamma_1 + d + \gamma_3|$. Il punto che è vertice doppio del tetraedro diventa quadruplo per la superficie F^6; le sezioni piane per esso sono immagini delle curve della rete $|2\gamma_1 + \gamma_3|$, di grado effettivo 2; e le rette passanti per quel punto segano sulla superficie le coppie di un'involuzione, colla quale sono venute a coincidere la [13] e la [23] (cfr. n° 5) del caso generale.

9. Supponiamo adesso che, sulla superficie precedente, una nuova cubica γ_3 si avvicini indefinitamente a γ_1 (e, per conseguenza, anche γ'_3 tenda a γ'_1).

Ci converrà considerare a tal uopo la superficie F^8 proiezione della F^{10} dal suo punto doppio P. Essa conterrà una conica p immagine di P, e due rette doppie c, c', incidenti a p ma non tra loro, proiezioni delle due cubiche γ_1 e γ'_1. Poichè le cubiche proiezioni di γ_3 e γ'_3 devono ridursi, al limite, a quelle due rette doppie, occorre che da ciascuna di esse si stacchi una retta (semplice), che farà parte della conica p. Il punto doppio P diventerà dunque biplanare. Di più, la retta che si stacca dalla cubica proiezione di γ_3 (o γ'_3) dovrà essere incidente non solo a c (o rispettivamente c'), ma anche a c' (o c), perchè la cubica γ_3 si appoggia a γ'_1 (e γ'_3 si appoggia a γ_1). Perciò la conica p si spezzerà in due rette, una delle quali incidente a c e c'; e le cubiche proiezioni di γ_3 e γ'_3 si spezzeranno in quest'ultima retta e rispettivamente nelle due rette doppie c e c'.

Indicando con a_1, a_2 le due parti di cui è composto l'intorno del punto doppio biplanare di F^{10} (parti che sono rette infinitesime, entrambe di grado virtuale -2, genere zero, e con *un* elemento a comune), le curve γ_2 e γ'_2 del caso generale si dovranno ritenere sostituite da $\gamma_3 + a_1 + a_2$ e $\gamma'_1 + a_1 + a_2$, le curve γ_3 e γ'_3 da $\gamma_1 + a_1$ e $\gamma'_1 + a_1$. La base si può ritenere costituita da otto cubiche e dalle due rette infinitesime a_1, a_2.

Questo caso corrisponde, per la superficie F^6 di S_3, al fare avvicinare indefinitamente tre vertici del tetraedro fondamentale.

Il sistema lineare Σ di quadriche conterrà ora tre coppie di piani infinitamente vicine, le quali determineranno una rete σ contenuta in Σ. Indicando con a, b le rette intersezioni dei piani α, β di questa coppia coi piani ad essi infinitamente vicini della coppia consecutiva, e con A, B i punti intersezioni dei medesimi piani con quelli ad essi infinitamente vicini nelle due coppie consecutive, si vede che degli 8 punti basi della rete σ due (semplici) cadranno in A, B, e gli altri sei coincideranno a tre a tre nei due punti $a\beta \equiv M$, $b\alpha \equiv N$. Il fascio di caratteristica $[(22)]$ contenuto in σ si comporrà di quadriche raccordate lungo la retta $\alpha\beta \equiv MN \equiv r$, e passanti per le due rette a, b; la rete σ si otterrà combinando linearmente questo fascio a una sua quadrica ulteriore, che dovrà passare per i due punti $M \equiv ar$ e $N \equiv br$.

Viceversa, una rete di quadriche, la quale sia determinata: 1) da un fascio di caratteristica $[(22)]$ avente r come generatrice di raccordamento e a, b come ulteriori rette basi; 2) da una quadrica passante per i due punti ar, br (e non per la retta r), contiene appunto tre coppie di piani infinitamente vicine (nella posizione ar, br). Ciò può essere affermato in base a un'enumerazione di costanti, perchè le reti del primo tipo rientrano tutte in quest'ultimo, e d'altra parte i due tipi dipendono da un medesimo numero (16) di costanti [17]).

Una coppia di piani contenuta in un sistema lineare ∞^3 di quadriche conta dunque come due fra le 10 generalmente esistenti quando la sua retta-asse appartiene a tutto un fascio di quadriche del sistema (n° 8); e conta come tre fra le 10 quando l'involuzione segata dal sistema ∞^3 sulla medesima retta-asse contiene la coppia dei punti d'incontro di questa retta colle altre due rette basi del fascio precedente.

10. Fra le 10 coppie di cubiche γ_i, γ'_i della F^{10} generale ve ne possono essere, in pari tempo, più gruppi di due o di tre coincidenti. Mi limito a citare due casi, la cui possibilità si deduce da altre questioni già note.

Il sistema lineare Σ di quadriche finora considerato può comporsi in particolare delle prime polari rispetto a una superficie cubica *priva di punti doppi* (non dovendo Σ avere punti basi). Le quadriche di Σ che si spezzano in 2 piani sono allora le polari dei 10 vertici del pentaedro della superficie cubica; e questi vertici, e per conseguenza quelle coppie di piani, vengono parzialmente a coincidere quando 4 facce del pentaedro passano per un medesimo punto, oppure due almeno di queste facce coincidono.

