Gino Fano

Sui fondamenti della geometria

Boll. Mathesis, Vol. **2** (1910), p. 119–127

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1910_1>

Sui fondamenti della Geometria

(Sunto di conferenza promossa dalla Sez. Torinese della Società "Mathesis„ e tenuta il 15 maggio 1910)

Le questioni relative ai fondamenti della geometria, se anche non formano oggetto di speciale insegnamento nelle Scuole Medie, non possono a meno di interessare ogni Insegnante, dovendo la conoscenza di esse informarne e regolarne l'opera didattica. E quest'opera è della più alta importanza per la coltura scientifica e per l'avvenire del Paese: poichè attraverso le Scuole Medie passano (salvo rare eccezioni) tutti coloro che occuperanno un giorno le posizioni e gli uffici più elevati; e la maggioranza di questi, dedicandosi subito dopo a studi speciali, conserverà come prima base e linea direttiva del pensiero scientifico, riconoscibile a volte in tutta l'opera successiva, quella appunto che avrà tratta dalla Scuola Media (a meno che questa base non riesca a formarsela da sè, ma ciò pure in via di eccezione). Tanto più oggi che, nonostante il valore eminente e l'utilità dell'insegnamento classico, il centro di gravità della Scuola Media tende a spostarsi dal campo letterario verso il campo scientifico, l'insegnamento della matematica, che di tutta la parte scientifica costituisce lo scheletro, non può a meno di assurgere a sempre maggiore importanza.

E bene altresì che davanti a persone in parte estranee alla Scuola si discorra talvolta di nozioni matematiche, che possano considerarsi accessibili anche a chi non ha fatti in argomento studi speciali. Tale è forse il campo dei fondamenti della geometria, che fu certo tra quelli scrutati più a fondo dalla metà del secolo XIX in qua; così soltanto è stata messa in giusta luce l'origine sperimentale dei concetti e delle proposizioni primitive della geometria, e resa possibile una nuova concezione della scienza geometrica: la considerazione cioè della geometria come parte della fisica, assurta tuttavia a un alto grado di perfezione, per la semplicità e la generalità dei rapporti — i rapporti di posizione tra i corpi — da essa studiati (1).

---

(1) Enriques, *Problemi della scienza* (Bologna, 1906); p. 273.

*
* *

In ogni costruzione scientifica hanno parte l'esperienza e il ragionamento. Scopo ultimo è però quello di arrivare col ragionamento alla previsione di fatti non ancora osservati; a fatti più complessi, che non si sarebbero forse potuti osservare direttamente. Ma una dimostrazione per ragionamento, ossia una deduzione logica, è soltanto un *processo di riduzione*, che ci sospinge di passo in passo verso dati più semplici; e, risalendo la serie, giungeremo a dei *dati primitivi*, che dovremo accettare senza riduzione ulteriore. In matematica questi dati primitivi sono in minor numero, e più semplici, che in tutte le altre scienze, esclusa la logica: ma in geometria la parte loro riservata è già maggiore che in analisi. E anche in geometria, come p. es. nella fisica, questi dati primitivi vengono acquistati per mezzo di sensazioni, di esperienze: la semplicità di queste esperienze, il loro costante ripetersi, la facilità di provocarle, la concordanza dei risultati, concorrono a dare a questi risultati un grado di certezza molto elevato; ma si tratta sempre di certezza a base empirica.

Questi dati primitivi comprendono dei *concetti primitivi*, o fondamentali, desunti da osservazioni, e non definiti per mezzo di altri; e delle *proposizioni*, esprimenti proprietà degli enti a cui quei concetti si riferiscono. Nella loro scelta v'è dell'arbitrio, ma sono considerati generalmente come primitivi i concetti *punto* e *retta*, suggeriti ciascuno da diverse impressioni, nelle quali riconosciamo esservi qualcosa di comune; e il concetto di *distanza*, che nasce sopratutto da sensazioni tattili e muscolari, confrontate tra loro. Il concetto di *piano* nasce anch'esso da parecchie impressioni; ma si può definire per mezzo del punto e della retta. Osservazioni elementari ben note suggeriscono altresì le proposizioni primitive: Due punti qualunque individuano una retta, alla quale essi appartengono; la retta individuata da due punti di un piano è tutta contenuta in questo piano; ecc.