Questi casi di degenerazione del pentaedro sono stati studiati in una Memoria di C. Rodenberg [18]). Un punto comune a 4 facce del pentaedro è vertice di un cono cubico osculatore alla superficie, e ha per quadrica polare il piano della curva di osculazione contato due volte; siamo così ricondotti al caso del n° 7. A questa categoria

---

17) Una terna di coppie di piani infinitamente vicine dipende infatti da $6+5+5=16$ parametri. D'altra parte un fascio di caratteristica $[(22)]$ dipende da 11 parametri (4 per la retta-asse, 3 per ciascuna delle due rette a, b incidenti a r, e uno ancora per la proiettività fra la punteggiata r e il fascio dei piani tangenti in questi punti); e nel sistema lineare ∞^7 delle quadriche passanti per i due punti ar, br vi sono ∞^5 reti passanti per il fascio $[(22)]$ anzidetto.

18) *Zur Classification der Flächen dritter Ordnung* [Mathematische Annalen, t. XIV (1879), pp. 46-110].

appartengono, come casi ulteriormente particolari, anche quelli in cui uno dei 5 piani del pentaedro diventa indeterminato.

Facendo invece coincidere 2 facce del pentaedro, si vede subito che 3 dei 10 vertici vengono a coincidere rispettivamente con altri 3; questo caso condurrà a una congruenza Γ, la cui superficie immagine F^{10} avrà 3 punti doppi conici e sole sette coppie distinte di cubiche γ_i, γ'_i. Dalla Memoria citata (cfr. il quadro riassuntivo unitovi) risulta pure che si possono far coincidere anche tre facce del pentaedro (ma non un numero maggiore, nè le altre due facce in pari tempo tra loro) senza che la superficie cubica acquisti punti doppi; allora 9 dei 10 vertici del tetraedro coincidono a 3 a 3 [19]). Questo caso corrisponde a una F^{10} con 3 punti doppi biplanari e sole 4 coppie distinte di curve γ_i, γ'_i.

11. Sulla superficie F^{10} si possono far avvicinare indefinitamente anche 4 coppie di cubiche γ_i, γ'_i, o un maggior numero, e perfino tutte 10 queste coppie. Il punto doppio della superficie diventa allora rispettivamente del tipo B_4, B_5, ..., B_{10}; cioè un punto risultante, per un indice i pari, da $\frac{i}{2}$ punti doppi conici consecutivi, e per un indice dispari da un punto doppio biplanare ordinario (n° 9) seguito da $\frac{i-3}{2}$ punti doppi conici consecutivi, sempre sopra un ramo lineare di curva. Per es., per far coincidere 4 (o 5) coppie di cubiche, possiamo prima farne coincidere 2 (o 3) e in pari tempo altre 2, e poi far avvicinare indefinitamente le due coppie ancora distinte e, con esse, i relativi punti doppi.

Rimane però a dimostrare l'effettiva esistenza di superficie F^{10} di questi diversi tipi. Ci limiteremo a farlo per il caso estremo, che è il più interessante, ossia per il caso delle 10 coppie di cubiche tutte coincidenti [20]).

Riferiamoci perciò alla congruenza Γ formata dalle rette principali di un sistema lineare ∞^3 di quadriche (Σ), privo di punti basi. Pensando le quadriche di questo sistema come punti di uno spazio S_3, il sistema ∞^2 dei coni contenuti nel sistema medesimo ci apparirà come una superficie del 4° ordine Φ della specie simmetroide [21]),

---

[19]) L'equazione di questa superficie può mettersi sotto la forma:

$$\frac{x_1^3}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^3}{\alpha_2^2} + \gamma x_3^2 - 3\frac{x_3^2(x_1 + x_2)}{\alpha_3} - 3x_3x_4^2 = 0$$

essendo α_1, α_2, α_3, γ delle costanti. Il piano $x_3 = 0$ è il piano triplo del pentaedro, e i piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ne sono i piani semplici. I tre vertici tripli cadono nei punti fondamentali [1], [2] e [4] del sistema di coordinate; il vertice rimanente nel punto $x_1 - x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

[20]) Sulla superficie F^6 di S_3 questi casi non conducono a ulteriori degenerazioni (non più possibili) del tetraedro fondamentale, e fanno soltanto avvicinare indefinitamente altre curve agli spigoli del tetraedro stesso, già degenerato come al n° 9.

[21]) A. Cayley: *a*) *A Memoir on Quartic Surfaces* [Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. III (1869-1871), pp. 19-69; *The Collected Mathematical Papers*, Vol. VII (1894), pp. 133-181], n° 65 e seguenti; *b*) *A Second Memoir on Quartic Surfaces* [Ibid., id., pp. 198-202; Ibid., id., pp. 256-260]; *c*) *A Third Memoir on Quartic Surfaces* [Ibid., id., pp. 234-266; Ibid., id., pp. 264-297]. — Vedi anche:

cioè con 10 punti doppi, immagini delle 10 coppie di piani contenute in Σ, e tale che il cono sestico circoscritto ad essa da uno qualunque di questi 10 punti si spezza in due coni cubici aventi a comune le 9 rette che congiungono questo punto doppio ai rimanenti. La congruenza Γ e, per conseguenza, la superficie F^{10} sua immagine in S_5 saranno birazionalmente identiche alla congruenza (12, 28) formata dalle tangenti doppie del simmetroide Φ: infatti ogni retta di Γ appartiene a un fascio di quadriche del sistema Σ il quale, poichè la sua curva base si spezza in una retta e una cubica, ha i suoi 4 coni a due a due coincidenti (ha cioè la caratteristica [22]), e corrisponde perciò a una tangente doppia di Φ; e viceversa. Le 10 coppie di coni cubici circoscritte a Φ dai suoi punti doppi corrisponderanno alle 10 coppie di inviluppi piani di 3^a classe contenute in Γ, vale a dire alle 10 coppie di cubiche γ_i, γ'_i di F^{10}. E pertanto, per far coincidere tutte queste coppie, basterà che rendiamo infinitamente vicini sul simmetroide Φ i dieci punti doppi; la congruenza delle tangenti doppie di questo particolare simmetroide sarà birazionalmente identica alla F^{10} da noi desiderata. Noi faremo vedere anzi che i 10 punti doppi del simmetroide Φ si possono rendere tutti infinitamente vicini sopra un ramo lineare di curva algebrica; ed essi staranno certo sopra un ramo lineare di curva quando il punto doppio unico risultante dal loro insieme sia biplanare [22]).

Ora un simmetroide si proietta da uno qualunque dei suoi punti doppi secondo un piano doppio, la cui curva di diramazione (del 6° ordine) è composta di due cubiche e ha una conica sitangente (immagine del centro di proiezione); e viceversa ogni piano doppio così fatto è proiezione di una superficie del 4° ordine, che è un simmetroide o un suo caso particolare [essendo per questo sufficiente che il cono circoscritto alla superficie da *uno* dei punti doppi si spezzi in due coni cubici [23])]. A noi occorre che i 9 punti comuni alle due cubiche, le quali formano insieme la sestica di diramazione, siano tutti coincidenti; e che la conica sitangente alla coppia di cubiche, ora immagine di un punto doppio biplanare, sia composta di due rette uscenti dall'unico punto comune alle due cubiche e tangenti entrambe in un altro punto a ciascuna delle cubiche stesse. Si osservi inoltre che il punto comune alle due cubiche non deve essere un loro punto di flesso, perchè da un tal punto non escirebbe, all'infuori della tangente d'inflessione, nessun'altra tangente comune delle due curve [24]).

Dobbiamo dunque accertare l'esistenza in un piano di due cubiche soddisfacenti alle condizioni suddette. La cubica:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = 0$$

ha in ciascuno dei 3 punti fondamentali del sistema di coordinate un punto «nonatico»,

---

SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, II. Theil, III. Auflage (Leipzig, Teubner, 1880), pp. 468-469.

[22]) C. SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXV (1897), pp. 1-54], n° 12.

[23]) Cfr.: loc. cit. [21]) *b*, n^i 116-118; [21]) *c*, n^i 151-153.

[24]) Infatti una tale tangente, supposta esistente, segherebbe il fascio determinato dalle due cubiche secondo un'involuzione I_2 con tre punti doppi; il che è impossibile.

cioè un punto non di flesso nel quale coincidono tutte le sue intersezioni con un'altra cubica. E la curva:

$$x_2^3 - x_3^3 - x_1 x_2 x_3 = 0$$

ha un punto doppio nel punto fondamentale [1], e le sue 9 intersezioni colla precedente (come è facile verificare) tutte coincidenti in questo medesimo punto. Perciò il fascio:

$$(1) \qquad x_2^3 - x_3^3 - x_1 x_2 x_3 + k(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) = 0$$

avrà i suoi 9 punti basi tutti coincidenti nel punto $x_2 = x_3 = 0$ [25]).

La condizione perchè la retta $x_3 = \lambda x_2$ sia tangente alla cubica (1) si può mettere sotto la forma:

$$(2) \qquad k^2(\lambda^4 - 4\lambda) + 2k(\lambda^3 - 2) + \lambda^2 = 0;$$

e bisogna perciò trovare due valori distinti di λ i quali, sostituiti in quest'ultima equazione, la rendono soddisfatta dai medesimi due valori di k: in altri termini, due valori λ, μ *distinti* pei quali sia:

$$\frac{\lambda^4 - 4\lambda}{\mu^4 - 4\mu} = \frac{\lambda^3 - 2}{\mu^3 - 2} = \frac{\lambda^2}{\mu^2}.$$

Questo sistema, liberato dalle soluzioni $\lambda = \mu$, si riduce al seguente altro:

$$\lambda\mu(\lambda + \mu) + 4 = 0, \qquad \lambda^2\mu^2 + 2(\lambda + \mu) = 0$$

che è soddisfatto per

$$\lambda\mu = 2, \qquad \lambda + \mu = -2$$

ossia

$$\lambda = -1 + i, \qquad \mu = -1 - i.$$

L'equazione (2) diventa allora:

$$2k^2 - 2k + 1 = 0$$

colla soluzioni $k = \dfrac{1 \pm i}{2}$; e troviamo così che le due cubiche:

$$(3) \qquad x_2^3 - x_3^3 - x_1 x_2 x_3 + \frac{1 \pm i}{2}(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) = 0$$

la cui equazione può anche scriversi:

$$(3') \qquad (1 \mp i)(x_2^3 - x_3^3 - x_1 x_2 x_3) + (x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) = 0$$

sono entrambe tangenti alle due rette:

$$x_2(1 \pm i) + x_3 = 0$$

---

[25]) All'equazione di questo fascio sono giunto partendo (per suggerimento del Prof. C. SEGRE) dall'equazione di un sistema lineare ∞^3 di cubiche con 6 punti basi coincidenti, la quale trovasi nella Memoria di J. DIEKMANN sulla rappresentazione piana delle superficie di 3° ordine con punti doppi {*Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3ter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält* [Mathematische Annalen, t. IV (1871), pp. 442-475]}. La superficie rappresentata da questo sistema lineare, la quale ha un punto doppio biplanare del tipo B_6, contiene una retta immagine del gruppo dei 6 punti base consecutivi; e alle sezioni con piani passanti per un punto di questa retta, oppure per una tangente e in particolare per la seconda tangente principale in questo punto, devono corrispondere nel piano rappresentativo cubiche aventi un settimo, un ottavo, o anche un nono punto comune consecutivo ai primi.

di equazione complessiva:

$$(4) \qquad 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0.$$

Si può mettere in evidenza questo fatto scrivendo la (3) o (3′) sotto la forma:

$$(5) \quad x_2\left[x_1 - x_2 - \frac{3 \mp i}{2}x_3\right]^2 + (2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)\left[x_1 \mp \frac{i}{2}x_2 - (1 \mp i)x_3\right] = 0$$

dove la retta

$$x_1 - x_2 - \frac{3 \mp i}{2}x_3 = 0$$

(col doppio segno, rispettivamente per le due cubiche) è la corda di contatto delle due tangenti (4).

Ponendo:

$$A \equiv x_1 - x_2 - \frac{3 - i}{2}x_3, \qquad B \equiv x_1 - \frac{i}{2}x_2 - (1 - i)x_3$$

$$A' \equiv x_1 - x_2 - \frac{3 + i}{2}x_3, \qquad B' \equiv x_1 + \frac{i}{2}x_2 - (1 + i)x_3$$

la sestica composta mediante le due cubiche (5) sarà rappresentata dall'equazione:

$$x_2^2 A^2 A'^2 + x_2(2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)[A^2B' + A'^2B] + (2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)^2 BB' = 0$$

che può scriversi anche così:

$$(x_2 + x_3)^2 A^2 A'^2 - (2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)[x_2(A^2B' + A'^2B) + (2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)BB' + A^2A'^2] = 0.$$

Il piano doppio avente questa sestica come curva di diramazione è dunque proiezione della superficie del 4° ordine:

$$[2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2]x_0^2 + [x_2 + x_3]AA'x_0$$
$$+ \tfrac{1}{4}[x_2(A^2B' + A'^2B) + (2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)BB' + A^2A'^2] = 0$$

la quale ha nel punto fondamentale [0] un punto doppio biplanare, e non contiene la retta $x_2 = x_3 = 0$ (perchè nel prodotto $A^2A'^2$, e in questo termine soltanto, compare effettivamente la potenza x_1^4). Ciò basta per affermare che questa superficie, la quale appartiene al tipo simmetroide e ha perciò 10 punti doppi, ha questi punti doppi tutti infinitamente vicini al punto [0]: infatti questi punti devono proiettarsi da [0] sul piano doppio nel punto $x_2 = x_3 = 0$, unico punto doppio della curva di diramazione; essi stanno quindi sulla retta $x_2 = x_3 = 0$ (o sono infinitamente vicini ad essa); e d'altra parte questa retta non ha a comune colla superficie che il solo punto [0] [26]).

[26]) Lo stesso piano doppio è anche proiezione di quest'altra superficie di 4° ordine:

$$[2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2]x_0^2 + x_2AA'x_0 - \frac{1}{4}[x_2(A^2B' + A'^2B) + (2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2)BB'] = 0$$

la quale contiene invece la retta $x_2 = x_3 = 0$, e ha il piano $x_2 = 0$ come piano tangente fisso lungo di essa. Segue da ciò che la superficie deve avere su questa retta *tre* punti doppi, dei quali due sono infinitamente vicini nella posizione [0]; il terzo è distinto da questi, e cade nel punto $x_2 = x_3 = 2x_0 - x_1 = 0$. Queste due superficie sono birazionalmente identiche; alle sezioni piane dell'una corrispondono nell'altra le curve proiezioni delle sezioni piane dal punto doppio.

12. Benchè dalle considerazioni precedenti risulti già assodata l'esistenza di una F^{10} colle dieci coppie di cubiche γ_i, γ'_i tutte coincidenti, faremo vedere ancora come si possa effettivamente costruire una tal superficie, e più precisamente come si possa costruire un sistema lineare ∞^3 di quadriche di S_3 contenente una sola coppia di piani: la congruenza delle rette principali di questo sistema sarà allora una F^{10} del tipo richiesto.