Il materiale primo della geometria proviene dunque da osservazioni; e poichè la geometria comprende osservazione e ragionamento, l'insegnamento di essa (e più generalmente di tutta la matematica) deve educare non soltanto il raziocinio, ma anche la facoltà di osservare, e di percepire fatti direttamente, senza ragionamento: cioè l'*intuizione*. E giustamente osserva Poincaré, che un matematico privo d'intuizione sarebbe come uno scrittore che conoscesse a perfezione la grammatica e non avesse idee (1)!

*
* *

I dati primitivi della geometria, se anche sono desunti da osservazioni, non sono tuttavia puri dati sperimentali (come non lo sono quelli di nessun'altra scienza). Questi dati sperimentali sono cioè sottoposti a un lavoro mentale di *semplificazione*, di *astrazione*, e anche di *associazione* fra i risultati di varie osser-

---

(1) *Science et méthode* (Paris, 1908); p. 137.

vazioni od esperienze; di ogni impressione ricevuta conserviamo alcune proprietà, forse quelle che ci hanno maggiormente colpiti (per la retta, ad es., le proprietà di omogeneità, e di simmetria tutto all'intorno), prescindendo da altre. Questa semplificazione o *schematizzazione* è necessaria, affinchè l'edificio scientifico non riesca troppo complicato: per poter studiare, capire, produrre, occorre che di tutta la costruzione scientifica si riesca a impossessarsi col minor lavoro possibile; che essa soddisfi cioè alla legge dell' *Economia del pensiero.* È indubbiamente più semplice, più maneggevole, più atta a essere ritenuta e applicata, la proprietà che la retta individuata da due punti di un piano è tutta contenuta in questo piano, piuttosto che un' altra, la quale affermasse che nessun punto di quella retta dista da questo piano più di un millimetro o di un decimo di millimetro, o (nel segmento intercetto fra quei due punti) più di una certa parte $\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\right)$ della distanza degli stessi punti. Si dirà che l'edifizio che costruiremo, fondandoci sui dati primitivi idealizzati, non troverà corrispondenza (esatta) nella realtà. È vero; ma di questa realtà esso costituirà lo *scheletro;* e, se procederemo cautamente nelle schematizzazioni, esso non si discosterà mai molto dalla realtà (come lo scheletro di un animale, il quale permette di ricostruirne le dimensioni con grande approssimazione), e potremo anche assegnare un limite superiore al quanto se ne discosta. Il teorema schematico: « In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono eguali » significa, in pratica, che se in un triangolo (meglio: in un oggetto rappresentato con approssimazione dal concetto di triangolo) due lati, misurati col metro, risultano avere entrambi una stessa lunghezza a a meno (p. es.) di ε per difetto, i due angoli opposti a quei lati, misurati col goniometro, differiranno per meno di una quantita ε', dipendente da ε e da a secondo una certa legge. E questa legge, col calcolo, si trova potersi esprimere colla formola $\varepsilon' = 61.' \frac{\varepsilon}{a}$ (dove ε' è espresso in gradi, ε e a in una stessa unità lineare) (1). In molte questioni (p. es. nelle operazioni geodetiche) anche un risultato di questo secondo tipo è importante, o addirittura indispensabile; ma nella maggior parte dei casi la prima forma, schematica sì, ma perciò appunto più semplice, chiara, suggestiva, è sufficiente. Il Klein, in un corso di lezioni (2), ha illustrati appunto questi due tipi di enunciati, assegnando il primo alla *Präcisionsmathematik*, e il secondo alla *Approximationsmathematik* (Matematica delle relazioni approssimate); la prima essendo *das feste Gerüst, an dem sich die Approximationsmathematik emporrankt.*

D'altronde queste schematizzazioni s'incontrano e sono necessarie in ogni scienza. Le leggi di Keplero sui movimenti dei pianeti (nelle quali i pianeti si suppongono punti materiali, e soggetti alla sola attrazione solare) sono prime (e molto grossolane) schematizzazioni di fenomeni complessi, che senza di ciò la nostra mente non riuscirebbe ad abbracciare. E così in ogni ramo della Fisica

---

(1) Enriques, L. c., p. 273-75.

(2) *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie*, (Leipzig; Teubner, 1902).