Indichiamo con ξ_1, ξ_2 le due cubiche piane rappresentate dalle equazioni (3) o (3') del n° prec. Prendiamo poi in un piano α una rete di coniche σ_α, priva di punti basi, e tale che, considerando le coniche della rete a loro volta come punti di un piano, il sistema ∞^1 (d'indice 3) Ξ_1 formato dalle coniche degeneri della rete sia proiettivamente identico alla cubica ξ_1. Ciò è possibile in infiniti modi; come pure in infiniti modi si può ancora soddisfare la seguente condizione ulteriore. Si indichi con $\mu \equiv m_1 m_2$ la coppia di rette della rete σ_α che corrisponde al punto $x_2 = x_3 = 0$ della cubica ξ_1; vi saranno allora nella rete quattro fasci contenenti l'elemento μ e tangenti altrove al sistema Ξ_1 (perciò di caratteristica [21]), e gli elementi (coppie di rette) di contatto di questi fasci con Ξ_1 avranno i loro punti doppi in punti semplici della conica degenere $\mu \equiv m_1 m_2$; due sopra m_1, e due sopra m_2. Noi intendiamo che alla coppia di tangenti (4) della cubica ξ_1 corrisponda una di queste due coppie di fasci; per es. quella i cui punti basi doppi (che chiameremo M, M') stanno sopra m_1 [27]). La rete σ_α segherà allora sopra m_1 l'involuzione di cui M, M' sono i punti doppi.

Si prenda ora, similmente, in un altro piano β una rete di coniche σ_β il cui sistema ∞^1 di coniche degeneri sia proiettivamente identico alla cubica ξ_2, con analoga condizione; si indichino con n_1, n_2, N, N' gli elementi rispettivamente analoghi a m_1, m_2, M, M', e siano precisamente M e N, M' e N' punti basi di fasci corrispondenti a una stessa delle tangenti (4). Avremo così nei piani α e β due reti di coniche σ_α, σ_β riferite proiettivamente a uno stesso piano (il piano delle due cubiche ξ_1, ξ_2) e perciò tra loro, e seganti sulle rette m_1 e n_1 rispettivamente le due involuzioni di punti doppi M, M' e N, N'. Per mezzo di una trasformazione omografica dello spazio applicata al piano β (o α) possiamo far coincidere la retta n_1 colla m_1 (rimanendo tuttavia distinti i due piani), far pure coincidere i punti N e N' rispettivamente con M e M', e inoltre il punto $n_1 n_2$ col punto coniugato armonico di $m_1 m_2$ rispetto a M, M'. Allora le due reti σ_α, σ_β segheranno sulla retta $\alpha\beta \equiv m_1 \equiv n_1$ la medesima involuzione; e, di più, tre diverse coppie di fasci omologhi — quelli che corrispondono alle due tangenti (4) e alla retta $x_2 = 0$, tangente comune delle cubiche (3) [28]) — segheranno sulla retta $\alpha\beta$ la medesima coppia di punti. Altrettanto avverrà quindi per ogni coppia di coniche omologhe delle due reti.

Due coniche omologhe, incontrando la retta $\alpha\beta$ nei medesimi due punti, costitui-

---

[27]) Ciò equivale in sostanza ad imporre che nella proiettività fra ξ_1 e Ξ_1 si corrispondano due determinate delle 3 involuzioni ellittiche (non singolari) esistenti su di esse.

[28]) Questi ultimi due fasci segano rispettivamente quella coppia dell'involuzione che contiene il punto $m_1 m_2$, e la coppia che contiene il punto $n_1 n_2$. E, per costruzione, queste 2 coppie coincidono.

ranno sempre, insieme, la curva base di un fascio di quadriche contenente la coppia di piani $\alpha\beta$. Avremo così ∞^2 fasci costituenti insieme un sistema ∞^3, che è evidentemente lineare. Dico che in questo sistema non sono contenute altre coppie di piani, all'infuori della coppia $\alpha\beta$. Infatti un'altra coppia di piani, supposta esistente, dovrebbe segare i piani α e β secondo coppie di rette corrispondentisi nella proiettività fra le due reti σ_α, σ_β, e perciò corrispondenti a un punto comune alle due cubiche (3); quelle coppie non potranno essere dunque che $m_1 m_2$ e $n_1 n_2$, corrispondenti al punto $x_2 = x_3 = 0$.

E ricordando che ora $m_1 \equiv n_1$, mentre le rette m_2, n_2 incontrano la precedente in punti distinti, si vede che per le due coppie di rette $m_1 m_2$, $n_1 n_2$ (la $m_1 \equiv n_1$ essendo da contarsi due volte) non passano altre coppie di piani, all'infuori della coppia $\alpha\beta$. (In altri termini, queste due coppie di rette formano la curva base di un fascio di quadriche di caratteristica [(22)]; cfr. n° 8, 9).

Se invece si fossero fatti coincidere i due punti $m_1 m_2$ e $n_1 n_2$, le stesse coppie di rette avrebbero costituita la curva base di un fascio tutto composto di coni, e contenente una seconda coppia di piani. Si troverebbe così un altro sistema lineare ∞^3 di quadriche, nel quale il sistema ∞^2 dei coni è proiettivamente identico alla superficie di 4° ordine considerata nella nota [26]).

13. Quando sopra una superficie F^{10}, sulla quale già due coppie di cubiche γ_i, γ'_i coincidono, e che ha per conseguenza un punto doppio P, anche altre coppie di cubiche si fanno avvicinare indefinitamente alle prime, l'intorno del punto P, che può considerarsi da principio come una conica infinitesima a, subisce le seguenti modificazioni [29]).