Matematica; p. es. nell'idrodinamica classica, nella quale alcune schematizzazioni corrispondono a ipotesi molto prossimamente verificate (es.: l'incompressibilità del fluido), ma non così altre (la mancanza di attrito interno). Le scienze sono anzi tanto meno accessibili al ragionamento, quanto più i fenomeni da essa studiati sono complessi, e abbisognano perciò di maggiore schematizzazione: meno di tutte forse la Sociologia, perchè gli elementi « uomini » — è ancora POINCARÉ che parla (1) — sono troppo dissimili, troppo variabili, e troppo capricciosi!

* * *

Fissati, in geometria, i concetti primitivi e le proposizioni primitive o *postulati* (sui quali ritornerò in seguito), possiamo, con sole operazioni logiche, *definire* altri enti geometrici (triangoli, cerchi,....), che corrisponderanno o potranno corrispondere con molta approssimazione a oggetti fisici, e *dimostrare* proprietà di questi enti. Entriamo così nel campo del ragionamento.

L'intuizione, che, per mezzo di osservazioni o esperienze, ci ha suggerite le proposizioni primitive, può aiutarci anche nel ragionamento? — L'intuizione potrà servirci a *guidare* il ragionamento; a *presentirne* e a *prevederne* la conclusione, e dirigere verso questa i nostri sforzi; a *controllare* e *confermare* sperimentalmente il risultato ottenuto; talvolta anche ad *abbracciare* e ritenere il ragionamento nel suo complesso — io direi quasi, con una parola, a *capirlo* —; ma sarebbe errore gravissimo il presentare come un ragionamento, come deduzione logica, un complesso di considerazioni nelle quali si insinuasse un nuovo ricorso all'intuizione. In primo luogo, il ragionamento verrebbe meno al suo ufficio, che è quello di stabilire una *connessione logica* tra due fatti: la connessione vi sarà forse, ma non l'avremo così stabilita. In secondo luogo, le nostre osservazioni ci forniscono soltanto dati grossolani, che noi idealizziamo e precisiamo nei nostri postulati; e l'applicare a un ente ideale, schematico, una proprietà ricavata da osservazioni sopra un modello fisico, senza esaminare se e fino a qual punto questo sia una realizzazione approssimata di quello, può condurre a veri errori. P. es.: Si ha una successione continua di punti; l'intuizione ce la presenta come una linea, e ci dice inoltre che qualunque linea ha in ogni suo punto una tangente; dunque la nostra successione di punti ha in ogni punto una tangente; ecc. E ciò è manifestamente errato: poichè è ben noto (traducendo la proprietà analiticamente) che vi sono funzioni continue non aventi derivata. Nè è il caso di insistere sul fatto che proprietà desunte da figure grafiche, eventualmente imperfette, possono condurre a evidenti sofismi: a quello p. es., ben noto, pel quale « ogni triangolo è isoscele »!

Anche nei ragionamenti di EUCLIDE talvolta s'incontrano concetti non definiti, e proprietà non esplicitamente postulate, e desunte invece dall'intuizione.

La parte logica dell'edifizio geometrico si è molto perfezionata in questi ultimi 30 anni, dopo la pubblicazione delle *Vorlesungen über neuere Geometrie* di

---

(1) L. c., p. 12.

M. Pasch (1882) nelle quali, per la prima volta, i concetti primitivi e i postulati si trovano tutti esplicitamente indicati come tali. Il periodo di maggiore attività e successo in questo indirizzo critico fu aperto dai proff. G. Peano (*I principi di geometria logicamente esposti*, 1889) e G. Veronese (*Fondamenti di geometria*, 1891); e anzi il Peano, coi simboli logici da lui introdotti per la trattazione delle questioni matematiche, ha dato alla scienza uno strumento utilissimo a scindere i ragionamenti in deduzioni logiche elementari, e a mettere in evidenza le eventuali nozioni e considerazioni intuitive che vi si fossero insinuate; e ha portati così alla parte logica dell'edifizio scientifico, insieme ad alcuni suoi allievi e cooperatori, contributi di grandissima importanza.

*
* *

Un ragionamento, nonostante l'apparente contraddizione, non può mai *dimostrare* in via assoluta un fatto (una proprietà): può soltanto stabilire una connessione logica tra due fatti. E così in ogni scienza; solo che queste connessioni logiche sono, per altre scienze, in numero molto inferiore.

Dopo aver fatto un ragionamento: *Se per una figura è verificata la tal proprietà, o il tal complesso di proprietà, è verificata pure la tal altra*, si vede molte volte che la prima proprietà, tutt' al più con qualche cambiamento di parola, affatto inessenziale, è pure verificata per un' altra figura, alla quale prima non si era pensato; e che a questa nuova figura si può applicare lo stesso ragionamento, colla relativa conclusione, salvo i medesimi cambiamenti di parole. E ciò anche in più modi. Si riconosce così che il ragionamento fatto ha un campo di applicazione, una portata molto più vasta di quanto prima sembrava. Le figure sono diverse; ma il ragionamento è sempre quello. *Nel corso del ragionamento, che è una successione di operazioni logiche, io ho il diritto di dimenticare (fino a un certo punto) cosa fosse la figura iniziale, e di sostituire a questa figura, già schematica, uno* **schema dello schema,** *del quale quella figura è una particolare realizzazione, ma che, al pari di questa, può averne molte altre, infinite altre; facendo così, non della geometria, ma della* **parte logica dell'edifizio geometrico,** *una* **teoria astratta.** Un ragionamento sopra una schema simile dà ragione del *mot d'esprit* di B. Russell: *La matematica è una scienza, nella quale non si sa mai di che si parli,* e anche (v. qui sopra) dell' aggiunta: *Nè se ciò di cui si parla sia vero.* Ma questo è appunto un vantaggio: la grande generalità, il poter trattare di molte cose ad un tempo (1). E la stessa idea (con intendimento diverso) si trova in Poincaré: *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.* Occorre naturalmente che queste due cose si possano « couler dans le même moule (2) » (adattare entro una stessa forma); ma, dopo dato loro quello stesso nome, anche i cambiamenti di parola dianzi accennati non occorrono più, i nomi essendo ormai

(1) E, di più, le parole citate si applicherebbero soltanto ai ragionamenti. Ma la matematica, e in particolare la geometria (come ho detto) non è scienza di solo ragionamento.

(2) L. c., p. 29.

gli stessi. Basta una conoscenza anche limitata di matematica per comprendere i vantaggi inestimabili che può portare una parola ben scelta, o un'estensione opportuna del significato di altra già esistente: cosa sarebbe la teoria delle equazioni algebriche senza i numeri complessi, o la geometria proiettiva senza gli elementi all'infinito?

E tutto questo è ancora *economia di pensiero*: una considerazione, un ragionamento solo, serve per diecine e centinaia di casi diversi!

*
* *

Sulla *scelta dei postulati* (o *proposizioni primitive*) desidero fare qualche osservazione:

1) Secondo che ci proponiamo di indagare una determinata categoria di proprietà delle figure, o un' altra *(proprietà metriche; proprietà di posizione; proprietà inerenti alla teoria del continuo; ....)*, occorrerà generalmente prendere le mosse da proposizioni anche diverse, o almeno in parte diverse. (P. es., i concetti di retta e piano e i postulati relativi sono fondamentali per lo studio delle proprietà metriche (ossia della geometria elementare) e delle proprietà di posizione, e non occorrono invece per la teoria generale del continuo). Lo studio di queste diverse categorie di proprietà delle figure è oggetto di altrettanti rami di geometria, o indirizzi geometrici, che F. Klein ha caratterizzati mediante *gruppi di trasformazioni* (in quanto quelle proprietà sono invarianti rispetto alle [sole] trasformazioni di questi singoli gruppi (1).

2) *Nella scelta dei postulati vi è sempre un certo arbitrio.* In primo luogo, fra due o più proposizioni equivalenti, una delle quali debba introdursi come postulato, è del tutto arbitraria la scelta di quest' una. Inoltre, ogni postulato implica una schematizzazione di dati sperimentali; e questa schematizzazione può farsi talvolta in più modi diversi, i quali tutti conducono a conseguenze concordanti, entro certi limiti, coll' esperienza (cfr. quanto è detto in seguito sul postulato delle parallele). La scelta viene allora regolata da *criteri di opportunità*, conforme all' affermazione di Klein, essere i postulati *vernünftige Sätze* (mentre appare eccessiva la tesi nominalistica, sostenuta da Poincaré (2), che considera i principi geometrici come pure convenzioni; comode, ma del tutto arbitrarie, purchè tra loro compatibili).