Quando una terza coppia di cubiche viene a coincidere colle due prime (n° 9), poichè P diventa punto biplanare, la conica infinitesima a si spezza in due rette a_1, a_2 con *un* elemento a comune. Quando una quarta coppia viene a coincidere colle precedenti, fra a_1 e a_2 si interpone un'ulteriore conica infinitesima b (intorno di 2° ordine), restando a_1 e a_2 senza elementi comuni. Poi, alla quinta coppia, b si spezza a sua volta in due rette b_1, b_2, in modo che a_1 ha un elemento comune con b_1, b_1 con b_2, e b_2 con a_2; alla 6^a coppia, fra b_1 e b_2 si interpone una nuova conica infinitesima c [30]);

---

[29]) Si può eliminare ogni eventuale dubbio, che il punto doppio P rimanga biplanare (e vi siano perciò, consecutivamente ad esso, solo punti doppi appartenenti con esso a un ramo lineare di curva), per mezzo delle considerazioni seguenti. Quando P è soltanto punto doppio conico (n° 8), il cono quadrico ivi tangente alla F^{10} incontra la quadrica di S_5 contenente F^{10}, immagine della M_4^2 delle rette di S_3, secondo 4 generatrici; e vi sono perciò nella congruenza Γ quattro rette infinitamente vicine alla retta $r = \alpha\beta$ e a questa incidenti. Queste rette incontrano r rispettivamente nei suoi punti di contatto cogli inviluppi della congruenza contenuti nei piani α, β, e nei punti doppi dell'involuzione segata dal sistema Σ sopra r medesima; perchè per ciascuno di questi punti si vede facilmente che r assorbe anche un terzo fra i 7 raggi della congruenza che ne escono. Questi 4 punti, nel caso estremo considerato al n° prec., sono quelli chiamati $n_1 n_2$, $m_1 m_2$, $M \equiv N$, $M' \equiv N'$, e sono sempre distinti; mentre se P fosse diventato uniplanare, quelle 4 rette e perciò questi 4 punti dovrebbero a due a due coincidere.

[30]) Una trasformazione quadratica col punto doppio come fondamentale muterebbe la F^{10} in altra

e così di seguito. Tutte queste linee infinitesime sono di grado virtuale -2 e genere zero. Quando tutte le 10 coppie di cubiche siano venute a coincidere, le 10 cubiche γ_i risulteranno sostituite dalle curve seguenti:

$$\gamma_1;\quad \gamma_1 + a_1;\quad \gamma_1 + a_1 + b_1;\quad \gamma_1 + a_1 + b_1 + c_1;\ \ldots$$
$$\ldots\ \gamma_1 + a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e + d_2 + c_2 + b_2 + a_2;$$

e altrettanto dicasi delle γ'_i, cambiando soltanto γ_1 in γ'_1.

Una base della superficie F^{10} è perciò costituita dai dieci elementi γ_1, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e. Siccome γ_1 è di grado zero, e ha un solo punto a comune con a_1 (nella posizione P) e nessun punto a comune cogli altri elementi della base, così ogni curva tracciata sulla superficie segherà sopra γ_1 un gruppo di punti di cui un certo multiplo sarà equivalente a P (come punto di γ_1) contato un conveniente numero di volte; e due curve qualunque della superficie segheranno sopra γ_1 gruppi di punti, di cui certi multipli saranno equivalenti. In particolare (n° 2) il sistema triplo delle sezioni iperpiane sarà equivalente al sistema:

(*) $$|\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{10}| \equiv |10\gamma_1 + 9a_1 + \cdots|$$

oppure al suo aggiunto:

(**) $$|9\gamma_1 + \gamma'_1 + 9a_1 + \cdots|;$$

in ogni caso dunque, sopra γ_1, il punto P contato 9 volte sarà equivalente ai gruppi segati dalle curve del 3° ordine del piano di γ_1 stessa; vale a dire P sarà per γ_1 ($e\,\gamma'_1$) punto « nonatico » (e non di flesso) [31]).

I diversi sistemi lineari che si ottenevano sulla F^{10} generale da un medesimo sistema somma di più cubiche γ_i, γ'_i col variare o permutare gli indici i (non però gli apici!) sono ora tutti coincidenti, a meno di parti o linee infinitesime fisse. Coincidono in particolare tutti i fasci $|2\delta_i|$; e le curve di quest'unico fascio hanno in P un punto doppio. Le due intersezioni di una qualsiasi cubica δ_k con una curva del fascio $|2\delta_1|$ cadono nei due punti di quest'ultima curva sovrapposti in P; perciò le trasformazioni birazionali rappresentate da equazioni del tipo della (1) del n° 4 si riducono tutte all'identità. Col procedimento generale del sig. ENRIQUES si possono ancora costruire sul fascio $|2\delta_1|$ e perciò sulla F^{10} delle trasformazioni birazionali non identiche; e ciò valen-

superficie contenente due rette a'_1, a'_2, immagini degli intorni a_1, a_2, e avente il punto $a'_1 a'_2$ come doppio. Se c'è un ulteriore punto doppio consecutivo ai primi e appartenente con essi a un ramo lineare di curva, la sua direzione sulla nuova superficie sarà esterna al piano $a'_1 a'_2$, e perciò questo piano non sarà tangente alla nuova superficie nel punto $a'_1 a'_2$; bensì dei due piani ivi tangenti ad essa uno passerà per a'_1 e l'altro per a'_2.