3) Sulla *compatibilità* e sull'*indipendenza* (relativa o assoluta) dei vari postulati si potrebbe discorrere a lungo. Qui osserverò soltanto che l' indipendenza dei postulati, se ha molta importanza per l' assetto definitivo di una teoria geometrica, non ne ha affatto per l' insegnamento che s' impartisce nelle Scuole Medie. A nulla varrebbe affermare l' indipendenza dei postulati, senza dimostrarla;

---

(1) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872); trad. ital. in Ann. di Matematica. (2), vol. 17 (1889-90), p. 307; e: *Einleitung in die höhere Geometrie,* vol. II (litogr.; Göttingen, 1893). V, anche F. Enriques, *Principien der Geometrie;* G. Fano, *Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip* (art, III AB 1 e III AB 4*b* della Encykl. d. math. Wiss.).

(2) *La science et l'hypothèse* (Paris, Flammarion).

e la dimostrazione richiederebbe una critica minuta, didatticamente inopportuna, e spesso non potrebbe nemmeno farsi senza ricorrere a considerazioni matematiche più elevate. E d'altra parte, posto che la geometria è lo studio dei rapporti di posizione tra i corpi (opportunamente schematizzati); ch'essa si fonda su dati primitivi suggeriti da osservazioni ed esperienze, e deve, anche nelle successive deduzioni logiche, mantenere il contatto colla realtà; non vi è nessun inconveniente se dall'esperienza si desumeranno direttamente p. es. anche venti o più proposizioni, anzichè sole otto o dieci. In tal modo si eviterà pure di presentare come teoremi delle proposizioni molto evidenti (es.: tutti gli angoli retti sono eguali fra loro; una retta, la quale contenga un punto interno rispetto a una data circonferenza, incontra questa in due punti), e di far nascere così un concetto errato dell'ufficio riservato al ragionamento, e l'illusione più esiziale ancora, che una proposizione, pel solo fatto di essere stabilita come teorema, abbia un grado di certezza maggiore di un'altra desunta da osservazioni e enunciata come postulato!

*
* *

Nella *geometria elementare*, che è insegnata nelle nostre Scuole Medie, e si occupa essenzialmente di *proprietà metriche* delle figure (riguardanti distanze, o meglio rapporti di distanze, e grandezze angolari), occorrono i seguenti postulati o gruppi di postulati (qui solo enumerati, senza fermarci ad enunciarli nè illustrarli):

I) *Postulati di appartenenza*, i quali, muovendo dal concetto fondamentale di *punto*, e dai concetti di *retta* e *piano*, come particolari *classi di punti*, ne stabiliscono le proprietà fondamentali: Due punti individuano una retta, alla quale essi appartengono; ecc.

II) *Postulati relativi alle proprietà lineari della retta* (ordini naturali, fra loro opposti, secondo cui i punti della retta possano pensarsi disposti) *e alle proprietà superficiali del piano* (divisione del piano in due regioni per mezzo di una sua retta) (1).

III) *Postulato della continuità della retta.*

IV) *Postulati sulla congruenza e movimento* (eguaglianza di due figure, e possibilità di sovrapporle con un'operazione analoga al movimento dei corpi rigidi).

V) *Postulato delle parallele*, chiamato da D'ALEMBERT « lo scoglio e lo scandalo degli elementi della geometria », ma che fu invece occasione prima e punto di partenza degli immensi progressi che si sono fatti da un secolo a questa parte nell'esatta concezione dei fondamenti e del valore filosofico della scienza geometrica.

Quest'ultimo postulato, che si trova già in Euclide (benchè sotto altra forma), implica, sostanzialmente, l'affermazione che « per un punto dato si può condurre a una data retta una e una sola parallela » (ossia una sola retta che non incontri

(1) Proprietà non formulate con precisione da Euclide. Lo studio sistematico di esse fu fatto per la prima volta da PASCH (op. cit.).

la prima, pur giacendo con essa in un piano). Quest'affermazione, non si impone forse alla nostra mente con un' evidenza così completa e assoluta, come quelle contenute nei postulati precedenti: e ciò può spiegarsi, sia osservando che ognuno dei postulati precedenti ha il suo fondamento in un solo tipo di sensazioni, mentre il concetto di rette parallele corrispondente al postulato euclideo proviene dall' associazione della rappresentazione ottica di *rette* (di un piano) *non secantisi* colla rappresentazione tattile di *linee equidistanti* (1); sia colla considerazione che il postulato stesso, o uno qualunque dei suoi equivalenti (p. es. «la somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti»), implica la costanza di un *elemento quantitativo* (distanza di due rette, somma degli angoli di un triangolo), che non compare nei postulati precedenti, e la cui determinazione è sempre soggetta a errori di osservazione. — Non potendo qui ricordare tutta la storia delle ricerche matematiche che ebbero origine dallo studio e dalla critica di questo postulato, mi limiterò ad esporre lo *stato attuale* della questione (senza riandarne la genesi); stato attuale che si compendia in affermazioni precise:

1) (la questione che prima sorse, in ordine cronologico): *Il postulato euclideo delle parallele è una conseguenza logica dei postulati precedenti* (I - IV)? A questa domanda si può oggi rispondere *negativamente:* coi postulati I - IV sono logicamente compatibili tanto il postulato euclideo, quanto le altre due affermazioni che *a priori* appaiono possibili; vale a dire che, in un piano, si possano condurre a una retta data e per un punto dato due (e perciò infinite) non-secanti, oppure nessuna. Alla dimostrazione di questa compatibilità sono legati i nomi di Gauss, Lobacefsky, Bolyai, primi costruttori di una geometria (*immaginaria*, poi *non-euclidea*) corrispondente all' ipotesi delle infinite non-secanti; di Eugenio Beltrami, che ebbe la genialissima intuizione dell'esistenza di superficie, sulle quali questa teoria geometrica trova un'effettiva interpretazione, considerandovi come rette le linee di minima distanza, o *geodetiche;* di Riemann, Helmholtz, Cayley, Klein, che vi portarono il contributo di concetti, strumenti, risultati recentemente acquisiti ad altri campi della Matematica.

2) Ritenuto che un postulato contiene solo una schematizzazione di dati sperimentali, quale o quali delle tre ipotesi compatibili coi postulati I - IV si dimostrano convenienti, ossia conducono a teorie geometriche rappresentanti con sufficiente approssimazione i rapporti di posizione dei corpi (2)? *Tutte tre:* anche l'ipotesi delle infinite rette uscenti da uno stesso punto, e non-secanti una retta data, purchè l'angolo in cui esse sono comprese sia molto molto piccolo, e l'ipotesi che non vi siano affatto rette non-secanti (o parallele), con restrizione in certo modo analoga, conducono a conseguenze che, nel senso suindicato, si possono ritenere come soddisfacenti.

3) Di queste tre schematizzazioni, tutte (entro certi limiti) soddisfacenti, quale è *preferibile?* La più semplice; quella che può essere costruita, applicata,

---

(1) Enriques, Problemi della Scienza; p. 344-45.

(2) Così va posta la questione. Non esistendo in natura che degli *oggetti*, i quali rappresentano i diversi concetti geometrici (retta, ...) solo con approssimazione, non avrebbe senso domandare quale delle tre ipotesi e delle conseguenti geometrie sia fisicamente *vera*.

padroneggiata con maggior facilità; che corrisponde alla maggiore *economia di pensiero*. E questa è senza dubbio la *geometria euclidea*. E infatti molto più semplice e intellettualmente economica quella schematizzazione, per la quale la somma degli angoli di ogni triangolo è eguale a due retti, che non le altre due, nelle quali questa somma è minore o maggiore di due retti, e differisce da due retti per una quantità proporzionale all'area del triangolo proposto, e che per gli stessi triangoli più estesi che s'incontrano in pratica, cioè per quelli che nascono dall'esame delle parallassi delle stelle più lontane, risulta minore o dello stesso ordine di grandezza degli errori di osservazione a cui vanno soggette le misure più accurate!

Ma fu appunto la geometria non-euclidea che, colla critica di ciò che pareva, e non era affatto, un punto debole della costruzione euclidea, obbligò per prima i geometri a rivolgersi di proposito all'esperienza, a interrogarla; e così soltanto fu messo in evidenza il carattere relativo, approssimato, di ogni teoria geometrica, restando abbattuta la credenza nella esattezza, e perciò anche nella unicità e nella necessità aprioristica della rappresentazione euclidea. Non avesse fatto altro la geometria non euclidea, che darci mano a scioglierci dai vincoli del razionalismo, assurgendo a una giusta e chiara concezione di ciò che è una teoria geometrica, le spetterebbe pur sempre un posto molto onorevole nella storia del pensiero umano [1]!

GINO FANO