[31]) Se P fosse un flesso della cubica γ_1, la retta $\alpha\beta$ della congruenza Γ (cfr. n° 12) sarebbe tangente cuspidale dell'inviluppo di rette di questa congruenza contenuto nel piano α: perciò per il suo punto di contatto non passerebbero altre rette dell'inviluppo; il fascio della rete σ_α che ha questo punto come punto base conterrebbe la coppia di rette $\mu = m_1 m_2$ come sola conica degenere, e il punto $x_2 = x_3 = 0$ dovrebbe essere flesso della cubica ξ_1 (mentre non era tale).

dosi di due gruppi di uno stesso numero di punti, dei quali soltanto due equimultipli, e non i gruppi stessi, siano equivalenti. Ma queste trasformazioni saranno tutte cicliche. Per es., sopra ogni curva del fascio $|2\delta_1|$, la coppia di punti sovrapposti in P (P_2) contata tre volte e il gruppo G_6 segato da un iperpiano qualunque non sono equivalenti, ma sono tali tuttavia che $3\,G_6 \equiv 9\,P_2$ (poichè il sistema triplo delle sezioni iperpiane coincide con uno dei due sistemi (*) e (**) considerati di sopra): si giunge così a una trasformazione, e perciò a un gruppo ciclico di 3° ordine. E all'infuori di questo gruppo non vi saranno altre trasformazioni del tipo indicato. Infatti sopra F^{10} si può formare una base minima (n° 3) con una sezione iperpiana, presa insieme a γ_1, γ'_1, a_1, e altre linee infinitesime che non incontrano le curve del fascio $|2\delta_1|$; perciò sopra ogni curva di questo fascio il gruppo di punti segato da una curva qualsiasi tracciata sopra F^{10} si potrà ricavare per somma e sottrazione da G_6 e P_2; e avremo quindi soltanto trasformazioni del tipo $X' \equiv X + m\,G_6 - 3\,m\,P_2$, le quali, in forza della relazione $3\,G_6 \equiv 9\,P_2$, si riducono alle sole precedenti.

Le 45 involuzioni del tipo della I_2 considerata al n° 5 coincidono anche tutte. Quest'unica involuzione, alla quale appartiene il sistema lineare ∞^4 $|4\gamma_1 + 2\,a_2|$, trasforma pure in sè ogni curva del fascio $|2\delta_1|$, subordinandovi un'involuzione razionale. Combinata col gruppo ciclico di 3° ordine poc'anzi costruito, quest'involuzione dà luogo a un gruppo (diedrico) di 6° ordine.

Il gruppo discontinuo infinito di tutte le trasformazioni birazionali conosciute sulla F^{10} generale si riduce dunque in questo caso a un gruppo finito.

Considerando il numero-base ρ in senso proiettivo, esso, per questa particolare F^{10}, risulta eguale all'unità; ossia due linee qualunque tracciate sopra F^{10} sono sempre tali che due loro multipli convenienti sono equivalenti in senso proiettivo. Non vi è però una base intermediaria costituita da un'unica curva effettiva; una base siffatta sarebbe costituita soltanto dalla curva virtuale $C - 3\gamma_1$ (dove C indica una sezione iperpiana). E si avrebbe, sempre in senso proiettivo:

$$2\gamma_1 \equiv 2\gamma'_1 \equiv 6(C - 3\gamma_1)$$

$$2\,C \equiv 20(C - 3\gamma_1).$$

14. Considerando le quadriche di S_3 come punti di uno spazio S_9, le ∞^6 coppie di piani saranno rappresentate dai punti di una varietà M_6^{10}. Il genere delle curve intersezioni di questa varietà con spazi S_4 si può determinare valutandolo in modo opportuno sopra una sezione qualsiasi, comunque riducibile. Per es., nel sistema lineare ∞^4 formato dalle quadriche che passano per 5 punti fissi indipendenti le coppie di piani si distribuiscono in 10 fasci, ciascuno composto di un piano fisso contenente 3 dei 5 punti e di un piano variabile passante per gli altri due; ognuno di questi fasci ha *un* elemento a comune con tre altri (quelli che si ottengono scambiando i 2 ultimi punti con 2 dei primi 3); si ha dunque una curva immagine composta di 10 rette aventi a due a due $\frac{3.10}{2} = 15$ punti comuni, perciò di genere virtuale 6.

La superficie F^{10} intersezione della M_6^{10} con uno spazio S_5 ha dunque le sezioni iperpiane di genere $p = 6$ con serie caratteristica $g_{10}^4 \equiv g_{2p-2}^{p-2}$. E poichè (come verificheremo tra un momento) essa è una superficie regolare di genere zero, questa g_{2p-2}^{p-2} sarà una serie completa non speciale, e sulla F^{10} il sistema delle sezioni iperpiane sarà secondo aggiunto di sè medesimo. La F^{10} sarà dunque una superficie di genere zero e bigenere uno con curva bicanonica di ordine zero del tipo generale dianzi considerato [32]).

Nella M_6^{10} suddetta è contenuta la varietà μ_3^8 luogo dei punti immagini delle quadriche degenerate in piani doppi [33]). Quest'ultima varietà è quadrupla per la M_6^{10} (perchè in un sistema lineare ∞^3 di quadriche un piano doppio assorbe quattro delle 10 coppie di piani). Perciò l'intersezione della M_6^{10} con un S_6 generico sarà una M_3^{10} con 8 punti quadrupli, avente la F^{10} suddetta come sezione iperpiana.

Questa M_3^{10} contiene le rette determinate dai suoi punti quadrupli a due a due, e ha lungo ciascuna di queste rette un S_3 tangente fisso. Da una qualunque di queste rette essa si proietta in una V_3^3 di S_4 avente come punti doppi le proiezioni degli altri sei punti quadrupli; la M_3^{10} è quindi razionale. I due punti quadrupli A, B centri di proiezione hanno per immagini sopra V_3^3 due rigate cubiche R, R' del medesimo sistema; perciò le F^{10} sezioni iperpiane della M_3^{10} si proietteranno in superficie, di ordine 9, appartenenti al sistema somma delle due rigate suddette e delle sezioni iperpiane di V_3^3. Queste superficie sono regolari, e di genere zero (perchè le due rigate R, R' hanno per somma una rigata pure razionale, e che ha perciò a comune colla sezione iperpiana una curva anche razionale); rimane così assodato quanto si è detto relativamente alla F^{10}.

15. Ci siamo così procurati una M_3^{10} (razionale) di S_6 avente la F^{10} di genere zero e bigenere uno come sezione iperpiana generica. Gli S_5 tangenti alla M_3^{10} la segheranno secondo F^{10} con punto doppio: dico che queste F^{10} sono del tipo speciale incontrato al n° 8, e anzi, più generalmente, che la F^{10} non può acquistare un punto doppio in modo diverso da quello indicato al n° 8.

Infatti la F^{10}, anche acquistando un punto doppio, rimane sempre priva di curve eccezionali (perchè sempre il sistema delle sue sezioni iperpiane è esattamente secondo aggiunto di sè stesso); perciò nella relazione (cfr. n° 3):

$$\rho_0 + \rho = I + 2 = 10$$

il 2° membro non cambierà di valore; ed essendo pur sempre $\rho_0 = 0$, resterà immutato (in senso invariantivo) anche il numero-base $\rho = 10$. Una base minima sarà perciò ancora composta di 11 curve. D'altra parte sulla F^{10} generale una base minima è costituita da una sezione iperpiana C e da 10 cubiche; e questa base minima, derivando

---

[32]) Dato un sistema lineare ∞^5 di quadriche di S_3, esistono in generale (come si verifica facilmente) 20 punti che sono vertici di ∞^2 coni contenuti nel sistema; le cubiche della superficie F^{10} corrisponderanno alle coppie di piani di queste 20 reti.

[33]) Questa μ_3^8 risulta così rappresentata sullo spazio S_3 di piani in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le ∞^9 quadriche-inviluppi.

(n° 3) da una base intermediaria di determinante -1, si conserverà certo base minima anche dopo che la superficie ha acquistato un punto doppio. Perciò l'intorno d del punto doppio, come conica infinitesima di ordine zero, genere zero e grado virtuale -2, si dovrà esprimere linearmente mediante le curve suddette. In quest'espressione la sezione iperpiana sarà l'unica curva il cui ordine non sia multiplo di 3; essa vi avrà perciò un coefficiente multiplo di 3 (zero incluso); e sostituendo a $3C$ la sua espressione come somma di 10 cubiche, riesciremo a esprimere d mediante sole cubiche:

$$d \equiv \sum m_i \delta_i .$$

In quest'espressione sarà naturalmente $\sum m_i = 0$, e le cubiche che vi compaiono effettivamente saranno in numero non maggiore di 11; dieci a due a due non aggiunte, e l'aggiunta di una di queste; per es. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{10}, \gamma_1'$. Se delle due cubiche γ_1, γ_1' una almeno ha coefficiente pari, potremo sostituirle la sua espressione mediante l'altra (essendo $2\gamma_1 \equiv 2\gamma_1'$), riducendoci così a sole 10 cubiche al più, a due a due non aggiunte:

$$d \equiv \sum_{i=1}^{10} m_i \gamma_i .$$

In tal caso, poichè il grado virtuale del 2° membro è $2\sum m_i m_k$, dovrà essere:

$$2\sum m_i m_k = -2.$$

D'altra parte, poichè $\sum m_i = 0$, si ha:

$$\left(\sum m_i\right)^2 \equiv \sum m_i^2 + 2\sum m_i m_k = 0.$$

E per conseguenza:

$$\sum m_i^2 = 2.$$

Perciò $d \equiv \gamma_i - \gamma_k$; ossia il punto doppio nasce, come al n° 8, dalla coincidenza delle due cubiche γ_i, γ_k.

Se invece nell'espressione di d le due cubiche γ_1 e γ_1' entrano entrambe con coefficiente dispari, potremo staccarne la differenza $\gamma_1 - \gamma_1'$, e scrivere:

$$d \equiv \gamma_1 - \gamma_1' + \sum_{i=1}^{10} m_i \gamma_i$$

essendo ancora $\sum m_i = 0$. Il grado virtuale del 2° membro è di nuovo $2\sum m_i m_k$, e si conclude perciò analogamente:

$$d \equiv \gamma_1 - \gamma_1' + \gamma_i - \gamma_k$$

ossia:

$$d \equiv \gamma_i - \gamma_k' .$$

La superficie F^{10} ha dunque la proprietà (comune colle superficie razionali) di non poter acquistare un punto doppio senza che su di essa certe coppie di curve, prima distinte, vengano a coincidere. Su di essa devono anzi sempre venir a coincidere due delle 20 cubiche, e, in pari tempo, le aggiunte di queste.

Torino, maggio 1909.

GINO FANO.